
NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06908090 5

SCIENCE DI

EXERCICES

DE MATHEMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

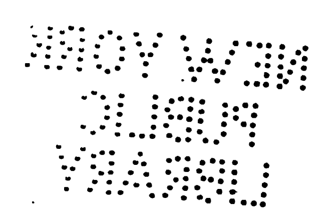
INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.



A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI,
RUE SERPENTE, N.° 7.

1826.



IMPRIMERIE DE BEAUCÉ-RUSAND, HOTEL PALATIN, PRÈS SAINT-SULPICE.

EXERCICES
DE MATHÉMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

Cet Ouvrage se composera d'une suite d'articles sur les différentes parties des sciences mathématiques. Il paraîtra par livraisons qui se succèderont à des époques peu éloignées l'une de l'autre. Dans ces articles, on se propose de passer en revue les diverses branches d'analyse, d'éclaircir les difficultés qu'elles présentent, et d'offrir de nouvelles méthodes, à l'aide desquelles on puisse traiter plus facilement des questions déjà résolues, ou résoudre celles qui ne l'étaient pas encore. Les principales applications de ces méthodes seront relatives à la physique, à la mécanique et à la théorie des nombres. Parmi les objets qui seront traités dans les Exercices, on peut dès à présent indiquer :

Une formule qui fournit immédiatement une limite de la plus petite différence entre les racines d'une équation numérique, sans que l'on soit obligé de recourir à l'équation aux carrés des différences ;

La théorie des *moments linéaires*, servant à simplifier l'enseignement de la mécanique rationnelle ;

Une méthode à l'aide de laquelle on peut intégrer par approximation des équations différentielles de forme quelconque, en déterminant les limites des erreurs commises ;

Une nouvelle théorie du contact des courbes et des surfaces ;

La théorie des intégrales définies, et la recherche de formules générales qui fournissent les valeurs des intégrales définies déjà connues et d'un grand nombre d'autres ;

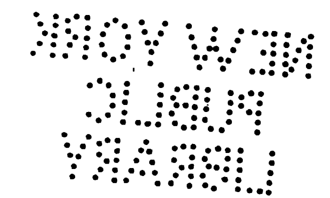
La résolution des équations numériques par les intégrales définies ;

L'intégration des équations aux différences partielles linéaires ou non linéaires ;

Enfin, un nouveau calcul, désigné sous le nom de calcul des résidus, et qui sert à sommer la série de Lagrange avec d'autres séries du même genre, ainsi qu'à établir des formules nouvelles, relatives soit à la détermination des intégrales définies, soit à la sommation des suites ou à l'évaluation des produits composés d'un nombre infini de facteurs.

A la dernière livraison de chaque année sera jointe une table des matières.





SUR L'ANALYSE

DES SECTIONS ANGULAIRES.

Depuis quelques temps, les géomètres se sont proposé de résoudre les difficultés que peuvent offrir plusieurs formules relatives aux sections angulaires. Ces mêmes difficultés se trouvant aussi résolues par les méthodes que j'ai données dans le Traité d'analyse publié en 1821, j'ai pensé qu'on ne verrait pas sans intérêt une indication sommaire de ces méthodes, et des avantages qu'on peut en retirer.

Les expressions que l'on rencontre dans la théorie des sections angulaires sont de deux espèces. Les unes admettent des valeurs multiples : tels sont les logarithmes et les puissances fractionnaires des quantités négatives et des expressions imaginaires. D'autres n'admettent qu'une seule valeur : tels sont le plus ordinairement les développements en séries. Quelquefois, parmi les valeurs multiples qu'une expression présente, on rencontre une valeur particulière qui mérite d'être remarquée. Il m'a paru nécessaire de distinguer dans la notation cette valeur particulière de toutes les autres, afin d'éviter la confusion que pourrait introduire dans le calcul l'emploi de la même notation pour des usages divers. C'est pour cette raison que j'ai proposé d'entourer de doubles traits ou de doubles parenthèses les quantités comprises dans des fonctions qui admettent des valeurs multiples; d'indiquer, par exemple, par

$$l((a+b\sqrt{-1})), \quad \text{ou} \quad ((a+b\sqrt{-1}))^{\mu} \tag{1}$$

l'un quelconque des logarithmes de l'expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$, ou l'une de ses puissances fractionnaires du degré $\mu=\pm\frac{m}{n}$; et de réserver les notations

$$l(a+b\sqrt{-1}), \qquad (a+b\sqrt{-1})^{\mu} \tag{2}$$

pour indiquer un seul de ces logarithmes, ou une seule de ces puissances. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

Si l'on désigne par r la racine carrée positive de a^2+b^2, et par θ celui des arcs compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$, qui a pour tangente le rapport $\frac{b}{a}$, on aura généralement, pour des valeurs positives de a,

$$(3)\qquad \begin{cases} l((a+b\sqrt{-1})) = l(r) + \theta\sqrt{-1} + l((1)), \\ ((a+b\sqrt{-1}))^{\mu} = r^{\mu}(\cos\mu\theta + \sqrt{-1}\sin\mu\theta)((1))^{\mu}; \end{cases}$$

tandis qu'on aura, pour des valeurs négatives de a,

$$(4)\qquad \begin{cases} l((a+b\sqrt{-1})) = l(z) + \theta\sqrt{-1} + l((-1)), \\ ((a+b\sqrt{-1}))^{\mu} = r^{\mu}(\cos\mu\theta + \sqrt{-1}\sin\mu\theta)((-1))^{\mu}. \end{cases}$$

Or, parmi les valeurs multiples de $l((1))$, il en est une qui mérite d'être remarquée, savoir, la valeur réelle

$$l(1) = 0,$$

qu'il est naturel d'indiquer à l'aide de parenthèses simples. De même, parmi les valeurs multiples de $((1))^{\mu}$, il en existe une qu'il est également naturel d'indiquer à l'aide de parenthèses simples, savoir, la valeur réelle

$$1^{\mu} = 1$$

Cela posé, si l'on convient de réduire à la fois, dans les deux membres de chacune des formules (3), les parenthèses doubles à des parenthèses simples, on obtiendra les formules

$$(5)\qquad \begin{cases} l(a+b\sqrt{-1}) = l(r) + \theta\sqrt{-1}, \\ (a+b\sqrt{-1})^{\mu} = r^{\mu}(\cos\mu\theta + \sqrt{-1}\sin\mu\theta), \end{cases}$$

qui serviront à définir les expressions (2), mais seulement pour des valeurs positives de la constante a. Il est important de remarquer que chacune des équations (5) continuera de subsister, si l'on change, dans les deux membres, le signe de $\sqrt{-1}$.

Dans le cas où a est négatif, les valeurs des expressions $l((-1))$ et $((-1))^{\mu}$ comprises dans les seconds membres des formules (4), sont toutes imaginaires, et l'on ne voit aucune raison pour appliquer la notation $l(-1)$ ou $(-1)^{\mu}$ à l'une de ces valeurs plutôt qu'à l'autre. On doit donc alors abandonner les notations $l(a+b\sqrt{-1})$, $(a+b\sqrt{-1})^{\mu}$, ainsi que les notations $l(-1)$ et $(-1)^{\mu}$. Il y a plus : l'emploi de ces notations offrirait un grave inconvénient. En effet, admettons, pour un instant, la notation $(-1)^{\mu}$ comme représentant la plus simple des valeurs de $((-1))^{\mu}$, savoir, l'expression imaginaire $\cos\mu\pi + \sqrt{-1}\sin\mu\pi$; et supposons que la définition de $(a+b\sqrt{-1})^{\mu}$ se déduise des formules (4), quand a devient négatif, comme elle se déduisait des formules (3), quand a était positif. On aura

$$(a+b\sqrt{-1})^{\mu} = r^{\mu}(\cos\mu\theta + \sqrt{-1}\sin\mu\theta)(\cos\mu\pi + \sqrt{-1}\sin\mu\pi);$$

et cette dernière équation devra subsister en même temps que la seconde des formules (5), quand on supposera $a = 0$, $b = -1$. Par suite on sera forcé d'admettre à la fois les deux équations

$$(-\sqrt{-1})^{\mu} = \cos\frac{\mu\pi}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\mu\pi}{2},$$
$$(-\sqrt{-1})^{\mu} = \left(\cos\frac{\mu\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)(\cos\mu\pi + \sqrt{-1}\sin\mu\pi),$$

dont la première exclut évidemment la seconde.

Les notations

$$l(a+b\sqrt{-1}), \quad (a+b\sqrt{-1})^{\mu}$$

restreintes, comme on vient de le dire, au cas où a est positif, jouissent d'une propriété très-remarquable [Voyez l'Analyse algébrique, chapitre IX, et les 37.ᵉ et 38.ᵉ Leçons de calcul infinitésimal.] Cette propriété consiste en ce que les séries convergentes, qui fournissent les développements de $l(a+b)$ et de $(a+b)^{\mu}$, quand b^2 est inférieur à a^2, représentent encore les développements de $l(a+b\sqrt{-1})$ et de $(a+b\sqrt{-1})^{\mu}$, dans le cas où l'on remplace b par $b\sqrt{-1}$. Les deux expressions imaginaires

$$l(a+b\sqrt{-1}), \quad (a+b\sqrt{-1})^{\mu}$$

sont, parmi les diverses valeurs de $l((a+b\sqrt{-1}))$, et de $((a+b\sqrt{-1}))^{\mu}$, les seules qui jouissent de cette propriété. De plus, comme on a généralement, en posant $\frac{b}{a} = B$,

$$(6) \qquad \begin{cases} l(a+b\sqrt{-1}) = l(a) + l(1+B\sqrt{-1}), \\ (a+b\sqrt{-1})^{\mu} = a^{\mu}(1+B\sqrt{-1})^{\mu}, \end{cases}$$

il est clair qu'on peut se contenter d'établir la propriété en question, pour le cas où l'on suppose la constante a réduite à l'unité, ainsi que je l'ai fait dans l'Analyse algébrique.

Je vais maintenant rappeler en peu de mots quelques applications des principes ci-dessus exposés, et quelques-unes des formules auxquelles ils conduisent.

Les équations que l'on rencontre dans l'analyse des sections angulaires, sont de deux espèces. Dans quelques-unes d'entre elles, chaque membre a des valeurs multiples. Ce sont les équations les moins précises. Car chaque équation de cette espèce indique seulement que l'une des valeurs du premier membre est égale à l'une des valeurs du second. On peut citer comme exemples les formules (3) et (4). Dans d'autres équations, le second membre à une valeur déterminée. Alors il n'y aurait nul avantage à placer dans le premier membre une expression dont les valeurs seraient multiples. Car ce serait indiquer en quelque sorte qu'on ne sait pas quelle est celle des valeurs du premier membre qui doit être égalée au second. On sent donc alors la nécessité d'employer dans le premier membre une notation qui ne puisse s'interpreter que d'une seule manière. On remplira aisément cette condition, en adoptant les notations ci-dessus

mentionnées. Ainsi, par exemple, en désignant par t un arc quelconque, par μ une quantité quelconque, par z une autre quantité comprise entre les limites $-1, +1$, enfin par

$$s = \text{arctang}\ \frac{z \sin t}{1 + z \cos t}$$

un arc renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$, on trouvera [voyez l'Analyse algébrique, pages 295 et 296.]

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{\mu}{1} z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2 (\cos 2t + \sqrt{-1} \sin 2t) + \ldots \\ & = [1 + z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)]^{\mu}, \end{aligned} \right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{\mu}{1} z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2 (\cos 2t + \sqrt{-1} \sin 2t) + \ldots \\ & = (1 + 2z \cos t + z^2)^{\frac{\mu}{2}} (\cos \mu s + \sqrt{-1} \sin \mu s) \end{aligned} \right.$$

On conclut aisément de l'équation (8) ou (9) que la formule connue du binome, savoir,

$$(9)\quad (x+y)^{\mu} = x^{\mu} + \mu x^{\mu-1} y + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2} y^2 + \ldots = x^{\mu}\left(1 + \frac{y}{x}\right)^{\mu}$$

subsiste pour des valeurs quelconques de μ, non-seulement dans le cas où x et y sont des quantités réelles dont la première est positive, mais encore dans le cas où x et y sont des expressions imaginaires, dont la première a pour partie réelle une quantité positive. On établirait avec la même facilité les formules

$$(10)\quad l[1 + z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)] = z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t) - \frac{z^2}{2}(\cos 2t + \sqrt{-1} \sin 2t) + \text{etc.}$$

$$(11)\quad l(1 + 2z \cos t + z^2) + \left(\text{arctang}\ \frac{z \sin t}{1 + z \cos t}\right)\sqrt{-1} = z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t) - \text{etc.}$$

$$(12)\qquad l(x+y) = l(x) + \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3} - \text{etc.},$$

qui subsistent dans les mêmes hypothèses que les équations (7), (8) et (9), et dont la seconde est la formule (37) [§ 2.e] du chapitre IX de l'Analyse algébrique.

Parmi les formules relatives aux sections angulaires, les géomètres ont remarqué celles qui fournissent les développements de $\cos \mu z$ et de $\sin \mu z$, suivant les puissances ascendantes ou descendantes de $\sin z$, $\cos z$ ou $\text{tang}\ z$, ainsi que les développements des

puissances de sinus et de cosinus, en fonctions des sinus ou cosinus d'arcs multiples. Nous nous bornerons à présenter ici quelques réflexions sur chacune de ces formules.

Soient μ une quantité quelconque, et z un arc compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$. Les valeurs de $\cos\mu z$ et de $\sin\mu z$ se développeront en fonctions des puissances ascendantes de $\sin z$ par les formules

(13)
$$\cos\mu z = 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\sin^2 z + \frac{\mu^2(\mu^2-4)}{1.2.3.4}\sin^4 z - \text{etc.}$$
$$= \cos z\left[1 - \frac{\mu^2-1}{1.2}\sin^2 z + \frac{\mu(^2-1)(\mu^2-9)}{1.2.3.4}\sin^4 z - \text{etc.}\right],$$

(14)
$$\sin\mu z = \mu\sin z - \frac{\mu(\mu^2-1)}{1.2.3}\sin^3 z + \frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin^5 z - \text{etc.}$$
$$= \cos z\left[\mu\sin z - \frac{\mu(\mu^2-4)}{1.2.3}\sin^3 z + \text{etc.}\right],$$

(voyez l'*Analyse algébrique*, pages 548 et 549). Si, dans les formules (13) et (14), on remplace z par $\frac{\pi}{2} - z$, on obtiendra celles qui fournissent les développements de $\cos\mu z$ et de $\sin\mu z$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de $\cos z$.

Si l'on voulait développer, suivant les puissances ascendantes de $\sin z$, non plus $\sin\mu z$ et $\cos\mu z$, mais

$$\sin\mu(z \pm n\pi), \quad \text{et} \quad \cos\mu(z \pm n\pi),$$

n étant un nombre entier quelconque, il suffirait de joindre aux formules (13) et (14) les deux équations connues

$$\sin\mu(z \pm n\pi) = \cos\mu n\pi . \sin\mu z \pm \sin\mu n\pi . \cos\mu z,$$
$$\cos\mu(z \pm n\pi) = \cos\mu n\pi . \cos\mu z \mp \sin\mu n\pi . \sin\mu z.$$

Il importe d'ailleurs d'observer que, l'arc z étant supposé compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$, $z \pm n\pi$ représente un arc dont la valeur est entièrement arbitraire.

Si l'on désigne par μ une quantité quelconque, et par z un arc compris entre les limites $-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}$, les valeurs de $\cos\mu z$ et de $\sin\mu z$ se développeront, suivant les puissances ascendantes de la tangente, par les formules

$$(15) \qquad \cos\mu s = \cos^{\mu} s - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos^{\mu-2} s.\sin^2 s + \text{etc.}$$
$$= \cos^{\mu} s\left[1 - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\tang^2 s + \text{etc.}\right],$$

$$(16) \qquad \sin\mu s = \frac{\mu}{1}\cos^{\mu-1} s.\sin s - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\cos^{\mu-3} s.\sin^3 s + \text{etc.}$$
$$= \mu\cos^{\mu} s\left[\tang s - \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\tang^3 s + \ldots\right],$$

[voyez l'Analyse algébrique, page 297]. Si la valeur numérique de s était renfermée entre les limites $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, les séries comprises dans les seconds membres des équations (15) et (16) deviendraient divergentes, et n'auraient plus de sommes.

Les développements connus de $\cos\mu z$ et de $\sin\mu z$ suivant les puissances descendantes de $\sin z$ ou $\cos z$ ne peuvent s'obtenir que dans le cas où μ est un nombre entier. Ils se déduisent immédiatement des formules (13), (14), etc., lorsque, dans les séries que renferment les seconds membres, on renverse l'ordre des termes, en écrivant les premiers ceux qui étaient les derniers, et réciproquement. On tirerait avec la même facilité des formules (15) et (16) les développements de $\cos\mu s$ et de $\sin\mu s$ suivant les puissances descendantes de $\tang s$, en supposant la quantité μ réduite à un nombre entier.

Il me reste à parler des formules qui fournissent les développements des puissances de $\cos z$ et de $\sin z$ suivant les cosinus ou sinus des arcs multiples de z. Dans le cas le plus général, ces formules peuvent être déduites de la sommation des séries

$$(17) \qquad \begin{cases} u = \cos\mu z + \mu\cos(\mu-2)z + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos(\mu-4)z + \text{etc.}, \\ v = \sin\mu z + \mu\sin(\mu-2)z + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\sin(\mu-4)z + \text{etc.}, \end{cases}$$

qui sont elles-mêmes comprises dans les suivantes

$$(18) \qquad \begin{cases} U = \cos\mu z + \mu y\cos(\mu-2)z + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}y^2\cos(\mu-4)z + \text{etc.}, \\ V = \sin\mu z + \mu y\sin(\mu-2)z + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}y^2\sin(\mu-4)z + \text{etc.} \end{cases}$$

Observons d'ailleurs que, pour rendre celles-ci convergentes, on doit toujours renfermer y entre les limites $-1, +1$. Cela posé, si l'on ajoute la première des formules (18) à la seconde multipliée par $\sqrt{-1}$, on trouvera

$$(19)\quad U+V\sqrt{-1}=e^{\mu z\sqrt{-1}}\left(1+\mu y e^{-2z\sqrt{-1}}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}y^2 e^{-4z\sqrt{-1}}+\ldots\right).$$

Par conséquent la question se réduit à trouver la somme de la série

$$(20)\quad 1, \mu y e^{-2z\sqrt{-1}}, \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}y^2 e^{-2z\sqrt{-1}}, \text{ etc.}$$

Or, il résulte immédiatement de la formule (7) que cette somme est équivalente, pour des valeurs quelconques des quantités μ et z, à

$$(21)\quad \left(1+y e^{-2z\sqrt{-1}}\right)^{\mu}$$

On aura donc généralement

$$(22)\quad U+V\sqrt{-1}=e^{\mu z\sqrt{-1}}\left(1+y e^{-2z\sqrt{-1}}\right)^{\mu},$$

et par suite

$$(23)\quad u+v\sqrt{-1}=e^{\mu z\sqrt{-1}}\left(1+e^{-2z\sqrt{-1}}\right)^{\mu}.$$

Les formules (22) et (23) suffisent pour déterminer les quatre quantités U, V, u, v. Concevons, par exemple, qu'on demande les valeurs de u et de v. On posera

$$z=\theta\pm n\pi,$$

θ désignant un arc compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$, et n un nombre entier quelconque. On aura par suite

$$e^{-2z\sqrt{-1}}=e^{-2\theta\sqrt{-1}},\quad e^{\mu z\sqrt{-1}}=e^{\mu\theta\sqrt{-1}}\cdot e^{\pm\mu n\pi\sqrt{-1}},$$

et la formule (23) donnera

$$u+v\sqrt{-1}=e^{\pm\mu n\pi\sqrt{-1}}e^{\mu\theta\sqrt{-1}}\left(1+e^{-2\theta\sqrt{-1}}\right)^{\mu}=e^{\pm\mu n\pi\sqrt{-1}}\left(e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)$$
$$=(2\cos\theta)^{\mu}\,(\cos\mu n\pi\pm\sqrt{-1}\sin\mu n\pi)\,,$$

On en conclura

$$(24)\qquad u=(2\cos\theta)^{\mu}\cos\mu n\pi\quad,\qquad v=(2\cos\theta)^{\mu}\sin\mu n\pi\,.$$

Les deux équations précédentes peuvent remplacer des formules équivalentes données par M. Poinsot, dans ses Recherches sur l'analyse des sections angulaires, ainsi que les quatre formules données par M. Poisson, sous les numéros (10) et (11), dans le Bulletin des sciences de septembre 1825.

Il ne faut pas oublier que les séries comprises dans les formules (17) ne peuvent être sommées que dans le cas où elles sont convergentes. Or, c'est ce qui arrivera toujours, si la quantité μ est positive. En effet, on a généralement, en supposant z^2 inférieur à l'unité, et l'exposant μ positif ou négatif,

$$(25)\qquad (1-z)^{\mu}=1-\frac{\mu}{1}z-\frac{\mu(1-\mu)}{1.2}z^2-\frac{\mu(1-\mu)(2-\mu)}{1.2.3}z^3-\text{etc.}$$

Or, il est facile de s'assurer 1.° que les termes de la série précédente, qui renfermeront des puissances de z d'un degré supérieur à la valeur numérique de l'exposant μ, seront tous affectés du même signe; 2.° que, si l'on fait converger z vers la limite 1, la série ne cessera pas d'être convergente, quelque petite que soit la différence de z à l'unité. Il est aisé d'en conclure que, pour $z=1$, la série sera convergente ou divergente suivant que la limite de la somme $(1-z)^{\mu}$ sera finie ou infinie. Le premier cas aura évidemment lieu, si μ est positif, puisqu'on trouvera, dans cette hypothèse, $(1-1)^{\mu}=0$. On aura donc, pour des valeurs positives de μ,

$$(26)\qquad 0=1-\frac{\mu}{1}-\frac{\mu(1-\mu)}{1.2}-\frac{\mu(1-\mu)(2-\mu)}{1.2.3}-\text{etc.}\;;$$

et, puisqu'alors la série

$$(27)\qquad 1,\ \frac{-\mu}{1},\ \frac{-\mu(1-\mu)}{1.2},\ \frac{-\mu(1-\mu)(2-\mu)}{1.2.3},\ \text{etc.}$$

sera convergente, on pourra en dire autant *à fortiori* des séries comprises dans les for-

mules (17). Si l'on supposait au contraire μ négatif, et égal à $-r$, on trouverait, en posant $z=1$,

$$(1-z)^{-r}=\frac{1}{(1-1)^r}=\frac{1}{0}=\infty,$$

et par suite, la série (27), ou

$$(28)\qquad 1,\quad \frac{r}{1},\quad \frac{r(r+1)}{1.2},\quad \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3},\quad \text{etc.}$$

serait divergente. Ajoutons que le terme général de cette série, savoir

$$(29)\qquad \frac{r(r+1)\ldots.(r+n-1)}{1.2.3\ldots n}$$

croîtra ou décroîtra indéfiniment, pour des valeurs croissantes de n, suivant que l'on supposera $r>1$ ou $r<1$; et d'abord, il est clair que, si r désigne un nombre entier supérieur à l'unité, l'expression (29) pourra être présentée sous la forme

$$(30)\qquad \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2.3\ldots(r-1)};$$

d'où il résulte qu'elle deviendra infinie pour des valeurs infinies de n. De plus, si l'on fait avec M. Legendre

$$\Gamma(r)=\int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx,$$

l'expression (29) deviendra généralement

$$\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)\Gamma(n+1)};$$

et, comme, en désignant par ε une quantité dont la valeur numérique décroisse indéfiniment avec $\frac{1}{r}$, on aura, pour de grandes valeurs de r,

$$\Gamma(r)=(1+\varepsilon)r^{r+\frac{1}{2}}e^{-r}\sqrt{(2\pi)},$$

on trouvera par suite

$$(31)\qquad \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)\Gamma(n+1)}=\frac{n^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}(1+\delta),$$

δ devant converger en même temps que $\frac{1}{n}$ vers la limite 0. Or, il est clair que le second membre de l'équation (31) se réduira, pour des valeurs infinies de n, à 0, à l'unité, ou à l'infini positif, suivant que l'on supposera $\nu<1$, $\nu=1$, ou $\nu>1$. On pourra donc en dire autant de l'expression (29); d'où il est aisé de conclure que les séries comprises dans les formules (17) seront divergentes pour des valeurs négatives de μ renfermées entre les limites $\mu=-1$, $\mu=-\infty$. Quant aux valeurs de μ renfermées entre les limites $\mu=0$, $\mu=1$, on démontrerait facilement, par des procédés semblables à ceux que nous avons employés dans le chapitre 6.ᵉ de l'Analyse algébrique, qu'elles rendent ordinairement convergentes les séries comprises dans les formules (17). On doit toutefois excepter le cas où l'on supposerait $2z=\pi$.

Des remarques diverses que nous venons de faire, il résulte que les formules (23) et (24) doivent être restreintes au cas où la quantité μ se trouve renfermée entre les limites $\mu=-1$, $\mu=\infty$, c'est-à-dire au cas ou la quantité $\mu+1$ est positive.

Nous nous sommes contentés, dans cet article, de montrer comment les principes que nous avons établis s'appliquent à la sommation des séries. Mais c'est surtout dans le calcul intégral, et particulièrement dans la théorie des intégrales définies que les mêmes principes reçoivent de nombreuses et d'utiles applications. On peut consulter, à ce sujet, le 19.ᵉ cahier du Journal de l'École royale polytechnique, ainsi qu'un mémoire publié sous la date d'août 1824, et relatif aux intégrales définies prises entre des limites imaginaires.

SUR UN NOUVEAU GENRE DE CALCUL

ANALOGUE AU CALCUL INFINITÉSINAL.

On sait que le calcul différentiel qui a tant contribué aux progrès de l'analyse, est fondé sur la considération des coefficients différentiels ou fonctions dérivées. Lorsqu'on attribue à une variable indépendante x un accroissement infiniment petit ε, une fonction $f(x)$ de cette variable reçoit elle-même en général un accroissement infiniment petit dont le premier terme est proportionnel à ε, et le coefficient fini de ε dans l'accroissement de la fonction est ce qu'on nomme le coefficient différentiel. Ce coefficient subsiste, quelque soit x, et ne peut s'évanouir constamment que dans le cas où la fonction proposée se réduit à une quantité constante. Il n'en est pas de même d'un autre coefficient dont nous allons parler, et qui est généralement nul, excepté pour des valeurs particulières de la variable x. Si, après avoir cherché les valeurs de x qui rendent la fonction $f(x)$ infinie, on ajoute à l'une de ces valeurs, désignée par x_1, la quantité infiniment petite ε, puis, que l'on développe $f(x_1+\varepsilon)$ suivant les puissances ascendantes de la même quantité, les premiers termes du développement renfermeront des puissances négatives de ε, et l'un d'eux sera le produit de $\frac{1}{\varepsilon}$ par un coefficient fini, que nous appellerons le *résidu* de la fonction $f(x)$ relatif à la valeur particulière x_1 de la variable x. Les résidus de cette espèce se présentent naturellement dans plusieurs branches de l'analyse algébrique et de l'analyse infinitésimale. Leur considération fournit des méthodes simples et d'un usage facile, qui s'appliquent à un grand nombre de questions diverses, et des formules nouvelles qui paraissent mériter l'attention des géomètres. Ainsi, par exemple, on déduit immédiatement du calcul des résidus la formule d'interpolation de Lagrange, la décomposition des fractions rationnelles dans le cas des racines égales ou inégales, des formules générales propres à déterminer les valeurs des intégrales définies, la sommation d'une multitude de séries et particulièrement de séries périodiques, l'intégration des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites et à coefficients constants, avec ou sans dernier terme variable, la série de Lagrange et d'autres séries du même genre, la résolution des équations algébriques ou transcendantes, etc. ...

La recherche des résidus d'une fonction $f(x)$ s'effectue d'ordinaire avec beaucoup de facilité. En effet, soit toujours x_1 l'une des valeurs de x qui rendent cette fonction infinie, c'est-à-dire l'une des racines de l'équation

$$\frac{1}{f(x)} = 0 . \tag{1}$$

La valeur du produit $(x-x_1)f(x)$, correspondante à $x=x_1$, se présentera sous une forme indéterminée. Mais en réalité, elle sera très-souvent une quantité finie. Adoptons d'abord cette hypothèse, et faisons

$$(x-x_1)f(x) = \mathfrak{f}(x) . \tag{2}$$

On tirera de l'équation (2)

$$f(x) = \frac{\mathfrak{f}(x)}{x-x_1} , \tag{3}$$

et par suite

$$f(x_1+\varepsilon) = \frac{\mathfrak{f}(x_1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\,\mathfrak{f}(x_1) + \mathfrak{f}'(x_1+\theta\varepsilon) , \tag{4}$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité. Par conséquent le résidu de la fonction $f(x)$, relatif à la valeur $x=x_1$, sera la quantité finie

$$\mathfrak{f}(x_1) , \tag{5}$$

ou, en d'autres termes, la valeur du produit

$$\varepsilon f(x_1+\varepsilon) \tag{6}$$

correspondante à $\varepsilon=0$. Dans le cas que nous venons de considérer, l'équation (1) est censée n'admettre qu'une seule racine égale à x_1.

On dit que l'équation (1) admet m racines égales à x_1, m désignant un nombre entier quelconque, lorsque le produit $(x-x_1)^m f(x)$ obtient, pour $x=x_1$, une valeur finie différente de zéro. Soit, dans cette dernière hypothèse,

$$(x-x_1)^m f(x) = \mathfrak{f}(x) . \tag{7}$$

$\mathfrak{f}(x_1)$ sera une quantité finie, et l'on aura

$$f(x) = \frac{\mathfrak{f}(x)}{(x-x_1)^m} , \tag{8}$$

puis l'on en conclura, en posant $x = x_1 + \varepsilon$,

$$f(x_1+\varepsilon) = \frac{\mathrm{f}(x_1+\varepsilon)}{\varepsilon^m} \tag{9}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^m}\,\mathrm{f}(x_1) + \frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\frac{\mathrm{f}'(x_1)}{1} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{\mathrm{f}_{(m)}(x_1+\theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m)},$$

θ désignant toujours un nombre inférieur à l'unité. Donc le résidu de la fonction $f(x)$, relatif à la valeur $x = x_1$, sera la quantité finie

$$\frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}, \tag{10}$$

ou, en d'autres termes, ce que devient l'expression

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{d^{m-1}[\varepsilon^m f(x_1+\varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}} \tag{11}$$

lorsqu'on pose, après les différentiations, $\varepsilon = 0$.

Pour abréger le discours, nous appellerons *résidu intégral* de la fonction $f(x)$ la somme des résidus de cette fonction relatifs aux diverses racines réelles ou imaginaires de l'équation (1), et *résidu intégral pris entre des limites données* la somme des résidus correspondants à des racines dans lesquelles les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ ne devront pas dépasser certaines limites. L'*extraction des résidus* sera l'opération par laquelle nous les déduirons de la fonction proposée. Nous indiquerons cette extraction à l'aide de la lettre initiale $\mathcal{E}$, qui sera considérée comme une nouvelle caractéristique, et, pour exprimer le résidu intégral de $f(x)$, nous placerons la lettre $\mathcal{E}$ devant la fonction entourée de doubles parenthèses, ainsi qu'il suit

$$\mathcal{E}\,((f(x))). \tag{12}$$

Dans la notation (12), les doubles parenthèses, dont nous avons précédemment fait usage pour exprimer les valeurs multiples des fonctions [voyez la page 1], serviront à rappeler la multiplicité des valeurs que l'on devra en général attribuer successivement, non plus à la fonction donnée, mais à la variable elle-même. Lorsque la fonction $f(x)$ se présentera sous la forme fractionnaire

(13) $$f(x)=\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)},$$

et que nous voudrons indiquer la somme des résidus relatifs aux racines de l'équation

(14) $$\mathrm{F}(x)=0,$$

nous écrirons

(15) $$\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(x)}{((\mathrm{F}(x)))},$$

appliquant ainsi les doubles parenthèses à la seule fonction $\mathrm{F}(x)$ *. Au contraire la notation

(16) $$\mathcal{E}\frac{((\mathrm{f}(x)))}{\mathrm{F}(x)}$$

représentera la somme des résidus de $f(x)$, relatifs aux seules racines de l'équation

(17) $$\frac{1}{\mathrm{f}(x)}=0..$$

De même, si l'on suppose

(18) $$\mathrm{F}(x)=\varphi(x).\chi(x),$$

les deux notations

(19) $$\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(x)}{((\varphi(x)))\chi(x)},\qquad \mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)((\chi(x)))}$$

exprimeront, la première, la somme des résidus correspondants aux racines de $\varphi(x)=0$, et la seconde, la somme des résidus qui correspondent aux racines de $\chi(x)=0$, ensorte qu'on aura généralement

(20) $$\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(x)}{((\varphi(x).\chi(x)))}=\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(x)}{((\varphi(x)))\chi(x)}+\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)((\chi(x)))}.$$

De même encore, si l'on suppose

(21) $$\mathrm{f}(x)=\varphi(x).\chi(x),$$

* Nous avons ici profité, pour rendre les notations plus simples, de quelques observations qui nous ont été faites par M. Ostrogradsky.

on obtiendra l'équation

$$(22)\qquad \mathcal{E}\frac{((\varphi(x)\cdot\chi(x)))}{F(x)}=\mathcal{E}\frac{((\varphi(x)))\chi(x)}{F(x)}+\mathcal{E}\frac{\varphi(x)((\chi(x)))}{F(x)},$$

dans laquelle les deux termes du second membre représenteront, le premier, la somme des résidus de $f(x)$, relatifs aux racines de $\frac{1}{\varphi(x)}=0$, et le second, la somme des résidus relatifs aux racines de $\frac{1}{\chi(x)}=0$. Si l'on fait, en particulier, $\chi(x)=x-x_1$, la seconde des notations (19) se trouvera réduite à

$$(23)\qquad \mathcal{E}\frac{f(x)}{((x-x_1))\varphi(x)},$$

et représentera le résidu partiel relatif à une seule des racines de l'équation (1). De plus, comme on aura dans cette hypothèse

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=(x-x_1)f(x),$$

il est clair que le résidu correspondant à la valeur $x=x_1$ pourra encore être exprimé par la notation

$$(24)\qquad \mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))};$$

ce que l'on pouvait conclure directement des conventions adoptées. Enfin, si nous voulons indiquer la somme des résidus de $f(x)$, relatifs à celles des racines de l'équation (1), dans lesquelles les parties réelles demeurent comprises entre deux limites données x_0, X, et les coefficients de $\sqrt{-1}$ entre deux autres limites y_0, Y, nous emploierons la notation

$$(25)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{x_0\ y_0}^{X\ \ Y} f((x)).$$

Ainsi, par exemple, si l'équation (1) n'a que des racines imaginaires,

$$(26)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{\infty\ \ 0}^{\infty\ \ \infty}((f(x)))$$

représentera la somme des résidus relatifs aux racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera positif.

Ces diverses conventions étant admises, on aura évidemment

$$\mathcal{E}\frac{f(x)}{((x-x_1))}=f(x_1)\,, \tag{27}$$

$$\mathcal{E}\frac{f(x)}{(((x-x_1)^m))}=\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\,, \tag{28}$$

x_1 désignant une valeur particulière de x, pour laquelle la fonction $f(x)$ ou $f^{(m-1)}(x)$ conserve une valeur finie. On trouvera encore, si l'équation (1) n'a qu'une seule racine égale à x_1,

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}=\varepsilon f(x_1+\varepsilon)\,, \tag{29}$$

et, si l'équation (1) fournit m racines égales à x_1,

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}\quad\frac{1}{1.2.3..(m-1)}\quad\frac{d^{m-1}[\varepsilon^m f(x_1+\varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}}\,, \tag{30}$$

ε devant être réduit à zéro, lorsqu'on aura effectué les différentiations. Si la fonction $f(x)$ se présente sous la forme fractionnaire $\frac{f(x)}{F(x)}$, et que x_1 soit une racine de l'équation $F(x)=0$, on aura

$$F(x_1+\varepsilon)=\varepsilon F'(x_1+\theta\varepsilon)\,,$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité. Donc alors la valeur du produit $\varepsilon f(x_1+\varepsilon)$, correspondante à $\varepsilon=0$, sera

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}\,,$$

et la formule (29) donnera

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}=\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}\,. \tag{31}$$

Enfin, si l'on nomme a une quantité comprise entre les limites x_0, X, et b une quantité comprise entre les limites y_0, Y, on aura généralement

$$(32)\qquad \underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(x))) = \underset{x_0}{\overset{a}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(x))) + \underset{a}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(x))),$$

et

$$(33)\qquad \underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(x))) = \underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{b}((f(x))) + \underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{b}^{Y}((f(x))).$$

Pour que ces dernières formules s'étendent à toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les valeurs des quantités a, b, x_0, X, y_0, Y, il suffit de concevoir que, dans le résidu intégral représenté par la notation (25), on réduit chaque résidu partiel à la moitié de sa valeur, toutes les fois qu'il correspond à une racine dans laquelle la partie réelle coïncide avec une des limites x_0, X, ou le coefficient de $\sqrt{-1}$ avec l'une des limites y_0, Y; et au quart de cette même valeur, toutes les fois que les deux conditions sont remplies. Cela posé, si l'équation (1) a des racines réelles et des racines imaginaires, la notation (26) représentera évidemment la demi-somme des résidus relatifs aux racines réelles, augmentée de la somme des résidus correspondants aux racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif.

Concevons présentement que l'on remplace la fonction $f(x)$ par la somme de plusieurs fonctions $\varphi(x)$, $\chi(x)$, etc... On établira sans difficulté les formules

$$(34)\qquad \mathcal{E}((\varphi(x)+\chi(x)+..)) = \mathcal{E}((\varphi(x))) + \mathcal{E}((\chi(x))) + \text{etc.},$$

$$(35)\qquad \underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((\varphi(x)+\chi(x)+..)) = \underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((\varphi(x))) + \underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((\chi(x))) + \text{etc.},$$

On trouvera de même

$$(36)\qquad \mathcal{E}\frac{\varphi(x)+\chi(x)+..}{((F(x)))} = \mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((F(x)))} + \mathcal{E}\frac{\chi(x)}{((F(x)))} + \text{etc.},$$

etc...

Soit de plus $f(x,z)$ une fonction des deux variables indépendantes x, z; et supposons que l'équation

$$(37) \qquad \frac{1}{f(x,z)} = 0,$$

résolue par rapport à x, fournisse des racines indépendantes de la variable z. Si l'on désigne par x_1 l'une de ces racines, il est clair que le résidu de la fonction dérivée

$$\frac{df(x,z)}{dx},$$

correspondant à $x = x_1$, ne diffèrera pas de la dérivée relative à z du résidu de la fonction $f(x,z)$. Car ces deux quantités se réduiront l'une et l'autre au coefficient du rapport

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

dans le développement de l'expression

$$f(x_1 + \varepsilon, z + \varepsilon')$$

suivant les puissances ascendantes des accroissements $\varepsilon, \varepsilon'$. Cette remarque pouvant s'étendre aux diverses racines de l'équation (37), que l'on suppose indépendantes de la variable z, on en conclura

$$(38) \qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{df(x,z)}{dz}\right)\right) = \frac{d\,\mathcal{E}((f(x,z)))}{dz}.$$

Soit maintenant

$$(39) \qquad f(x,z) = \int_{z_0}^{z} F(x,z)\,dz,$$

z_0 désignant une valeur particulière de z. On aura, par suite,

$$(40) \qquad \frac{df(x,z)}{dz} = F(x,z),$$

puis, en intégrant les deux membres de l'équation (38) à partir de $z = z_0$, on trouvera

$$(41) \qquad \int_{z_0}^{z} \mathcal{E}((F(x,z)))\,dz = \mathcal{E}\left(\left(\int_{z_0}^{z} F(x,z)\,dz\right)\right).$$

On établirait pareillement les formules

$$(42)\qquad \frac{d\,\underset{x_0}{\overset{X}{\mathcal{E}}}\underset{y_0}{\overset{Y}{}}((f(x,z)))}{dz} = \underset{x_0}{\overset{X}{\mathcal{E}}}\underset{y_0}{\overset{Y}{}}\left(\left(\frac{df(x,z)}{dz}\right)\right),$$

et

$$(43)\qquad \int \underset{x_0}{\overset{X}{\mathcal{E}}}\underset{y_0}{\overset{Y}{}}((F(x,z)))\,dz = \underset{x_0}{\overset{X}{\mathcal{E}}}\underset{y_0}{\overset{Y}{}}\left(\left(\int F(x,z)\,dz\right)\right),$$

les deux intégrales relatives à z étant prises entre les mêmes limites. Il résulte évidemment de ces diverses formules que l'on peut différencier et intégrer sous le signe $\mathcal{E}$, aussi bien que sous le signe $\int$.

Si, dans la formule (9), on remplace ε par $x-x_1$, et $\frac{f^{(m)}(x_1+\theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m}$ par $\psi(x)$, on trouvera

$$(44)\qquad f(x) = \frac{f(x)}{(x-x_1)^m}$$

$$= \frac{f(x_1)}{(x-x_1)^m} + \frac{1}{1}\frac{f'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{f''(x_1)}{(x-x_1)^{m-2}} + \ldots + \frac{1}{1.2.3..(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1} + \psi(x),$$

La fonction $\psi(x)$, comprise dans cette dernière formule, acquerra généralement pour $x=x_1$, une valeur finie, savoir

$$(45)\qquad \frac{f^{(m)}(x_1)}{1.2.3\ldots m}.$$

De plus, on tirera de l'équation (28), en y remplaçant m par $m+1$, et la lettre x par la lettre z,

$$(46)\qquad \frac{f^{(m)}(x_1)}{1.2.3..m} = \mathcal{E}\,\frac{f(z)}{(((z-x_1)^{m+1}))}$$

Cela posé, on aura

$$(47)\quad \frac{f(x_1)}{(x-x_1)^m}+\frac{1}{1}\frac{f'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}}+\frac{1}{1.2}\frac{f''(x_1)}{(x-x_1)^{m-2}}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1}$$

$$=\frac{1}{(x-x_1)^m}\mathcal{E}\frac{f(z)}{((z-x_1))}+\frac{1}{(x-x_1)^{m-1}}\mathcal{E}\frac{f(z)}{(((z-x_1)^2))}+\dots+\frac{1}{x-x_1}\mathcal{E}\frac{f(z)}{(((z-x_1)^m))}$$

$$=\mathcal{E}\frac{f(z)}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))}\left\{(z-x_1)^{m-1}+(x-x_1)(z-x_1)^{m-2}+\dots+(x-x_1)^{m-1}\right\}$$

$$=\mathcal{E}\frac{f(z)}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))}\frac{(x-x_1)^m-(z-x_1)^m}{x-z}$$

$$=\mathcal{E}\frac{f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))}-\frac{1}{(x-x_1)^m}\mathcal{E}\frac{(z-x_1)^m f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))}\ .$$

D'ailleurs la notation

$$\mathcal{E}\frac{(z-x_1)^m f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))}=\mathcal{E}\frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)((z-x_1))}$$

représente le résidu de la fonction

$$(48)\qquad \frac{f(z)}{x-z}$$

relatif à $z=x_1$; et, comme ce résidu est évidemment nul, attendu que la fonction (48) conserve pour $z=x_1$ une valeur finie, savoir,

$$\frac{f(x_1)}{x-x_1},$$

nous pouvons conclure que l'on a généralement

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{f(x_1)}{(x-x_1)^m}+\frac{1}{1}\frac{f'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}}+\frac{1}{1.2}\frac{f''(x_1)}{(x-x_1)^{m-2}}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1}\\&\qquad=\mathcal{E}\frac{f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))}\ .\end{aligned}\right.$$

On peut vérifier directement l'équation (49), en observant que le second membre de cette équation représente la valeur de l'expression

$$(50)\qquad \frac{1}{1.2.3\dots(m-1)}\frac{d^{m-1}\left(\frac{f(z)}{x-z}\right)}{dz}$$

correspondante à $z=x_1$. Comme on a d'autre part

$$\mathrm{f}(z)=(z-x_1)^m f(z),$$

le second membre de l'équation (49) pourra être réduit à

$$\mathcal{E}\frac{(z-x_1)^m f(z)}{(x-z)\,(((z-x_1)^m))},$$

ou même à

$$\mathcal{E}\frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)\,((z-x_1))}.$$

Par suite, l'équation (44) donnera

(51) $$f(x)-\mathcal{E}\frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)\,((z-x_1))}=\psi(x).$$

Il résulte de cette dernière que, pour déduire de la fonction $f(x)$, qui devient infinie lorsqu'on suppose $x=x_1$, une autre fonction qui conserve, dans la même hypothèse, une valeur finie, il suffit de retrancher de $f(x)$ une somme de fractions rationnelles équivalente à l'expression

(52) $$\mathcal{E}\frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)\,((z-x_1))},$$

c'est-à-dire, le résidu de la fonction

(53) $$\frac{f(z)}{x-z}$$

relatif à $z=x_1$.

Concevons maintenant que l'on veuille déduire de la fonction $f(x)$ une autre fonction qui ne devienne jamais infinie pour aucune des valeurs particulières $x=x_1$, $x=x_2$, etc. Il suffira évidemment de retrancher de $f(x)$ la somme des résidus de la fonction (53) correspondants aux valeurs $z=x_1$, $z=x_2$..., c'est-à-dire le résidu intégral représenté par la notation

(54) $$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}.$$

Donc, si l'on pose

(55) $$f(x)-\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}=\varpi(x),$$

la fonction $\varpi(x)$ conservera une valeur finie pour $x = x_1$, $x = x_2$, etc..., et par conséquent pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de la variable x.

Dans le cas particulier où $f(x)$ désigne une fraction rationnelle, $\varpi(x)$ ne peut être qu'une fraction de même espèce, dont le dénominateur ne doit jamais s'évanouir, et par conséquent une fraction dont le dénominateur est constant, ou en d'autres termes, une fonction entière de x. Cela posé, soit

$$(56) \qquad f(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)},$$

$\mathrm{f}(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ désignant deux fonctions entières. Si le degré de la seconde surpasse le degré de la première, la fonction $f(x)$ s'évanouira pour des valeurs infinies de x, et l'on pourra en dire autant des deux membres de l'équation (55), d'où l'on conclura que la fonction entière $\varpi(x)$ se réduit à zéro. On aura donc, dans cette hypothèse,

$$(57) \qquad f(x) = \mathcal{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z}.$$

La formule (57) fournit le moyen de décomposer dans tous les cas possibles la fraction rationnelle $f(x)$ en fractions simples.

Concevons, pour fixer les idées, que l'on veuille décomposer en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}.$$

On tirera de la formule (57)

$$(58) \qquad \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \mathcal{E}\,\frac{1}{(x-z)\,(((z+1)(z-1)^2))} = \mathcal{E}\,\frac{1}{(x-z)\,(z+1)^2((z+1))} + \mathcal{E}\,\frac{1}{(x-z)\,(z+1)\,(((z-1)^2))}.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par ε une quantité infiniment petite, on aura, en vertu des formules (27) et (30),

$$\mathcal{E}\,\frac{1}{(x-z)\,(z-1)^2((z+1))} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1},$$

et

$$\mathcal{E}\,\frac{1}{(x-z)\,(z+1)\,(((z-1)^2))} = \frac{d\,\dfrac{1}{(2+\varepsilon)(x-1-\varepsilon)}}{d\varepsilon} = -\frac{1}{(2+\varepsilon)^2}\,\frac{1}{x-1-\varepsilon} + \frac{1}{2+\varepsilon}\,\frac{1}{(x-1-\varepsilon)^2}$$
$$= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2}.$$

On trouvera donc

(59) $$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2},$$

ce qui est exact.

Si, dans la formule (57), on remplace $f(x)$ par $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$, et si l'on suppose

(60) $$\mathrm{F}(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m),$$

m étant un nombre entier quelconque, on trouvera

(61) $$\frac{\mathrm{f}(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}=\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)}{(((z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_m)))}\frac{1}{x-z}$$

$$=\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)}{((z-x_1))(z-x_2)\ldots(z-x_m)}\frac{1}{x-z}+\ldots+\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots((z-x_m))}\frac{1}{x-z}$$

$$=\frac{\mathrm{f}(x_1)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}\frac{1}{x-x_1}+\ldots\ldots+\frac{\mathrm{f}(x_m)}{(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}\frac{1}{x-x_m},$$

et par suite

(62) $$\mathrm{f}(x)=\frac{(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}\mathrm{f}(x_1)+\ldots+\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}\mathrm{f}(x_m).$$

Cette dernière équation est la formule d'interpolation de Lagrange.

Si, après avoir multiplié par x les deux membres de l'équation (57), on attribue à la variable x une valeur infinie, et si l'on désigne par $\mathcal{F}$ la valeur correspondante du produit $xf(x)$, on obtiendra successivement les deux formules

$$xf(x)=\mathcal{E}\frac{((f(x)))}{1-\frac{z}{x}}$$

et

(63) $$\mathcal{F}=\mathcal{E}((f(z))).$$

Si la quantité $\mathcal{F}$ s'évanouit, on aura simplement

(64) $$\mathcal{E}((f(z)))=0.$$

Cette dernière formule subsiste toutes les fois que, dans la fraction rationnelle désignée par $f(x)$, la différence entre le degré du dénominateur et celui du numérateur de-

vient supérieure à l'unité. Elle coïncide avec une équation établie dans le Journal de l'École polytechnique [voyez la page 500 du 18.e cahier]. Si l'on y remplace $f(x)$ par $\frac{f(z)}{z-x}$, elle subsistera, dans le cas même où la différence ci-dessus mentionnée se réduirait à l'unité. On aura donc alors

$$(65) \qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{z-x}\right)\right) = f(x) - \mathcal{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z} = 0\,,$$

et l'on se trouvera ainsi ramené à l'équation (57).

Si, dans les formules (63) et (64), on pose

$$f(x) = \frac{x^n}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}\,,$$

on en conclura que la somme

$$(66) \qquad \frac{x_1^{\,n}}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)} + \frac{x_2^{\,n}}{(x_2-x_1)\ldots(x_2-x_m)} + \ldots\ldots + \frac{x_m^{\,n}}{(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}$$

est équivalente à zéro, lorsqu'on a $n < m-1$, et à l'unité lorsqu'on a $n = m-1$; ce que l'on savait déjà.

Les équations (57), (63) et (64), que nous avons établies, en supposant la fonction $f(x)$ réduite à une fraction rationnelle, subsistent encore dans beaucoup d'autres hypothèses. C'est ce que nous ferons voir dans de nouveaux articles, dans lesquels nous exposerons successivement les principales applications du calcul des résidus.

SUR LES FORMULES
DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

On prouve facilement que, dans le cas où la fraction

$$(1) \qquad \frac{\mathcal{F}(h)}{h^{n-1}}$$

s'évanouit pour $h=0$, l'on a

$$(2) \qquad \mathcal{F}(h)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\mathcal{F}^{(n)}(\theta h),$$

θ désignant un nombre inconnu, mais inférieur à l'unité (*). Or, l'équation (2), à l'aide de laquelle on peut établir directement la théorie des *maxima* ou *minima* et fixer les valeurs des fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, conduit aussi très-simplement à la série de Taylor et à la détermination du reste qui doit compléter cette série. En effet, on tirera successivement de l'équation (2),

1.° en posant $\mathcal{F}(h)=f(x+h)-f(x)$, et $n=1$,

$$(3) \qquad f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1}f'(x+\theta h);$$

puis, en posant $f'(x+h)=f'(x)+H_1$,

$$H_1=\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h};$$

2.° en posant $\mathcal{F}(h)=f(x+h)-f(x)-hf'(x)$, et $n=2$,

$$(4) \qquad f(x+h)-f(x)-hf'(x)=\frac{h^2}{1.2}f''(x+\theta h);$$

puis, en posant $f''(x+\theta h)=f''(x)+H_2$,

$$\frac{1}{1.2}H_2=\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)}{h^2};$$

(*) Voyez, dans le *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, la formule (7) de l'addition, page 164. Cette formule comprend, comme cas particulier, l'équation (2).

3.° en posant $\mathcal{F}(h)=f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)$, et $n=3$,

(5) $$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)=\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x+\theta h) ;$$

puis, en posant $f'''(x+\theta h)=f'''(x)+H_3$,

$$\frac{1}{1.2.3}H_3=\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)}{h^3}.$$

En continuant de la même manière, et observant que les quantités

$$H_1,\ \frac{1}{1.2}H_2,\ \frac{1}{1.2.3}H_3,\ \text{etc.......}$$

s'évanouissent toutes avec h, on établira généralement l'équation

(6) $$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\ldots\ldots-\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h),$$

ou

(7) $$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Si l'on y remplace x par o, et h par x, on trouvera

(8) $$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x).$$

Il suit de la formule (7) que la fonction $f(x+h)$ peut être considérée comme composée d'une fonction entière de h, savoir,

(9) $$f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2.}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x),$$

et d'un reste, savoir,

(10) $$\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Lorsque ce reste devient infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, on peut affirmer que la série

(11) $$f(x),\ hf'(x),\ \frac{h^2}{1.2}f''(x),\ldots$$

est convergente, et quelle a pour somme $f(x+h)$. Donc alors on peut écrire l'équation

$$(12) \qquad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2.}f''(x)+\text{etc.}\ldots,$$

qui est précisément la formule de Taylor. De même, si le reste

$$(13) \qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x)$$

devient infiniment petit pour des valeurs infinies de n, l'équation (8) entraînera la suivante

$$(14) \qquad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2.}f''(0)+\text{etc.}\ldots,$$

qui est précisément la formule de Maclaurin.

Il est souvent utile de substituer aux expressions (10) et (13) d'autres expressions équivalentes. On peut y parvenir comme il suit.

Désignons par $\varphi(z)$ ce que devient le premier membre de l'équation (6) quand on y remplace h par $h-z$ et x par $x+z$, ou, en d'autres termes, le reste qu'on obtient quand on développe $f(x+h)$ suivant les puissances ascendantes et entières de $h-z$, et que l'on s'arrête à la puissance du degré $n-1$; en sorte qu'on ait

$$(15) \quad f(x+h)=f(x+z)+\frac{h-z}{1}f'(x+z)+\ldots+\frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x+z)+\varphi(z).$$

$\varphi(0)$ représentera la valeur commune de chacun des membres de l'équation (6). De plus, en différenciant par rapport à z la formule (15), on trouvera

$$(16) \qquad \varphi'(z)=-\frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+z),$$

et l'on en conclura

$$(17) \qquad \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}=-\frac{(h-\theta h)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+\theta h),$$

ou, parce que $\varphi(h)$ se réduit évidemment à zéro,

$$(18) \qquad \varphi(0)=\frac{(h-\theta h)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}hf^{(n)}(x+\theta h).$$

La valeur précédente de $\varphi(0)$ n'est autre chose que le reste de la série de Taylor,

présenté sous une nouvelle forme. Si, dans ce reste, on remplace x par o, et h par x, on obtiendra le reste de la série de Maclaurin sous la forme suivante :

(19) $$x\,\frac{(x-\theta x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,f^{(n)}(\theta x)\,.$$

Il suffit, dans plusieurs cas, de substituer ce dernier produit à l'expression (13), pour établir la formule (14). Supposons, par exemple,

(20) $$f(x)=(1+x)^{\mu}$$

μ désignant une constante réelle. Les expressions (13) et (19) deviendront respectivement

(21) $$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}\,x^{n}(1+\theta x)^{\mu-n}$$

et

(22) $$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}\,x^{n}(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{\mu-n}\,.$$

Cela posé, on prouvera facilement, 1.° à l'aide de l'expression (21), que l'équation

(23) $$(1+x)^{\mu}=1+\frac{\mu}{1}\,x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2.}\,x^{2}+\text{etc.}\ldots$$

subsiste quand la valeur numérique du rapport

(24) $$\frac{x}{1+\theta x}$$

est inférieure à l'unité; 2.° à l'aide de l'expression (22), que l'équation (23) subsiste quand le produit

(25) $$x\,\frac{1-\theta}{1+\theta x}$$

est compris entre les limites -1 et 1. Par suite, il suffira d'employer l'expression (21) pour établir la formule (23) entre les limites $x=0$, $x=1$. Mais il faudra recourir à l'expression (22), si l'on veut étendre la même formule à toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=-1$, $x=+1$.



SUR LA RÉSULTANTE

ET LES PROJECTIONS DE PLUSIEURS FORCES

APPLIQUÉES A UN SEUL POINT.

Si l'on suppose à l'ordinaire une force représentée par une longueur portée à partir de son point d'application sur la droite suivant laquelle elle agit, la résultante R de deux forces P, Q simultanément appliquées à un point matériel (A), sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces. Cette proposition à déjà été démontrée de plusieurs manières. Mais, parmi les démonstrations qu'on en a données, les unes exigent que l'on considère de nouveaux points matériels liés au point (A) par des droites rigides et invariables. D'autres sont fondées sur l'emploi du calcul différentiel ou des fonctions dérivées. D'autres enfin sont déduites des relations qui existent entre les cosinus de certains angles. Je vais ici démontrer la même proposition, sans recourir à ces considérations diverses; et, pour y parvenir, j'établirai successivement plusieurs lemmes que l'on peut énoncer comme il suit.

Lemme 1.er *Si l'on désigne par R la résultante des deux forces P,Q simultanément appliquées au point (A), et par x un nombre quelconque, la résultante de deux forces égales aux produits Px, Qx, et dirigées suivant les mêmes droites que les forces P,Q, sera représentée par le produit Rx, et dirigée suivant la même droite que la force R.*

Démonstration. Soit d'abord $x=\frac{m}{n}$, m et n désignant deux nombres entiers quelconques. On aura

$$Px=m\frac{P}{n}\quad,\quad Qx=m\frac{Q}{n}.$$

D'ailleurs on pourra considérer la composante P, ou $m\frac{P}{n}$, comme produite par l'addition de plusieurs forces égales à $\frac{P}{n}$, et la composante Q, ou $m\frac{Q}{n}$, comme produite par l'addition d'autant de forces égales à $\frac{Q}{n}$. Il est aisé d'en conclure que la

résultante des forces P, Q et la résultante des forces Px, Qy seront produites l'une et l'autre par l'addition de plusieurs forces égales à la résultante de $\frac{P}{n}$ et de $\frac{Q}{n}$. De plus il est clair que les deux premières résultantes seront à la dernière comme les nombres m et n sont à l'unité. Donc la seconde résultante sera équivalente à la première multipliée par le rapport $\frac{m}{n} = x$, c'est-à-dire au produit Rx.

Supposons en second lieu que le nombre x soit irrationnel. Alors on pourra faire varier les nombres entiers m et n de manière que la fraction $\frac{m}{n}$ converge vers la limite x; et il est clair que dans ce cas la résultante des forces $\frac{mP}{n}$, $\frac{mQ}{n}$, toujours dirigée suivant la même droite, et toujours égale à $\frac{mR}{n}$, tendra de plus en plus à se confondre, en grandeur et en direction, avec la résultante des forces Px, Qx. Donc cette dernière résultante sera dirigée suivant la même droite que la force R, et elle aura pour mesure la limite du produit $\frac{mR}{n}$, c'est-à-dire le produit Rx.

Corollaire. Si l'on désigne par la notation $(\widehat{P,Q})$ l'angle compris entre les directions des deux forces P et Q, $(\widehat{P,R})$, $(\widehat{Q,R})$ seront les angles compris entre les directions des composantes P, Q et de leur résultante R. Cela posé, si l'on fait successivement $Rx = P$, $Rx = Q$, ou, ce qui revient au même $x = \frac{P}{R}$, $x = \frac{Q}{R}$, on conclura du lemme précédent, 1.° que la force P peut être remplacée par deux composantes $\frac{P^2}{R}$ et $\frac{PQ}{R}$, qui forment avec elle des angles égaux à $(\widehat{P,R})$ et à $(\widehat{Q,R})$, 2.° que la force Q peut être remplacée par deux composantes $\frac{Q^2}{R}$ et $\frac{PQ}{R}$, qui forment avec elle les angles $(\widehat{Q,R})$ et $(\widehat{P,R})$.

Lemme 2. *La résultante R de deux forces P, Q qui se coupent à angles droits, est représentée en grandeur par la diagonale du rectangle construit sur les deux composantes, ensorte qu'on a*

$$R^2 = P^2 + Q^2 \tag{1}$$

Démonstration. Concevons que l'on remplace la force P par les deux composantes ci-dessus mentionnées, c'est-à-dire par deux forces $\frac{P^2}{R}$ et $\frac{PQ}{R}$, qui forment avec elle les angles $(\widehat{P,R})$ et $(\widehat{Q,R})$. Concevons de même que l'on remplace la force Q par

deux composantes $\frac{Q^2}{R}$ et $\frac{PQ}{R}$, qui forment avec elle les angles $(\widehat{Q,R})$ et $(\widehat{P,R})$. On pourra supposer que les forces $\frac{P^2}{R}$, $\frac{Q^2}{R}$ seront dirigées suivant la même droite que la résultante R, et alors les deux forces équivalentes à $\frac{PQ}{R}$ formeront chacune avec la direction de R un angle égal à $(\widehat{P,Q})$. Donc elles formeront entre elles un angle égal au double de $(\widehat{P,Q})$. Donc, puisque l'angle $(\widehat{P,Q})$ est droit par hypothèse, les forces équivalentes à $\frac{PQ}{R}$ seront égales, mais directement opposées. Par conséquent elles se feront équilibre, et les forces $\frac{P^2}{R}$, $\frac{Q^2}{R}$, dirigées suivant la même droite, pourront remplacer à elles seules les forces P, Q, ou leur résultante R. On aura donc l'équation

$$R = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R},$$

de laquelle on déduit immédiatement la formule (1).

Cette démonstration est due à l'auteur de la mécanique céleste.

Lemme 3. *La résultante R de deux forces P, Q qui se coupent à angles droits est représentée, non-seulement en grandeur, ainsi qu'on l'a prouvé ci-dessus, mais encore en direction par la diagonale du rectangle construit sur les deux composantes.*

Démonstration. Cette proposition est évidente, dans le cas où les forces P, Q sont égales entre elles. Alors la résultante R doit nécessairement diviser l'angle $(\widehat{P,Q})$ en deux parties égales, et l'on a, en vertu du lemme 2, $R^2 = 2P^2$, ou $R = P\sqrt{2}$.

Il est encore facile de démontrer le lemme 3, dans le cas où l'on suppose $Q^2 = P^2$, ou $Q = P\sqrt{2}$. En effet, considérons trois forces égales à P, dirigées suivant trois droites qui soient perpendiculaires l'une à l'autre. Ces trois forces seront représentées par trois arêtes d'un cube qui aboutiront à un même sommet. De plus, la résultante de deux de ces forces étant égale à $P\sqrt{2}$, et dirigée suivant la diagonale d'une des faces du cube, la résultante R des trois forces sera nécessairement comprise dans tout plan qui renfermera l'une des forces P et la diagonale du carré construit sur les deux autres. Or, il existe trois plans de cette espèce, et ces trois plans se coupent suivant la diagonale du cube. Donc la résultante des trois forces P, ou, ce qui revient au même, la résultante des forces P et $P\sqrt{2}$ qui se coupent à angles droits, sera dirigée suivant la diagonale du cube, laquelle est en même temps la diagonale du rectangle construit sur les forces P et $P\sqrt{2}$.

On prouverait absolument de la même manière que, si l'on désigne par m un nombre

entier, et si l'on suppose le lemme 3 démontré dans le cas ou l'on a $Q=P\sqrt{m}$, la résultante de trois forces respectivement équivalentes à

$$P,\ P,\ P\sqrt{m}$$

et représentées par trois droites perpendiculaires entre elles, sera dirigée suivant la diagonale du parallélipipède rectangle qui aura pour côtés ces mêmes droites. On en conclut que, dans l'hypothèse admise, le lemme 3 subsistera encore si l'on prend pour Q la résultante des forces P et $P\sqrt{m}$, c'est-à-dire si l'on fait $Q=P\sqrt{m+1}$. D'ailleurs le lemme 3 est évident, quand on a $Q=P$, ou, ce qui revient au même, $m=1$. Donc ce lemme subsistera encore, si l'on prend $Q=P\sqrt{1+1}=P\sqrt{2}$, ou $Q=P\sqrt{2+1}=P\sqrt{3}$, etc...., ou en général $Q=P\sqrt{m}$, m étant un nombre entier quelconque.

Concevons à présent que m et n désignant deux nombres entiers, on construise un parallélipipède rectangle qui ait pour côtés trois droites propres à représenter les trois forces

$$P,\ P\sqrt{m},\ P\sqrt{n}.$$

La résultante de ces trois forces sera évidemment comprise, 1.° dans le plan qui renferme la force $P\sqrt{n}$ et la diagonale $P\sqrt{m+1}$ du rectangle construit sur les forces $P, P\sqrt{m}$, 2.° dans le plan qui renferme la force $P\sqrt{m}$ et la diagonale $P\sqrt{n+1}$ du rectangle construit sur les forces $P, P\sqrt{n}$. Donc cette résultante sera dirigée suivant la diagonale du parallélipipède; et le plan, qui renferme la même résultante avec la force P, coupera le plan des deux forces $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$ suivant la diagonale du rectangle construit sur ces deux forces. Donc la résultante des forces $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$; qui doit être évidemment comprise dans le plan dont il s'agit, sera dirigée suivant cette dernière diagonale. Donc le lemme 3 subsistera, quand on remplacera les forces P et Q par deux forces égales à $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$, c'est-à-dire par deux forces dont les carrés soient entre eux dans le rapport de m à n. Donc le lemme 3 subsistera encore entre les forces P et Q, si l'on suppose $\frac{Q^2}{P^2}=\frac{m}{n}$, ou $Q=P\sqrt{\frac{m}{n}}$.

Soit maintenant $Q=Px$, x désignant un nombre quelconque. On pourra faire varier les nombres entiers m et n de manière que le rapport $\frac{m}{n}$ converge vers la limite x^2, et il est clair que, dans ce cas, la résultante des forces P et $P\sqrt{\frac{m}{n}}$, dirigées suivant deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, tendra de plus en plus à se confondre, en grandeur et en direction, d'une part avec la résultante des forces P, Px, et d'autre part avec la diagonale du rectangle construit sur ces deux forces. Donc la résultante des forces P, Px sera représentée par la diagonale dont il s'agit.

Corollaire 1.er Si la force R est représentée par la longueur $\overline{AB}$ portée à partir de son point d'application (A) sur la droite suivant laquelle elle agit, et si l'on mène par le point (A) deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, on pourra substituer à la force R les deux forces représentées en grandeur et en direction par les projections de la droite $\overline{AB}$ sur les deux axes.

Corollaire 2. Concevons maintenant que, deux forces P, Q étant appliquées à un même point (A), et représentées par deux droites $\overline{AB}, \overline{AC}$ qui forment entre elles un angle quelconque, on trace dans le plan de ces deux forces deux axes dont l'un coïncide avec la diagonale du parallélogramme auquel elles servent de côtés, et dont l'autre soit perpendiculaire à cette diagonale. On pourra substituer aux deux forces P, Q les quatre forces représentées en grandeur et en direction par les projections des droites $\overline{AB}, \overline{AC}$ sur les deux axes. Or, de ces quatre forces, deux étant directement opposées, se feront équilibre. Les deux autres, dirigées suivant la diagonale du parallélogramme, s'ajouteront et donneront pour somme une force représentée en grandeur et en direction par cette même diagonale. On peut donc énoncer la proposition suivante :

1.er Théorème. *La résultante R de deux forces P, Q simultanément appliquées à un point matériel (A), et dirigées d'une manière quelconque, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.*

Corollaire 1.er Comme la diagonale R du parallélogramme construit sur les deux forces P, Q est en même temps le troisième côté du triangle que l'on forme en menant par l'extrémité de la première force une droite égale et parallèle à la seconde, et que l'angle opposé dans ce triangle au côté R est le supplément de l'angle $(\widehat{P,Q})$, on a nécessairement, en vertu d'une formule connue de trigonométrie,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\widehat{P,Q}). \tag{2}$$

Corollaire 2. Dans le cas où les forces P, Q deviennent égales entre elles, leur résultante R est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du losange construit sur ces mêmes forces. Alors la formule (2) se réduit à

$$R^2 = 2P^2 \left\{ 1 + \cos(\widehat{P,Q}) \right\}. \tag{3}$$

De plus, si l'on suppose $(\widehat{P,R}) = \theta$, on trouvera dans le cas présent $(\widehat{P,Q}) = 2\theta$, et, comme on a généralement

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1, \tag{4}$$

l'équation (3) donnera $R=2P\cos\theta$, ou, ce qui revient au même

(5) $$R=2P\cos(\widehat{P,R}).$$

On peut au reste s'assurer directement que le second membre de la formule (5) représente la diagonale du losange construit sur deux forces égales à P.

Il est facile de démontrer le théorème 1.er, pour le cas où les forces P, Q ont entre elles un rapport quelconque, quand une fois on a établi ce théorème pour le cas où l'on a $Q=P$, c'est-à-dire quand on a établi la formule (5). Or, on peut donner de cette formule une démonstration directe, qui se déduit à la vérité de l'équation (4), mais qui paraît mériter d'être remarquée. Je vais l'exposer en peu de mots.

Admettons que la formule (5) soit vérifiée pour le cas où l'on a $(\widehat{P,R})=\tau$, τ désignant un angle droit ou un angle aigu. Je dis qu'elle subsistera encore si l'on suppose

$$(\widehat{P,R})=\frac{\tau}{2} \quad \text{ou} \quad (\widehat{P,R})=\frac{\pi}{2}-\frac{\tau}{2}.$$

En effet, dans ces deux hypothèses, l'angle $(\widehat{P,Q})$ compris entre les directions des deux forces égales P, Q sera équivalent à l'un des angles τ, $\pi-\tau$; et l'on prouvera, en raisonnant comme dans le lemme 2, que l'on peut substituer au système des deux forces P, Q ou à leur résultante R quatre composantes égales à $\frac{P^2}{R^2}$, parmi lesquelles deux seront dirigées suivant la même droite et dans le même sens que la force R, tandis que les deux autres formeront chacune avec la résultante R un angle équivalent à $(\widehat{P,Q})$, c'est-à-dire, à τ ou à $\pi-\tau$. Or, puisqu'on suppose la formule (5) vérifiée dans le cas où l'on a $(\widehat{P,R})=\tau$, les deux dernières composantes pourront évidemment être remplacées par une force unique égale à $2\frac{P^2}{R}\cos\tau$, et dirigée dans le sens de la résultante R, ou dans le sens opposé. Par conséquent on trouvera définitivement

$$R=2\frac{P^2}{R}\pm2\frac{P^2}{R}\cos\tau=2\frac{P^2}{R}(1\pm\cos\tau)\,;$$

ou

(6) $$R^2=2P^2(1\pm\cos\tau),$$

le signe $\pm$ devant être réduit au signe $+$, dans le cas où l'on aura $(\widehat{P,R})=\frac{\tau}{2}$, et au signe $-$ dans le cas où l'on aura $(\widehat{P,R})=\frac{\pi}{2}-\frac{\tau}{2}$. Comme on tirera d'ailleurs de la formule (4), en y posant successivement $\theta=\frac{\tau}{2}$ et $\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\tau}{2}$,

$$1+\cos\tau = 2\cos^2\frac{\tau}{2}\ ,\quad 1-\cos\tau = 2\cos^2\frac{\pi-\tau}{2},$$

l'équation (6) donnera dans le premier cas

$$R = 2\cos\frac{\tau}{2}\ ,$$

et dans le second

$$R = 2\cos\frac{\pi-\tau}{2}.$$

Donc, si l'équation (4) subsiste quand on attribue à l'angle $(\widehat{P,R})$ la valeur τ, elle subsistera encore quand on attribuera au même angle l'une des valeurs $\frac{\tau}{2}$, $\frac{\pi-\tau}{2}$.

Or, cette équation se vérifie quand on suppose $(\widehat{P,R}) = \frac{\pi}{2}$, puisqu'on a évidemment dans cette hypothèse $R = 0$, et $\cos(\widehat{P,R}) = 0$. Donc elle sera également vraie si l'on suppose

$$(\widehat{P,R}) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\ ,$$

et par suite, si l'on prend

$$(\widehat{P,R}) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ ,\quad \text{ou}\quad (\widehat{P,R}) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}\ .$$

Donc elle sera encore vraie, si l'on attribue à l'angle $(\widehat{P,R})$ l'une des valeurs

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{16}\ ,\quad \frac{1}{2}\frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{16}\ ,\quad \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = \frac{5\pi}{16}\ ,\quad \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{16}\right) = \frac{7\pi}{16}\ ,$$

etc.....

En continuant de même, on prouvera que la formule (5) a généralement lieu lorsque l'angle $(\widehat{P,R})$ reçoit une valeur de la forme $\frac{2m+1}{2^n}$, n désignant un nombre entier quelconque, et $2m+1$ un nombre impair inférieur à 2^n. Si maintenant on représente par θ un angle aigu pris à volonté, on pourra faire varier les nombres entiers m et n de manière que le rapport $\frac{2m+1}{2^n}$ s'approche indéfiniment de la limite θ; et la résultante R tendra de plus en plus à se confondre d'une part avec une force équivalente à $2P\cos\theta$, et d'autre part avec la résultante de deux forces égales à P, qui formeraient entre elles un angle double de θ. Donc cette dernière résultante sera représentée en grandeur par $2P\cos\theta$, et vérifiera encore la formule (5).

La construction géométrique qui sert à déterminer la résultante de deux forces P, Q, appliquées à un point matériel (A), peut être facilement étendue à la composition de plusieurs forces P, P', P''..... appliquées suivant des directions quelconques à ce point matériel. En effet, après avoir composé entre elles les forces P, P', on pourra composer de la même manière la résultante des forces P, P' avec la force P'', puis la résultante des forces P, P', P'', avec la force P''', etc..................... Pour obtenir la dernière de toutes les résultantes, ou, ce qui revient au même, la résultante de toutes les forces données, il suffira évidemment de mener, par l'extrémité de la droite qui représente la première force P, une seconde droite égale et parallèle à la force P'; par l'extrémité de cette seconde droite, une troisième droite égale et parallèle à la force P''; par l'extrémité de la troisième droite, une quatrième égale et parallèle à la force P''', etc... Si l'on joint ensuite le point matériel donné avec l'extrémité de la dernière droite, on obtiendra la résultante cherchée, qui se réduira, dans le cas de deux ou de trois forces, à la diagonale du parallélogramme ou du parallélipipède construit sur ces mêmes forces, et qui, dans le cas général, formera le dernier côté d'un polygone dont les autres côtés seront les forces données. La construction précédente subsiste, quelles que soient les directions des forces P, P', P''.... Si on l'applique au cas où ces forces sont dirigées suivant une même droite, les unes dans un sens, les autres en sens contraire, elle fournira une résultante égale à la somme des forces qui agissent dans un sens, moins la somme des forces qui agissent dans l'autre sens, et dirigée dans le sens des forces qui composent la plus grande somme. Ainsi, par exemple, pour obtenir la résultante de deux forces P, Q appliquées au point (A) et dirigées suivant la même droite, il suffira de porter sur cette droite, à partir du point (A), $\overline{AB} = P$, dans le sens de la première force; puis, à partir du point (B), $\overline{BD} = Q$, dans le sens de la seconde force. La force représentée en grandeur et en direction par la droite $\overline{AD}$, force évidemment égale à la valeur numérique de $P - Q$, et dirigée dans le sens de la plus grande des forces P, Q, sera précisément la résultante cherchée; ce qui s'accorde avec les principes relatifs à la composition des forces qui agissent suivant une même droite.

Pour terminer cet article, je vais rappeler ici quelques propriétés de la résultante de plusieurs forces; ce qui me fournira l'occasion de fixer le sens de certaines expressions dont je ferai dans la suite un fréquent usage.

Lorsqu'une force P, appliquée au point matériel (A), est représentée en grandeur et en direction, par une certaine longueur $\overline{AB}$ comprise entre le point (A) et le point (B), si l'on projette la longueur $\overline{AB}$ sur un plan ou sur une droite, la projection pourra être censée représenter en grandeur et en direction une nouvelle force dirigée de la projection du point (A) vers la projection du point (B). Cette nouvelle force est ce qu'on appelle la *projection* de la force donnée P sur le plan ou sur

la droite que l'on considère. Cela posé, concevons que, tous les points de l'espace étant rapportés à trois axes rectangulaires des x, y, z, on projette successivement la force P sur trois parallèles à ces trois axes menées par le point (A). Les trois projections seront évidemment les côtés d'un parallélipipède rectangle qui aura la force P pour diagonale; par conséquent, la force P sera la résultante des trois forces représentées par les projections dont il s'agit. Ces trois forces se nomment, pour cette raison, les *composantes rectangulaires* de la force donnée, parallèles aux axes. Comme les projections d'une longueur sur deux droites parallèles sont nécessairement égales, il est clair que les projections de la force P sur les axes mêmes des coordonnées doivent être égales en intensité à ses composantes rectangulaires. Lorsque la force P est dirigée suivant une droite comprise dans l'un des plans coordonnés, ou dans un plan parallèle, par exemple, dans le plan des x, y, cette force a seulement deux composantes rectangulaires, parallèles, l'une à l'axe des x, l'autre à l'axe des y, et se réduit à la diagonale du rectangle construit sur ces deux composantes.

Les définitions précédentes étant admises, concevons que plusieurs forces $P, P', P''\ldots$, dirigées dans l'espace d'une manière quelconque, soient appliquées simultanément au point matériel (A), et que l'on cherche, 1.° la résultante de ces forces, 2.° la résultante de leurs projections sur un plan fixe, 3.° celle de leurs projections sur un axe fixe. Pour obtenir ces trois résultantes, il faudra, d'après la règle énoncée plus haut, porter à la suite les unes des autres, à partir du point (A) ou de ses projections, 1.° des droites égales et parallèles aux forces $P, P', P''\ldots$; 2.° des droites égales et parallèles à leurs projections sur le plan fixe; 3.° des droites égales à leurs projections sur l'axe fixe, et dirigées dans les mêmes sens. En joignant le point A, ou sa projection, avec l'extrémité de la dernière droite, on obtiendra dans chaque cas la résultante cherchée. Or, les droites ainsi construites sur le plan ou sur l'axe fixe étant évidemment les projections des droites construites dans l'espace, on doit conclure que la résultante des projections des forces $P, P', P''\ldots$ sur ce plan ou sur cet axe est précisément la projection de la résultante de ces mêmes forces. On peut donc énoncer la proposition suivante.

2.° Théorème. *Plusieurs forces $P, P', P''\ldots$ étant appliquées à un même point, suivant des directions quelconques, si on les projette, ainsi que leur résultante R, sur un plan ou sur un axe donné, la projection de cette résultante ne sera autre chose que la résultante de leurs projections.*

Pour montrer une application de ce théorème, supposons que l'on projette à-la-fois, sur l'un des plans coordonnés, une force et ses trois composantes rectangulaires. Comme, parmi les projections de ces trois composantes, l'une s'évanouira, les deux autres projections, respectivement égales aux composantes qui leur correspondent, auront nécessairement pour résultante la projection de la force donnée.

Il ne reste plus qu'à traduire en analyse les résultats que nous venons d'obtenir. On y parviendra sans peine, en ayant égard aux observations suivantes.

Pour que l'effet d'une force soit complètement déterminé, il ne suffit pas de connaître son intensité, son point d'application, et la droite suivant laquelle elle agit. Il faut encore savoir dans quel sens elle est dirigée suivant cette droite, ou, en d'autres termes, quelle est sa *direction*. Car deux forces qui agissent suivant une même droite, peuvent être dirigées en sens contraires. Ainsi, l'on peut dire qu'une seule droite comprend deux directions différentes, et l'on n'obtient qu'une seule de ces deux directions, lorsqu'à partir d'un point donné on prolonge indéfiniment cette droite dans un sens déterminé.

Souvent on appelle *axe* une droite menée par un point quelconque de l'espace, et prolongée indéfiniment dans les deux sens. Nous dirons qu'un axe de cette espèce se divise en deux *demi-axes*, aboutissans au point que l'on considère, et dont chacun se prolonge indéfiniment dans un seul sens. Par conséquent, chacun de ces deux demi-axes aura toujours une direction déterminée. Si l'on considère trois axes rectangulaires des x, y et z, chacun d'eux sera divisé à l'origine en deux demi-axes, sur l'un desquels se compteront les coordonnées positives, tandis que l'on comptera sur l'autre les coordonnées négatives.

D'après ces définitions, il est clair que, si l'on tient compte seulement des angles qui renferment au plus 200 degrés (*nouvelle division*), deux axes ou deux droites, tracés de manière à se couper, formeront toujours l'un avec l'autre deux angles, l'un aigu, l'autre obtus, tandis que deux directions ou deux demi-axes, aboutissant à un point donné, formeront un seul angle, tantôt aigu, tantôt obtus. Lorsque deux directions ou deux demi-axes aboutiront à deux points différens de l'espace, ils seront censés former entre eux le même angle que formeraient deux demi-axes parallèles et prolongés dans les mêmes sens, à partir d'un point unique. Cela posé, l'angle que deux forces formeront entre elles sera toujours complètement déterminé, et l'on pourra en dire autant des angles formés par une force avec les demi-axes des coordonnées positives. Soient α, β, γ, ces trois angles pour une certaine force P, en sorte que

α désigne l'angle formé par la direction de cette force avec le demi-axe des x positives ;
β . . . . avec le demi-axe des y positives ;
γ . . . . avec le demi-axe des z positives.

Il est clair que la direction de la force P sera complètement déterminée, si l'on connaît son point d'application avec les trois angles α, β, γ. En effet, menez par le point d'application trois demi-axes parallèles à ceux des coordonnées positives, et construisez ensuite, autour de ces demi-axes, trois cônes droits dont les génératrices forment respectivement avec ces mêmes demi-axes les angles α, β, γ. La direction de la force P devra être celle d'une génératrice commune aux trois cônes. Or, il est bien vrai que les surfaces des deux premiers cônes se coupent suivant deux génératrices. Mais on doit observer que, ces deux génératrices formant avec le troisième demi-axe deux angles différens, l'un aigu, l'autre obtus, une seule se trouve comprise dans la surface du troisième cône.

Lorsque les angles α, β, γ, sont connus avec l'intensité de la force P, on en déduit encore les valeurs des composantes rectangulaires de la force, ou, en d'autres termes, ses projections sur les axes, et même le sens dans lequel chacune de ces projections est dirigée. Considérons, par exemple, la projection de la force P sur l'axe des x. Elle sera, d'après un théorème de trigonométrie, égale au produit de cette force par le cosinus de l'angle aigu qu'elle forme avec l'axe dont il s'agit. Or, la direction de la force P forme avec les deux demi-axes des x positives et des x négatives deux angles supplémens l'un de l'autre, dont le premier est représenté par α, et le second par $\pi-\alpha$. En conséquence, la projection de la force P sur l'axe des x se trouvera représentée, si l'angle α est aigu, par le produit. . . . . $P\cos\alpha$, et si l'angle α est obtus, par. . . . . $P\cos(\pi-\alpha)=-P\cos\alpha$, c'est-à-dire, dans les deux cas, par la valeur numérique du produit

$$P\cos\alpha.$$

Il est d'ailleurs évident que cette projection sera dirigée dans le sens des x positives, si l'angle α est aigu, dans le sens des x négatives si l'angle α est obtus, et que le produit $P\cos\alpha$ sera positif dans le premier cas, négatif dans le second. En résumé, le produit $P\cos\alpha$ sera équivalent à la projection de la force P sur l'axe des x, prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que cette projection sera dirigée dans le sens des x positives ou dans le sens des x négatives.

De même les produits $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$, seront respectivement égaux aux projections de la force P sur les axes des y et z, prises tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, suivant que chacune de ces projections sera dirigée dans le sens des coordonnées positives ou négatives.

Les trois produits

$$P\cos\alpha,\ P\cos\beta,\ P\cos\gamma,$$

dont on vient de montrer la signification, sont ce que nous appellerons désormais les *projections algébriques* de la force P sur les axes des x, des y et des z. Comme les valeurs numériques de ces trois produits représentent précisément les composantes rectangulaires de la force P, et que ces trois composantes sont les arêtes d'un parallélipipède rectangle qui a la force elle-même pour diagonale, il est clair que la somme des carrés de ces produits doit être égale au carré de P. On a donc

$$P^2=P^2\cos^2\alpha+P^2\cos^2\beta+P^2\cos^2\gamma.$$

On en conclut, en divisant P^2,

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma. \tag{7}$$

Cette dernière équation exprime, comme l'on sait, que α, β, γ, sont trois angles formés par une même droite avec les axes des coordonnées.

Considérons à présent plusieurs forces $P, P', P''...$ simultanément appliquées à un point matériel (A). Soit R leur résultante, et supposons que les forces

$$P, P', P''... R$$

forment respectivement, avec le demi-axe des x positives, les angles

$$\alpha, \alpha', \alpha''... a,$$

avec le demi-axe des y positives, les angles

$$\beta, \beta', \beta''.... b,$$

avec le demi-axe des z positives, les angles

$$\gamma, \gamma', \gamma''.... c.$$

Si l'on projette ces différentes forces sur l'axe des x, la projection de la résultante R, étant la résultante des projections des forces $P, P', P''...$, sera équivalente à la somme de ces dernières projections prises tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, suivant qu'elles seront dirigées dans le même sens ou dans le sens opposé. D'ailleurs, la somme ainsi obtenue sera évidemment égale, au signe près, à la somme des projections algébriques des forces $P, P', P''...$, c'est-à-dire, à

$$P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \text{etc.}...,$$

puisque, dans cette seconde somme, deux forces dont les projections sont dirigées en sens contraire, fournissent toujours deux termes de signes différens. Ajoutons que les deux sommes seront affectées du même signe ou de signes contraires, suivant que la projection de la résultante agira dans le sens des x positives ou dans le sens des x négatives. Cette projection étant elle-même égale au produit

$$R \cos a$$

pris avec le signe $+$ dans le premier cas, et avec le signe $-$ dans le second, on doit conclure que les deux quantités

$$R \cos a, \quad P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \text{etc.}...$$

auront non-seulement la même valeur numérique, mais encore le même signe. On trouvera donc

$$R \cos a = P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \text{etc.}...$$

En d'autres termes, *la projection algébrique de la résultante sur l'axe des* x *sera*

équivalente à la somme des projections algébriques des composantes sur cet axe. La même relation devant évidemment subsister entre les projections algébriques des forces

$$P, P', P'', \ldots R$$

sur les axes des x et des z, il est clair qu'à l'équation précédente on pourra joindre celles qui suivent :

$$R \cos b = P \cos\beta + P' \cos\beta' + P'' \cos\beta'' + \text{etc.}\ldots..$$
$$R \cos c = P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + \text{etc.}\ldots..$$

Lorsque les forces $P, P', P''\ldots\ldots$ sont connues en grandeur et en direction, les trois équations

$$(8)\quad \begin{cases} R \cos a = P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \ldots\ldots.., \\ R \cos b = P \cos\beta + P' \cos\beta' + P'' \cos\beta'' + \ldots\ldots.., \\ R \cos c = P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + \ldots\ldots.., \end{cases}$$

servent à déterminer immédiatement la grandeur et la direction de la résultante. En effet, on connaît alors les seconds membres des équations dont il s'agit, et si, pour abréger, on les désigne par

$$X, Y, Z,$$

on aura simplement

$$(9)\qquad R \cos a = X, \qquad R \cos b = Y, \qquad R \cos c = Z.$$

Or, on tire de ces dernières formules

$$R^2 (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) = X^2 + Y^2 + Z^2 ;$$

ou, parce que les angles a, b, c, sont assujettis à l'équation de condition $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$,

$$(10)\qquad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

On aura en conséquence

$$(11)\qquad R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}.$$

La valeur de R étant ainsi déterminée, on obtiendra les angles a, b, c, dont chacun renferme au plus 200 degrés, par le moyen des formules

$$(12)\qquad \cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

On voit par ces formules que les cosinus des angles cherchés seront positifs ou négatifs en même temps que les quantités X, Y, Z, qui leur correspondent respectivement. Par suite, les angles a, b, c, seront aigus ou obtus suivant que les quantités X, Y, Z, seront positives ou négatives.

Lorsque, dans la formule (10), on substitue pour X, Y, Z, leurs valeurs, en ayant égard aux équations de condition

(13) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\quad \cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'=1,\ \text{etc.}\ldots\ldots,$$
on trouve

(14) $$\begin{aligned} R^2 = {} & P^2+P'^2+P''^2+\text{etc.}\ldots\ldots \\ & +2PP'(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma') \\ & +2PP''(\cos\alpha\cos\alpha''+\cos\beta\cos\beta''+\cos\gamma\cos\gamma'') \\ & +\text{etc.}\ldots\ldots \\ & +2P'P''(\cos\alpha'\cos\alpha''+\cos\beta'\cos\beta''+\cos\gamma'\cos\gamma'') \\ & +\text{etc.}\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où la résultante R est formée seulement par la composition de deux forces P, P', l'équation précédente se réduit à

(15) $$R^2=P^2+P'^2+2PP'(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma').$$

Mais, en vertu de l'équation (5), on doit avoir aussi

(16) $$R^2=P^2+P'^2+2PP'\cos(\widehat{P,P'}),$$

la notation $(\widehat{P,P'})$ désignant l'angle compris entre les directions des deux forces. Les deux valeurs précédentes de R^2 devant être égales, on en conclut

(17) $$\cos(\widehat{P,P'})=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'.$$

Par conséquent, *pour obtenir le cosinus de l'angle compris entre deux directions, il suffit de multiplier deux à deux les cosinus des angles que ces mêmes directions forment avec les demi-axes des coordonnées positives, et d'ajouter les produits.* On se trouvera ainsi ramené à un théorème connu d'analyse appliquée. En vertu de ce théorème, on aura encore, dans le cas général, et quel que soit le nombre des forces $P, P', P''\ldots,$

$$\cos(\widehat{P,P''})=\cos\alpha\cos\alpha''+\cos\beta\cos\beta''+\cos\gamma\cos\gamma'',$$
etc.....

$$\cos(\widehat{P',P''})=\cos\alpha'\cos\alpha''+\cos\beta'\cos\beta''+\cos\gamma'\cos\gamma'',$$
etc.....

Par suite, l'équation (14) deviendra simplement

$$(18)\; R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + .. + 2PP'\cos(\widehat{P,P'}) + 2PP''\cos(\widehat{P,P''}) + .. + 2P'P''\cos(\widehat{P',P''}) + \text{etc.}$$

Ainsi, *le carré de la résultante de plusieurs forces est égal à la somme des carrés des composantes, plus à la somme de leurs doubles produits respectivement multipliés par les cosinus des angles compris entre les directions de ces mêmes forces comparées deux à deux.*

Les composantes rectangulaires de la résultante R, ou ses projections sur les axes des x, y, z, étant précisément égales aux valeurs numériques des quantités X, Y, Z, il est facile d'en conclure que les projections de cette résultante sur les plans coordonnés respectivement perpendiculaires aux mêmes axes, c'est-à-dire, sur les plans des y, z, des z, x et des x, y, seront représentées par les expressions

$$\sqrt{(Y^2+Z^2)}, \quad \sqrt{(Z^2+X^2)}, \quad \sqrt{(X^2+Y^2)}.$$

Nous venons de rappeler celles des propriétés des résultantes qui sont relatives aux projections. Dans un autre article, nous examinerons les propriétés relatives aux moments, et nous développerons, à ce sujet, la théorie des moments linéaires.



APPLICATION DU CALCUL DES RÉSIDUS

A LA SOMMATION DE PLUSIEURS SUITES.

Soient $f(x,z)$, $F(x,z)$ deux fonctions données des variables x, z, et n un nombre entier quelconque. Supposons d'ailleurs qu'après avoir développé le produit

$$[f(x,z)+f(z,x)]^n F(x,z)$$

à l'aide de la formule du binome, on différencie n fois, chacun des termes du développement, savoir : le premier terme n fois par rapport à x, le second terme $n-1$ fois par rapport à x et une fois par rapport à z, le troisième terme $n-2$ fois par rapport à x et deux fois par rapport à z, etc....., enfin le dernier terme n fois par rapport à z. Alors, en faisant, pour abréger,

$$(1) \qquad f(x,z)=u, \qquad f(z,x)=v, \qquad F(x,z)=w,$$

on obtiendra la suite

$$(2) \qquad \frac{d^n(u^n w)}{dx^n},\ \frac{n}{1}\,\frac{d^n(u^{n-1}vw)}{dx^{n-1}dz},\ \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^n(u^{n-2}v^2w)}{dx^{n-2}dz^2},\ \text{etc....}\ \frac{d^n(v^n w)}{dz^n},$$

dont on ne connait pas la somme. Toutefois le calcul des résidus fournit le moyen de déterminer facilement cette somme, dans le cas où l'on suppose après les différenciations $z=x$. C'est ce que nous allons expliquer en peu de mots.

Soit s une valeur commune attribuée aux variables x, z, et S la valeur correspondante de la somme des termes qui composent la suite (2); ensorte qu'on ait

$$(3) \qquad S=\frac{d^n(u^n w)}{dx^n}+\frac{n}{1}\,\frac{d^n(u^{n-1}vw)}{dx^{n-1}dz)}+\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^n(u^{n-2}v^2w)}{dx^{n-2}dz^2}+\ldots+\frac{d^n(v^n w)}{dz^n},$$

dans le cas où l'on suppose, après les différenciations $z=x=s$. La formule (28) de la page (16) entraînera l'équation

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots(n-m)}\,\frac{d^n(u^m v^{n-m}w)}{dx^m dz^{n-m}}=\mathcal{E}\mathcal{E}\,\frac{u^m v^{n-m} w}{((\,(x-s)^{m+1}))\ ((\,(z-s)^{n-m+1}))},$$

dans laquelle les deux signes $\mathcal{E}$ sont relatifs, l'un à la variable x, l'autre à la variable z; et par conséquent la formule (3) pourra être remplacée par la suivante

$$(4)\quad S=1.2.3\ldots n\left\{\begin{array}{l}\mathcal{E}\mathcal{E}\dfrac{u^n\varpi}{((\,(x-s)^{n+1}))\,((z-s))}+\mathcal{E}\mathcal{E}\dfrac{u^{n-1}v\varpi}{((\,(x-s)^{n}))\,((\,(z-s)^{2}))}+\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\mathcal{E}\mathcal{E}\dfrac{v^n\varpi}{((x-s))\,((\,(z-s)^{n+1}))}\end{array}\right\}$$

Comme on a d'ailleurs

$$\frac{u^n}{(x-s)^{n+1}(z-s)}+\frac{u^{n-1}v}{(x-s)^n(z-s)^2}+\ldots+\frac{v^n}{(x-s)(z-s)^{n+1}}=\frac{1}{(x-s)^{n+1}(z-s)^{n+1}}\,\frac{u^{n+1}(z-s)^{n+1}-v^{n+1}(x-s)^{n+1}}{u(z-s)-v(x-s)},$$

on tirera de la formule (4)

$$(5)\quad S=1.2.3\ldots n\,\mathcal{E}\mathcal{E}\,\frac{\varpi u^{n+1}(z-s)^{n+1}-\varpi v^{n+1}(x-s)^{n+1}}{u(z-s)-v(x-s)}\,\frac{1}{((\,(x-s)^{n+1}))\,((\,(z-s)^{n+1}))}.$$

Faisons maintenant, pour plus de commodité,

$$(6)\qquad \frac{df(x,z)}{dx}=\varphi(x,z),\qquad \frac{df(x,z)}{dz}=\chi(x,z).$$

Si, dans l'expression

$$(7)\qquad \frac{\varpi u^{n+1}}{u(z-s)-v(x-s)}=\frac{[f(x,z)]^{n+1}F(x,z)}{(z-s)f(x,z)-(x-s)f(z,x)},$$

on considère z comme seule variable, cette expression représentera une fonction de z, qui deviendra infinie pour $z=x$, et dont le résidu, relatif à la valeur x de la variable z, sera

$$(8)\qquad \frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}.$$

Or, si, après avoir divisé ce résidu par $z-x$, on désigne par $\varpi(x,z)$ la différence entre l'expression (7) et le quotient obtenu, ou, en d'autres termes, si l'on pose

$$(9)\quad \frac{\varpi u^{n+1}}{u(z-s)-v(x-s)}=\frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}\,\frac{1}{z-x}+\varpi(x,z),$$

la fonction $\varpi(x,z)$, en vertu des principes établis dans un précédent article [pag. 21

et 22], conservera une valeur finie pour $z=x$, quel que soit x, et par conséquent pour $z=x=s$. On formera de même l'équation

$$(10)\qquad \frac{wv^{n+1}}{u(z-s)-v(x-s)}=\frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}\frac{1}{z-x}+\psi(x,z)\ ,$$

$\psi(x,z)$ désignant encore une fonction qui conservera une valeur finie pour $z=x=s$; puis on tirera des équations (9) et (10) réunies à la formule (5)

$$(11)\quad S=1.2\ldots n\,\mathcal{E}\mathcal{E}\frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}\frac{1}{z-x}\frac{(z-s)^{n+1}-(x-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))\,(((z-s)^{n+1}))}$$

$$+1.2.3\ldots n\,\mathcal{E}\mathcal{E}\varpi(x,z)\frac{(z-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))\,(((z-s)^{n+1}))}$$

$$-1.2.3\ldots n\,\mathcal{E}\mathcal{E}\psi(x,z)\frac{(x-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))\,(((z-s)^{n+1}))}\ .$$

On aura d'ailleurs évidemment

$$(12)\qquad \mathcal{E}\varpi(x,z)\frac{(z-s)^{n+1}}{(((z-s)^{n+1}))}=0,\qquad \mathcal{E}\psi(x,z)\frac{(x-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))}=0,$$

$$(13)\qquad \mathcal{E}\frac{(z-s)^{n+1}-(x-s)^{n+1}}{z-x}\frac{1}{(((z-s)^{n+1}))}=1\ .$$

Par suite, la formule (11) donnera

$$(14)\qquad S=1.2.3\ldots n\,\mathcal{E}\frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}\frac{1}{(((x-s)^{n+1}))}\ ,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(15)\qquad S=\frac{d^n\left\{\frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}\right\}}{dx^n}\ ,$$

pourvu que l'on suppose, après les différenciations $x=s$. Enfin, si l'on remplace dans la formule (15) la lettre s par la lettre z, et la lettre S par le second membre de l'équation (3), on obtiendra la formule

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^n(u^n w)}{dx^n} + \frac{n}{1}\,\frac{d^n(u^{n-1} v w)}{dx^{n-1}dz} + \ldots + \frac{n}{1}\,\frac{d^n(u v^{n-1} w)}{dx\,dz^{n-1}} + \frac{d^n(v^n w)}{dz^n} \\ &\qquad = \frac{d^n\left\{\dfrac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-z)[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}\right\}}{dx^n}, \end{aligned} \right.$$

qui subsiste toujours, quand on suppose, après les différenciations, $z=x$.

Pour montrer une application de la formule (16), désignons par

$$U,\quad V,\quad P,\quad Q,$$

quatre fonctions de la variable x, et par

$$\mathfrak{U},\quad \mathfrak{V},\quad \mathfrak{P},\quad \mathfrak{Q}$$

ce que deviennent ces mêmes fonctions, quand on y remplace la variable x par la variable z. Alors, en posant

$$(17)\qquad u=U\mathfrak{V},\qquad v=\mathfrak{U}V,\qquad w=P\mathfrak{Q},$$

et substituant, après les différenciations, la lettre z à la lettre x, on réduira le premier membre de la formule (16), d'abord au polynome

$$\begin{aligned} &\mathfrak{V}^n\mathfrak{Q}\,\frac{d^n(U^nP)}{dx^n} + \frac{n}{1}\,\frac{d(\mathfrak{U}\mathfrak{V}^{n-1}\mathfrak{Q})}{dz}\,\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VP)}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n}{1}\,\frac{d(UV^{n-1}P)}{dx}\,\frac{d^{n-1}(\mathfrak{U}^{n-1}\mathfrak{V}\mathfrak{Q})}{dz^{n-1}} + V^nP\,\frac{d^n(\mathfrak{U}^n\mathfrak{Q})}{dz^n}, \end{aligned}$$

qui renferme les deux variables x et z, puis au polynome

$$\begin{aligned} &V^nQ\,\frac{d^n(U^nP)}{dx^n} + \frac{n}{1}\,\frac{d(UV^{n-1}Q)}{dx}\,\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VP)}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n}{1}\,\frac{d(UV^{n-1}P)}{dx}\,\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VQ)}{dx^{n-1}} + V^nP\,\frac{d^n(U^nQ)}{dx^n}, \end{aligned}$$

qui renferme la seule variable x. Comme on aura d'ailleurs

$$\varphi(x,z) = \frac{du}{dx} = \mathfrak{V}\,\frac{dU}{dx},\qquad \chi(x,z) = \frac{du}{dz} = U\,\frac{d\mathfrak{V}}{dz},$$

et par suite

$$\varphi(x,x) = V\,\frac{dU}{dx},\qquad \chi(x,x) = U\,\frac{dV}{dx};$$

le second membre de la formule (18) se réduira évidemment à

$$\frac{d^n\left\{\dfrac{U^nV^nPQ}{1-(x-z)\left(\dfrac{1}{U}\dfrac{dU}{dx}-\dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{dx}\right)}\right\}}{dx^n}.$$

Par conséquent, la formule (16) donnera

$$(18)\quad\begin{cases} V^nQ\dfrac{d^n(U^nP)}{dx^n}+\dfrac{n}{1}\dfrac{d(UV^{n-1}Q)}{dx}\dfrac{d^{n-1}(U^{n-1}VP)}{dx^{n-1}}+\dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{d^2(U^2V^{n-2}Q)}{dx^2}\dfrac{d^{n-2}(U^{n-2}V^2P)}{dx^{n-2}}+\ldots \\ \ldots+\dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{d^2(U^2V^{n-2}P)}{dx^2}\dfrac{d^{n-2}(U^{n-2}V^2Q)}{dx^{n-2}}+\dfrac{n}{1}\dfrac{d(UV^{n-1}P)}{dx}\dfrac{d^{n-1}(U^{n-1}VQ)}{dx^{n-1}}+V^nP\dfrac{d^n(U^nQ)}{dx^n} \\ =\dfrac{d^n\left\{\dfrac{U^nV^nPQ}{1-(x-z)\left(\dfrac{1}{U}\dfrac{dU}{dx}-\dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{dx}\right)}\right\}}{dx^n}. \end{cases}$$

Cette dernière équation subsiste, quelles que soient les fonctions de x représentées par P, Q, U, V, pourvu que, dans le second membre, on suppose, après les différenciations, $z=x$.

Si, dans l'équation (18), on prend $U=1$, $V=1$, on obtiendra la formule connue

$$(19)\quad\begin{cases} Qd^nP+\dfrac{n}{1}dQ.d^{n-1}P+\dfrac{n(n-1)}{1.2}d^2Q.d^{n-2}P+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots+\dfrac{n(n-1)}{1.2}d^2P.d^{n-2}Q+\dfrac{n}{1}dP.d^{n-1}Q+Pd^nQ=d^n(PQ). \end{cases}$$

Si l'on supposait dans la même équation

$$U=W^{\alpha},\qquad V=W^{\beta},\qquad P=W^{\gamma},\qquad Q=W^{\delta},$$

W désignant une fonction de la variable x, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des exposants quelconques, alors, en faisant pour abréger

$$\alpha-\beta=a,\qquad n\alpha+\gamma=r,\qquad n\alpha+\delta=s,$$

on trouverait

$$(20)\quad\begin{cases} W^{s-na}\dfrac{d^n(W^r)}{dx^n}+\dfrac{n}{1}\dfrac{d(W^{s-(n-1)a})}{dx}\dfrac{d^{n-1}(W^{r-a})}{dx^{n-1}}+\dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{d^2(W^{s-(n-2)a})}{dx^2}\dfrac{d^{n-2}(W^{r-2a})}{dx^{n-2}}+\ldots \\ \ldots+\dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{d^2(W^{r-(n-2)a})}{dx^2}\dfrac{d^{n-2}(W^{s-2a})}{dx^{n-2}}+\dfrac{n}{1}\dfrac{d(W^{r-(n-1)a})}{dx}\dfrac{d^{n-1}(W^{s-a})}{dx^{n-1}}+W^{r-na}\dfrac{d^n(W^s)}{dx^n} \\ =\dfrac{d^n\left\{\dfrac{W^{r+s-na}}{1-a(x-z)\dfrac{1}{W}\dfrac{dW}{dx}}\right\}}{dx^n}. \end{cases}$$

On peut encore établir directement la formule (20), en posant dans l'équation (18)

$$U=1, \qquad V=W^{-1}, \qquad P=W^{r}, \qquad Q=W^{s}.$$

Concevons à présent que l'on prenne, dans la formule (20), $W=e^{x}$. Alors, en divisant les deux membres de cette formule par l'exponentielle

$$e^{(r+s-na)x},$$

on trouvera

$$r^n+\frac{n}{1}(r-a)^{n-1}[s-(n-1)a]+\frac{n(n-1)}{1.2}(r-2a)^{n-2}[s-(n-2)a]^2+\dots.$$

$$\dots+\frac{n(n-1)}{1.2}(s-2a)^{n-2}[r-(n-2)a]^2+\frac{n}{1}(s-a)^{n-1}[r-(n-1)a]+s^n$$

$$=e^{(r+s-na)x}\,\frac{d^n\{[1-a(x-z)]^{-1}e^{(r+s-na)z}\}}{dx^n};$$

puis, en ayant égard à l'équation (19), et posant, après les différenciations, $z=x$, on obtiendra la formule

$$(21)\quad\begin{cases} r^n+\frac{n}{1}(r-a)^{n-1}[s-(n-1)a]+\frac{n(n-1)}{1.2}(r-2a)^{n-2}[s-(n-2)a]^2+\dots. \\ \dots+\frac{n(n-1)}{1.2}(s-2a)^{n-2}[r-(n-2)a]^2+\frac{n}{1}(s-a)^{n-1}[r-(n-1)a]+s^n \\ =(r+s-na)^n+na(r+s-na)^{n-1}+n(n-1)a^2(r+s-na)^{n-2}\dots+1.2.3..na^n. \end{cases}$$

Si l'on fait dans cette dernière

$$r=ax, \qquad s=ay,$$

elle se réduira simplement à

$$(22)\quad\begin{cases} x^n+\frac{n}{1}(x-1)^{n-1}(y-n+1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n-2}(y-n+2)^2+\text{etc.}\dots\dots \\ \dots\dots\dots+\frac{n(n-1)}{1.2}(y-2)^{n-2}(x-n+2)^2+\frac{n}{1}(x-1)^{n-1}(y-n+1)+y^n \\ =(x+y-n)^n+n(x+y-n)^{n-1}+n(n-1)(x+y-n)^{n-2}+\dots+1.2.3\dots n. \end{cases}$$

L'équation (22) mérite d'être remarquée. Lorsqu'on y suppose $x+y=n$, elle reproduit la formule connue

$$(23)\qquad x^n-\frac{n}{1}(x-1)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(x-2)^n-\dots\pm(x-n)^n=1.2.3\dots n.$$

Si l'on supposait au contraire $x+y=n+1$, on trouverait

$$(24)\begin{cases} x^n - \frac{n}{1}(x-1)^{n-1}(x-2) + \frac{n(n-1)}{1.2}(x-2)^{n-2}(x-3)^2 - \ldots \pm (x-n-1)^n \\ = 1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1.2.3\ldots\ldots n. \end{cases}$$

Concevons encore que, dans la formule (20), on pose $W = x$. On en tirera, en divisant les deux membres par $x^{r+s-n(a+1)}$,

$$r(r-1)\ldots(r-n+1) + \frac{n}{1}(r-a)(r-a-1)\ldots(r-a-n+2)[s-(n-1)a] + \text{etc}\ldots$$

$$\ldots + \frac{n}{1}(s-a)(s-a-1)\ldots(s-a-n+2)[r-(n-1)a] + s(s-1)\ldots(s-n+1)$$

$$= x^{-r-s+n(a+1)}\,\frac{d^n\left\{[az-(a-1)x]^{-1}x^{r+s-na+1}\right\}}{dx^n};$$

puis, en ayant égard à l'équation (19), et posant, après les différenciations $z = x$, on trouvera

$$(25)\begin{cases} r(r-1)\ldots(r-n+1) + \frac{n}{1}(r-a)(r-a-1)\ldots(r-a-n+2)[s-(n-1)a] + \text{etc}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n}{1}(s-a)(s-a-1)\ldots(s-a-n+2)[r-(n-1)a] + s(s-1)\ldots(s-n+1) \\ = (r+s-na+1)(r+s-na)\ldots(r+s-na-n+2) + n(a-1)(r+s-na+1)(r+s-na)\ldots(r+s-na-n+3) \\ + n(n-1)(a-1)^2(r+s-na+1)(r+s-na)\ldots(r+s-na-n+4) + \ldots\ldots + 1.2.3\ldots n(a-1)^n. \end{cases}$$

Si, dans l'équation (25), on prend

$$a = 1, \qquad r-n+1 = x, \qquad s-n+1 = y,$$

on obtiendra la formule connue :

$$(26)\begin{cases} x(x+1)\ldots(x+n-1) + \frac{n}{1}x(x+1)\ldots(x+n-2)y + \frac{n(n-1)}{1.2}x(x+1)\ldots(x+n-3)y(y+1) + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}x(x+1)y(y+1)\ldots(y+n-3) + \frac{n}{1}xy(y+1)\ldots(y+n-2) + y(y+1)\ldots(y+n-1) \\ = (x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1). \end{cases}$$

Si l'on fait au contraire

$$r = x, \qquad a = h+1, \qquad \text{et} \qquad s+r = na-1,$$

on trouvera

$$(27)\begin{cases} x(x-1)\ldots\ldots(x-n+1) - \frac{n}{1}(x-h)(x-h-1)\ldots\ldots(x-h-n+1) \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}(x-2h)(x-2h-1)\ldots(x-2h-n+1) - \ldots \pm (x-nh)(x-nh-1)\ldots(x-nh-n-1) \\ = 1.2.3\ldots n.h^n. \end{cases}$$

Cette dernière formule peut être facilement établie par le calcul aux différences finies, et ne diffère pas de l'équation

$$(28)\qquad \Delta^n\left\{(x-nh)(x-nh-1)\ldots(x-nh-n+1)\right\}=1.2.3\ldots n.\,\Delta x^n,$$

qui suppose seulement $\Delta x=h$.

Revenons à l'équation (18). Si, dans cette équation l'on remplace

$$P \text{ par } \frac{P}{V^n},\quad Q \text{ par } \frac{Q}{V^n} \quad\text{et}\quad U \text{ par } VW,$$

on aura simplement

$$(29)\quad\left\{\begin{array}{l} Q\dfrac{d^n(W^nP)}{dx^n}+\dfrac{n}{1}\dfrac{d(WQ)}{dx}\dfrac{d^{n-1}(W^{n-1}P)}{dx^{n-1}}+\dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{d^2(W^2Q)}{dx^2}\dfrac{d^{n-2}(W^{n-2}P)}{dx^{n-2}}+\ldots \\ \ldots+\dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{d^2(W^2P)}{dx^2}\dfrac{d^{n-2}(W^{n-2}Q)}{dx^{n-2}}+\dfrac{n}{1}\dfrac{d(WP)}{dx}\dfrac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}}+P\dfrac{d^n(W^nQ)}{dx^n} \\ \qquad\qquad =\dfrac{d^n\left(\dfrac{PQW^n}{1-(x-z)\dfrac{dW}{W\,dx}}\right)}{dx^n}. \end{array}\right.$$

Concevons maintenant que, s désignant une quantité quelconque, et R une fonction de la variable x, on prenne

$$(30)\qquad P=R\left\{1-(x-s)\frac{dW}{W\,dx}\right\}.$$

Rien n'empêchera de supposer, après les différenciations $s=x$, ou, ce qui revient au même, de supposer, avant les différenciations, $s=z$. Or, dans cette hypothèse, l'équation (29) donnera

$$(31)\qquad \frac{d^n(QRW^n)}{dx^n}=$$

$$Q\frac{d^n(W^nR)}{dx^n}+\frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}\frac{d^{n-1}(W^{n-1}R)}{dx^{n-1}}+\ldots+\frac{n}{1}\frac{d(WR)}{dx}\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}}+R\frac{d^n(W^nQ)}{dx^n}$$

$$-Q\frac{d^n\left\{(x-z)W^{n-1}R\dfrac{dW}{dx}\right\}}{dx^n}-\frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}\frac{d^{n-1}\left\{(x-z)W^{n-2}R\dfrac{dW}{dx}\right\}}{dx^{n-1}}-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-\frac{n}{1}\frac{d(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}}\frac{d\left\{(x-z)R\dfrac{dW}{dx}\right\}}{dx},$$

z devant être réduit à x, après les différenciations. D'ailleurs on a généralement, sous cette condition, en vertu de la formule (19),

$$\frac{d^m\{(x-z)f(x)\}}{dx^m}=m\frac{d^{m-1}f(x)}{dx^{m-1}};$$

et par conséquent

$$\frac{d^m(W^mR)}{dx^m}-\frac{d^m\left\{(x-z)W^{m-1}R\frac{dW}{dx}\right\}}{dx^m}=\frac{d^m(W^mR)}{dx^m}-m\frac{d^{m-1}\left\{W^{m-1}R\frac{dW}{dx}\right\}}{dx^{m-1}}$$
$$=\frac{d^{m-1}(W^mR')}{dx},$$

R' désignant la dérivée de R par rapport à x. Donc l'équation (31) pourra ê réduite à

(32) $$\frac{d^n(QRW^n)}{dx^n}=$$
$$Q\frac{d^{n-1}(W^nR')}{dx^{n-1}}+\frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{n}{1}WR'\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}}+R\frac{d^n(W^nQ}{dx^n}$$

Si, dans cette dernière, on échange entre elles les lettres Q et R, on aura enc

(33) $$\frac{d^n(QRW^n)}{dx^n}=$$
$$Q\frac{d^n(W^nR)}{dx^n}+\frac{n}{1}WQ'\frac{d^{n-1}(W^{n-1}R)}{dx^{n-1}}+\ldots+\frac{n}{1}\frac{d(WR)}{dx}\frac{d^{n-2}(W^{n-1}Q')}{dx^{n-2}}+R\frac{d^{n-1}(W^nQ}{dx^{n-1}}$$

Enfin, si l'on remplace, dans l'équation (32), Q par QW' et n par n — on en tirera

(34) $$\frac{d^{n-1}(QRW^{n-1}W')}{dx^{n-1}}=$$
$$QW'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{n-1}{1}WR'\frac{d^{n-2}(W^{n-2}QW')}{dx^{n-2}}+R\frac{d^{n-1}(W^{n-1}QW')}{dx^{n-1}};$$

puis, en retranchant de l'équation (32) la formule (34) multipliée par n, on tro vera

(35) $$\frac{d^{n-1}\left\{W^n\frac{d(QR)}{dx}\right\}}{dx^{n-1}}=$$
$$Q\frac{d^{n-1}(W^nR')}{dx^{n-1}}+\frac{n}{1}WQ'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d(W^2Q')}{dx}\frac{d^{n-3}(W^{n-2}R')}{dx^{n-3}}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d(W^2R')}{dx}\frac{d^{n-3}(W^{n-2}Q')}{dx^{n-3}}+\frac{n}{1}WR'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}Q')}{dx^{n-2}}+R\frac{d^{n-1}(W^nQ'}{dx^{n}}$$

On peut vérifier directement ces diverses formules, pour des valeurs particulières attribuées au nombre entier n, par exemple, pour les valeurs $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc.

Si, dans les équations (32) et (35), on pose

$$Q=e^{rx}, \qquad R=e^{sx}, \qquad W=e^{x};$$

on en tirera

$$(36) \qquad \frac{(r+s+n)^n-(r+n)^n}{s}=$$

$$(s+n)^{n-1}+\frac{n}{1}(r+1)(s+n-1)^{n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)^2(s+n-2)^{n-3}+\ldots+\frac{n}{1}(r+n-1)^{n-1},$$

et

$$(37) \qquad \frac{(r+s)(r+s+n)^{n-1}-r(r+n)^{n-1}-s(s+n)^{n-1}}{rs}=$$

$$\frac{n}{1}(s+n-1)^{n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)(s+n-2)^{n-3}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}(s+2)(r+n-2)^{n-3}+\frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2};$$

puis, en prenant $s=r$, on conclura de l'équation (37)

$$(38) \qquad 2\,\frac{(2r+n)^{n-1}-(r+n)^{n-1}}{r}=$$

$$\frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)(r+n-2)^{n-3}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}(r+n-2)^{n-3}(r+2)+\frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2}.$$

Si l'on fait maintenant $r=0$, on trouvera

$$(39) \qquad 2(n-1)n^{n-2}=\frac{n}{1}(n-1)^{n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}2^1(n-2)^{n-3}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n-3}2^1+\frac{n}{1}(n-1)^{n-2}.$$

Si l'on pose dans l'équation (35)

$$Q=x^r, \qquad R=x^s, \qquad W=x^a,$$

on en tirera

$$(40) \qquad \frac{(r+s)(r+s+an-n+1)..(r+s+an-1)-r(r+an-n+1)..(r+an-1)-s(s+an-+1)..(s+an-1)}{rs}=$$

$$\frac{n}{1}[s+(n-1)a-1]\ldots[s+(n-1)a-n+2]+\frac{n(n-1)}{1.2}[s+(n-2)a-1]\ldots[s+(n-2)a-n+3](r+2a-1)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}[r+(n-2)a-1]\ldots[r+(n-2)a-n+3](s+2a-1)+\frac{n}{1}[r+(n-1)a-1]\ldots[r+(n-1)a-n+2].$$

Lorsqu'on prend dans l'équation (40)

$$a=1, \qquad r=x, \qquad s=y;$$

on retrouve la formule (26)

$$\frac{d^m\{(x-z)f(x)\}}{dx^m}=m\frac{d^{m-1}f(x)}{dx^{m-1}};$$

et par conséquent

$$\frac{d^m(W^mR)}{dx^m}-\frac{d^m\left\{(x-z)W^{m-1}R\frac{dW}{dx}\right\}}{dx^m}=\frac{d^m(W^mR)}{dx^m}-m\frac{d^{m-1}\{W^{m-}}{dx^m}$$

$$=\frac{d^{m-1}(W^mR')}{dx},$$

R' désignant la dérivée de R par rapport à x. Donc l'équation (3
réduite à

(32) $$\frac{d^n(QRW^n)}{dx^n}=$$

$$Q\frac{d^{n-1}(W^nR')}{dx^{n-1}}+\frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{n}{1}WR'\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}}-$$

Si, dans cette dernière, on échange entre elles les lettres Q et R,

(33) $$\frac{d^n(QRW^n)}{dx^n}=$$

$$Q\frac{d^n(W^nR)}{dx^n}+\frac{n}{1}WQ'\frac{d^{n-1}(W^{n-1}R)}{dx^{n-1}}+\ldots+\frac{n}{1}\frac{d(WR)}{dx}\frac{d^{n-2}(W^{n-1}Q')}{dx^{n-2}}+R$$

Enfin, si l'on remplace, dans l'équation (32), Q par QW' et n
on en tirera

(34) $$\frac{d^{n-1}(QRW^{n-1}W')}{dx^{n-1}}=$$

$$QW'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{n-1}{1}WR'\frac{d^{n-2}(W^{n-2}QW')}{dx^{n-2}}+R\frac{d^{n-}}{}$$

puis, en retranchant de l'équation (32) la formule (34) mo
vera

(35) $$\frac{d^{n-1}\left\{W^n\frac{d(QR)}{dx}\right\}}{dx^{n-1}}$$

$$Q\frac{d^{n-1}(W^nR')}{dx^{n-1}}+\frac{n}{1}WQ'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}}+\frac{n(n-}{}$$

$$\ldots\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d(W^2R')}{dx}\frac{d^{n-3}(W^{n-2}Q'}{dx^{n-3}}$$

$$\frac{d^m\{(x-z)f(x)\}}{dx^m}=m\frac{d^{m-1}f(x)}{dx^{m-1}};$$

et par conséquent

$$\frac{d^m(W^mR)}{dx^m}-\frac{d^m\left\{(x-z)W^{m-1}R\frac{dW}{dx}\right\}}{dx^m}=\frac{d^m(W^mR)}{dx^m}-m\frac{d^{m-1}\left\{W^{m-1}R\frac{dW}{dx}\right\}}{dx^{m-1}}$$

$$=\frac{d^{m-1}(W^mR')}{dx},$$

R' désignant la dérivée de R par rapport à x. Donc l'équation (31) pourra être réduite à

(32) $$\frac{d^n(QRW^n)}{dx^n}=$$

$$Q\frac{d^{n-1}(W^nR')}{dx^{n-1}}+\frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{n}{1}WR'\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}}+R\frac{d^n(W^nQ)}{dx^n}.$$

Si, dans cette dernière, on échange entre elles les lettres Q et R, on aura encore

(33) $$\frac{d^n(QRW^n)}{dx^n}=$$

$$Q\frac{d^n(W^nR)}{dx^n}+\frac{n}{1}WQ'\frac{d^{n-1}(W^{n-1}R)}{dx^{n-1}}+\ldots+\frac{n}{1}\frac{d(WR)}{dx}\frac{d^{n-2}(W^{n-1}Q')}{dx^{n-2}}+R\frac{d^{n-1}(W^nQ')}{dx^{n-1}}.$$

Enfin, si l'on remplace, dans l'équation (32), Q par QW' et n par $n-1$, on en tirera

(34) $$\frac{d^{n-1}(QRW^{n-1}W')}{dx^{n-1}}=$$

$$QW'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{n-1}{1}WR'\frac{d^{n-2}(W^{n-2}QW')}{dx^{n-2}}+R\frac{d^{n-1}(W^{n-1}QW')}{dx^{n-1}};$$

puis, en retranchant de l'équation (32) la formule (34) multipliée par n, on trouvera

(35) $$\frac{d^{n-1}\left\{W^n\frac{d(QR)}{dx}\right\}}{dx^{n-1}}=$$

$$Q\frac{d^{n-1}(W^nR')}{dx^{n-1}}+\frac{n}{1}WQ'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d(W^2Q')}{dx}\frac{d^{n-3}(W^{n-2}R')}{dx^{n-3}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d(W^2R')}{dx}\frac{d^{n-3}(W^{n-2}Q')}{dx^{n-3}}+\frac{n}{1}WR'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}Q')}{dx^{n-2}}+R\frac{d^{n-1}(W^nQ')}{dx^n}.$$

On peut vérifier directement ces diverses formules, pour des valeurs particulières attribuées au nombre entier n, par exemple, pour les valeurs $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc.

Si, dans les équations (32) et (35), on pose

$$Q=e^{rx}, \quad R=e^{sx}, \quad W=e^{x};$$

on en tirera

(36) $$\frac{(r+s+n)^n-(r+n)^n}{s}=$$

$$(s+n)^{n-1}+\frac{n}{1}(r+1)(s+n-1)^{n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)^2(s+n-2)^{n-3}+\ldots+\frac{n}{1}(r+n-1)^{n-1},$$

et

(37) $$\frac{(r+s)(r+s+n)^{n-1}-r(r+n)^{n-1}-s(s+n)^{n-1}}{rs}=$$

$$\frac{n}{1}(s+n-1)^{n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)(s+n-2)^{n-3}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}(s+2)(r+n-2)^{n-3}+\frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2};$$

puis, en prenant $s=r$, on conclura de l'équation (37)

(38) $$2\,\frac{(2r+n)^{n-1}-(r+n)^{n-1}}{r}=$$

$$\frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)(r+n-2)^{n-3}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}(r+n-2)^{n-3}(r+2)+\frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2}.$$

Si l'on fait maintenant $r=0$, on trouvera

(39) $$2(n-1)n^{n-2}=\frac{n}{1}(n-1)^{n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}2^1(n-2)^{n-3}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n-3}2^1+\frac{n}{1}(n-1)^{n-2}.$$

Si l'on pose dans l'équation (35)

$$Q=x^r, \quad R=x^s, \quad W=x^a,$$

on en tirera

(40) $$\frac{(r+s)(r+s+an-n+1)..(r+s+an-1)-r(r+an-n+1)..(r+an-1)-s(s+an-n+1)..(s+an-1)}{rs}=$$

$$\frac{n}{1}[s+(n-1)a-1]\ldots[s+(n-1)a-n+2]+\frac{n(n-1)}{1.2}[s+(n-2)a-1]\ldots[s+(n-2)a-n+3](r+2a-1)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}[r+(n-2)a-1]\ldots[r+(n-2)a-n+3](s+2a-1)+\frac{n}{1}[r+(n-1)a-1]\ldots[r+(n-1)a-n+2].$$

Lorsqu'on prend dans l'équation (40)

$$a=1, \quad r=x, \quad s=y,$$

on retrouve la formule (26)

s désignant une quantité positive, on tirera facilement de la formule (3) les valeurs des intégrales

$$(13)\quad \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} \cos t\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx,\quad \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} \sin t\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx,$$

et par suite, les valeurs des intégrales

$$(14)\quad \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} \cos t\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx,\quad \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} \sin t\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx.$$

On parviendra de cette manière à des résultats que l'on peut déduire directement de l'équation (12), en y remplaçant s par $s+t\sqrt{-1}$.

Corollaire 3.° Si l'on pose

$$f(x^2) = e^{-sx^2} \cos tx,$$

s désignant toujours une quantité positive, on aura

$$(15)\quad A_0 = \int_0^\infty e^{-sx^2} \cos tx.dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2s^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{t^2}{4s}},$$

$$(16)\quad A_{2m} = \int_0^\infty x^{2m} e^{-sx^2} \cos tx.dx = (-1)^m \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2s^{\frac{1}{2}}} \frac{d^{2m} e^{-\frac{t^2}{4s}}}{dt^{2m}},$$

$$(17)\quad B_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} \cos tx.dx = e^{2s} \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} \cos tx.dx,$$

et par suite, la formule (3) donnera

$$(18)\quad \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} \cos tx.dx =$$

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2s^{\frac{1}{2}}} e^{-2s} \left\{ e^{-\frac{t^2}{4s}} - \frac{(n+1)n}{1.2} \frac{d^2 e^{-\frac{t^2}{4s}}}{dt^2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4} \frac{d^4 e^{-\frac{t^2}{4s}}}{dt^4} - \text{etc.}\ldots \right\}.$$

Si, après avoir effectué les différenciations indiquées dans le second membre de la formule précédente, on pose $t=0$, on retrouvera, comme on devait s'y attendre, l'équation (12).

SUR UN NOUVEAU GENRE D'INTÉGRALES.

Dans le mémoire déjà cité [page 54], et relatif à la conversion des différences finies des puissances en intégrales définies, j'ai considéré un nouveau genre d'intégrales que j'ai désignées sous le nom d'intégrales extraordinaires, et qui ont quelques rapports avec le calcul des résidus. Je vais indiquer ici en peu de mots leur nature et leurs principales propriétés.

Soient $\mathrm{f}(x)$ une fonction de la variable x, qui ne s'évanouisse pas avec cette variable, r et h deux quantités réelles, dont la première reste positive, et n le plus grand nombre entier compris dans $r+1$. L'intégrale

$$\int_0^h \frac{\mathrm{f}(x)}{x^{r+1}}\,dx \tag{1}$$

aura nécéessairement une valeur infinie. Mais, si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(x) &= \mathrm{f}(0)+\frac{x}{1}\mathrm{f}'(0)+\frac{x^2}{1.2}\mathrm{f}''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\mathrm{f}^{(n-1)}(0) \\ &= x^n \mathcal{E}\,\frac{\mathrm{f}(z)}{x-z}\,\frac{1}{((z^n))}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

l'intégrale

$$\int_0^h \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{F}(x)}{x^{r+1}}\,dx \tag{3}$$

obtiendra en général une valeur finie; et de plus on reconnaîtra facilement que le seul moyen de rendre finie la valeur de l'intégrale (3), en prenant pour $\mathrm{F}(x)$ une fonction rationnelle et entière de la variable x, est de supposer $\mathrm{F}(x)$ déterminée par le moyen de l'équation (2). Si l'on adopte cette hypothèse, l'intégrale (3) deviendra

$$\int_0^h \left\{\frac{\mathrm{f}(x)}{x^n} - \mathcal{E}\,\frac{\mathrm{f}(z)}{x-z}\,\frac{1}{((z^n))}\right\}\frac{dx}{x^{r-n+1}}. \tag{4}$$

Une seule intégrale de ce genre correspond à chaque valeur donnée de la fonction $\mathrm{f}(x)$.

Pour abréger, je désignerai l'intégrale (4) à l'aide de la caractéristique $\int$ accentuée, et placée devant le produit $\frac{f(x)}{x^{r+1}}\,dx$, ensorte qu'on aura

$$(5)\qquad \int_0^{\prime h} \frac{f(x)}{x^{r+1}}\,dx = \int_0^h \left\{ \frac{f(x)}{x^n} - \mathcal{E}\,\frac{f(z)}{x-z}\,\frac{1}{((z^n))} \right\} \frac{dx}{x^{r-n+1}}.$$

De plus, je nommerai l'expression (5) *intégrale extraordinaire*; et l'opération par laquelle on la détermine, *intégration extraordinaire*.

Pour généraliser la formule (5), et la rendre applicable à toutes les hypothèses que l'on peut faire sur la valeur de la quantité réelle r, il suffirait d'admettre que, dans cette formule, r peut recevoir des valeurs négatives, et que, dans tous les cas, on désigne par n celui des termes de la progression arithmétique

$$-\infty, \ldots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots +\infty,$$

qui est égal ou immédiatemens inférieur à $r+1$. C'est ce que nous ferons désormais. Cela posé, il est clair que, si la quantité r devient négative, n sera négatif ou nul. On aura donc alors

$$\mathcal{E}\,\frac{f(z)}{(x-z)}\,\frac{1}{((z^n))} = 0,$$

et par suite

$$(6)\qquad \int_0^{\prime h} \frac{f(x)}{x^{r+1}}\,dx = \int_0^h \frac{f(x)}{x^{r+1}}\,dx.$$

Ainsi, toutes les fois que l'on suppose r négatif, l'intégrale extraordinaire se confond avec l'intégrale ordinaire, et le signe $\int'$ peut être remplacé par le signe $\int$.

Concevons maintenant que l'on représente par s une nouvelle variable, par $f(x,s)$ une fonction des deux variables x, s, et par

$$(7)\qquad S = \int_0^h \left\{ \frac{f(x,s)}{x^n} - \mathcal{E}\,\frac{f(z,s)}{x-z}\,\frac{1}{((z^n))} \right\} \frac{dx}{x^{r-n+1}} = \int_0^{\prime h} f(x,s)\,\frac{dx}{x^{r+1}},$$

ce que devient l'expression (5), quand on y remplace $f(x)$ par $f(x,s)$. On aura évidemment

$$(8)\qquad \frac{dS}{ds} = \int_0^h \left\{ \frac{1}{x^n}\,\frac{df(x,s)}{ds} - \mathcal{E}\,\frac{df(z,s)}{ds}\,\frac{1}{(x-z)((z^n))} \right\} \frac{dx}{x^{r-n+1}} = \int_0^{\prime h} \frac{df(x,s)}{ds}\,\frac{dx}{x^{r+1}}.$$

On trouvera de même, en intégrant par rapport à s entre deux limites quelconques $s=a$. $s=b$,

$$(9)\int_a^b S\,ds = \int_0^{\prime h}\left\{\frac{\int_a^b f(x,s)\,ds}{x^n} - \mathcal{E}\frac{\int_a^b f(z,s)\,ds}{(x-z)((z^n))}\right\}\frac{dx}{x^{r-n+1}} = \int_0^{\prime h}\int_a^b f(x,s)\,ds\,\frac{dx}{x^{r+1}}.$$

Ainsi l'on peut différencier et intégrer sous le signe $\int'$ comme sous le signe $\int$. En partant de ce principe, on déterminera sans peine les valeurs de quelques intégrales extraordinaires, comme on va le faire voir.

1.er Problème. *Déterminer la valeur de l'intégrale extraordinaire*

$$(10)\qquad S = \int_0^{\prime\infty} e^{-sx}\frac{dx}{x^{r+1}},$$

r et s étant des quantités positives.

Solution. Soit toujours n le plus grand nombre entier compris dans $r+1$. La différence $n-r$ sera négative; et, en différenciant n fois par rapport à s l'équation (10), on trouvera

$$(11)\qquad \frac{d^nS}{ds^n} = (-1)^n\int_0^{\prime\infty} e^{-sx}\frac{dx}{x^{r-n+1}} = (-1)^n\int_0^{\infty} e^{-sx}\frac{dx}{x^{r-n+1}}.$$

On a d'ailleurs, en adoptant la notation de M. Legendre [voyez la page 9 et la 32.e leçon de calcul infinitésimal],

$$\int_0^{\infty} x^{n-r-1}e^{-sx}\,dx = s^{r-n}\Gamma(n-r).$$

Cela posé, la formule (11) donnera

$$(12)\qquad \frac{d^nS}{ds^n} = (-1)^n s^{r-n}\Gamma(n-r).$$

Si l'on intègre n fois cette dernière par rapport à s, à partir de $s=0$; et, si l'on suppose, avec M. Legendre, que l'équation

$$(13)\qquad \Gamma(r+1) = r\Gamma(r),$$

établie pour des valeurs positives de la variable r, subsiste encore pour des valeurs négatives de la même variable, on trouvera définitivement

$$(14)\qquad S = s^r\frac{\Gamma(n-r)}{(n-r-1)(n-r-2)\ldots(-r)} = s^r\Gamma(-r).$$

On aura donc généralement

$$(15) \qquad \int_0^{'\infty} e^{-sx} \frac{dx}{x^{r+1}} = s^r \Gamma(-r).$$

Corollaire 1.er Soit $s=1$; on aura simplement

$$(16) \qquad \int_0^{'\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^{r+1}} = \Gamma(-r).$$

Si, dans la formule (16), on remplace r par $-r$, on devra y remplacer en même temps le signe $\int'$ par le signe $\int$; et l'on retrouvera évidemment la formule qui sert à définir la fonction $\Gamma(r)$, savoir,

$$(17) \qquad \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx = \Gamma(r).$$

Corollaire 2.e En supposant la quantité r prise entre les limites 0 et 1, on démontre aisément la formule

$$(18) \qquad \Gamma(r)\Gamma(1-r) = \frac{\pi}{\sin r\pi},$$

[voyez la 33.e leçon de calcul infinitésimal], que l'on peut ensuite étendre, en vertu de l'équation (13), à des valeurs réelles quelconques de la quantité r. Si, dans la même formule, on remplace r par $-r$, on en tirera

$$(19) \qquad \Gamma(-r) = \frac{\pi}{\Gamma(r+1)\sin(r+1)\pi}.$$

Par suite, la formule (15) donnera

$$(20) \qquad s^r = \frac{\Gamma(r+1).\sin(r+1)\pi}{\pi} \int_0^{'\infty} e^{-sx} \frac{dx}{x^{r+1}}.$$

Si l'on prend la différence finie m^{me} de chacun des membres de l'équation (20) par rapport à s; et, si l'on fait, pour abréger, $\Delta s = 1$, on trouvera

$$(21) \qquad \Delta^m s^r = \frac{\Gamma(r+1)\sin(r+1)\pi}{\pi} \int_0^{'\infty} e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^{r+1}}.$$

Quand on suppose $r<m$, on peut remplacer le signe $\int'$ par le signe $\int$, dans l'équation (21), qui se réduit alors à la suivante

(22) $$\Delta^m s^r = \frac{\Gamma(r+1)\sin(r+1)\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^{r+1}}.$$

Cette dernière coincide avec une formule donnée par M. Laplace.

Corollaire 3.ᵉ Si l'on différencie, par rapport à r, l'équation (20); et, si l'on désigne par la caractéristique l les logarithmes pris dans le système dont la base est e, on trouvera

(23) $$\Delta^m (s^r \mathrm{l} s) = \frac{\Gamma(r+1)\sin(r+1)\pi}{\pi}\int_0^{'\infty} (\mathrm{R}-\mathrm{l}x) e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^{r+1}},$$

la valeur de R étant donnée par la formule

(24) $$\mathrm{R} = \frac{d.\mathrm{l}\Gamma(r+1)}{dr} + \pi\frac{\cos(r+1)\pi}{\sin(r+1)\pi}.$$

Ajoutons que, si l'on nomme c la constante dont Euler fait mention à la page 444 de son calcul différentiel, et dont la valeur approchée est 0,577216..., on aura, en vertu d'une formule connue [voyez la 4.ᵉ partie des exercices de calcul intégral de M. Legendre]

(25) $$\frac{d.\mathrm{l}\Gamma(r+1)}{dr} = -c + \int_0^1 \frac{1-z^r}{1-z} dz.$$

Quand on suppose $r<m$, on peut remplacer le signe $\int'$ par le signe $\int$, dans l'équation (23), qui se réduit alors à la suivante

(26) $$\Delta^m (s^r \mathrm{l} s) = \frac{\Gamma(r+1)\sin(r+1)\pi}{\pi}\int_0^{\infty} (\mathrm{R}-\mathrm{l}x) e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^{r+1}}.$$

Si $r+1$ devient précisément égal au nombre entier n, $\sin(r+1)\pi$ s'évanouira; mais on tirera des formules (24) et (26) combinées entre elles

(27) $$\Delta^m (s^{n-1} \mathrm{l} s) = \Gamma(n).\cos n\pi.\int_0^{\infty} e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^n}.$$

ou, ce qui revient au même

(28) $$\Delta^m (s^{n-1} \mathrm{l} s) = (-1)^n 1.2.3\ldots(n-1)\int_0^{\infty} x^{-n} e^{-sx}(e^{-x}-1)^m dx.$$

2.ᵉ Problême. *Déterminer les valeurs des intégrales extraordinaires.*

(29) $$\int_0^{'\infty} e^{-sx}\cos tx \frac{dx}{x^{r+1}},$$ (30) $$\int_0^{'\infty} e^{-sx}\sin tx \frac{dx}{x^{r+1}},$$

r *et* s *étant des quantités positives.*

Solution. En opérant comme dans le premier problême, et ayant égard aux formules (13) de la 32.e leçon de calcul infinitésimal, qui subsistent dans le cas même où n devient un nombre quelconque, on trouvera

$$(31)\quad \begin{cases} \int_0^{\prime\infty} e^{-sx}\cos tx \dfrac{dx}{x^{r+1}} = \dfrac{(s-t\sqrt{-1})^r+(s+t\sqrt{-1})^r}{2}\,\Gamma(-r)\,, \\ \int_0^{\prime\infty} e^{-sx}\sin tx \dfrac{dx}{x^{r+1}} = \dfrac{(s-t\sqrt{-1})^r-(s+t\sqrt{-1})^r}{2\sqrt{-1}}\,\Gamma(-r)\,; \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(32)\quad \begin{cases} \int_0^{\prime\infty} e^{-sx}\cos tx \dfrac{dx}{x^{r+1}} = (s^2+t^2)^{\frac{r}{2}}\cos\left(r \,\text{arctang}\dfrac{t}{s}\right).\Gamma(-r)\,, \\ \int_0^{\prime\infty} e^{-sx}\sin tx \dfrac{dx}{x^{r+1}} = (s^2+t^2)^{\frac{r}{2}}\sin\left(r \,\text{arctang}\dfrac{t}{s}\right).\Gamma(-r)\,. \end{cases}$$

Si, dans les équations précédentes, on changeait r en $-r$, il faudrait en même temps remplacer le signe $\int'$ par le signe $\int$, et l'on se trouverait ramené aux formules connues

$$(33)\quad \begin{cases} \int_0^{\infty} x^{r-1}e^{-sx}\cos tx\, dx = \dfrac{\Gamma(r)}{(s^2+t^2)^{\frac{r}{2}}}\cos\left(r \,\text{arctang}\dfrac{t}{s}\right) \\ \int_0^{\infty} x^{r-1}e^{-sx}\sin tx\, dx = \dfrac{\Gamma(r)}{(s^2+t^2)^{\frac{r}{2}}}\sin\left(r \,\text{arctang}\dfrac{t}{s}\right). \end{cases}$$

Corollaire. Si, dans les équations (32), on prend $s=0$, et t positif, elles donneront

$$(34)\quad \begin{cases} \int_0^{\prime\infty} \cos tx \dfrac{dx}{x^{r+1}} = t^r\cos\dfrac{r\pi}{2}.\Gamma(-r)\,, \\ \int_0^{\prime\infty} \sin tx \dfrac{dx}{x^{r+1}} = -\,t^r\sin\dfrac{r\pi}{2}.\Gamma(-r)\,. \end{cases}$$

De ces dernières combinées avec l'équation (19) on déduit facilement les deux formules

$$(35)\quad \begin{cases} \int_0^{\prime\infty} \cos\left(\dfrac{r+1}{2}\pi+tx\right)\dfrac{dx}{x^{r+1}} = 0\,, \\ \int_0^{\prime\infty} \cos\left(\dfrac{r+1}{2}\pi-tx\right)\dfrac{dx}{x^{r+1}} = \dfrac{\pi}{\Gamma(r+1)}\,t^r\,, \end{cases}$$

3.° **Problême.** ***Déterminer la valeur de l'intégrale extraordinaire***

(36) $$\int_0^{'\infty} e^{-x^2}\cos\left(\frac{r+1}{2}\pi+2sx\right)\frac{dx}{x^{r+1}},$$

r *et* s *étant des quantités positives.*

Solution. Comme on a, en vertu d'une formule connue [voyez la 40.ᵉ leçon de calcul infinitésimal],

(37) $$e^{-x^2}=\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} e^{-z^2}\cos 2xz.dz,$$

on trouvera

(38) $$\int_0^{'\infty} e^{-x^2}\cos\left(\frac{r+1}{2}\pi+2sx\right)\frac{dx}{x^{r+1}}=\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} Ze^{-z^2}dz,$$

Z étant une fonction de z déterminée par l'équation

(39) $$Z=\int_0^{'\infty}\frac{\cos\left[\frac{r+1}{2}+2(s+z)x\right]+\cos\left[\frac{r+1}{2}+2(s-z)x\right]}{2}\frac{dx}{x^{r+1}}.$$

D'ailleurs, en vertu des formules (35), on aura, pour toutes les valeurs positives de z,

$$\int_0^{'\infty}\cos\left[\frac{r+1}{2}\pi+2(s+z)x\right]\frac{dx}{x^{r+1}}=0,$$

pour des valeurs de z inférieures à s,

$$\int_0^{'\infty}\cos\left[\frac{r+1}{2}\pi+2(s-z)x\right]\frac{dx}{x^{r+1}}=0,$$

et, pour des valeurs de z supérieures à s,

$$\int_0^{'\infty}\cos\left[\frac{r+1}{2}\pi+2(s-z)x\right]\frac{dx}{x^{r+1}}=\frac{2^r\pi}{\Gamma(r+1)}(z-s)^r,$$

En conséquence, la fonction de z, représentée par Z, sera toujours nulle entre les limites $z=0$, $z=s$; mais entre les limites $z=s$, $z=\infty$, on aura

$$Z=\frac{2^r\pi}{\Gamma(r+1)}(z-s)^r.$$

Cela posé, l'équation (38) donnera

(40) $$\int_0^{'\infty} e^{-x^2}\cos\left[\frac{r+1}{2}\pi+2sx\right]\frac{dx}{x^{r+1}}=\frac{2^r\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(r+1)}\int_0^{s}(z-s)^r e^{-z^2}dz..$$

On peut quelquefois se servir des intégrales extraordinaires pour découvrir les relations qui existent entre des intégrales ordinaires. C'est ce que je vais montrer par un exemple.

4.° Problème. ***Déterminer le rapport des deux intégrales***

$$(41)\int_0^\infty x^r e^{-x^2}\cos\left(\frac{r\pi}{2}-2sx\right)dx\,,\qquad (42)\int_0^\infty \frac{(s-x\sqrt{-1})^r+(s+x\sqrt{-1})^r}{2}e^{-x^2}dx\,,$$

r ***et*** s ***désignant des quantités positives.***

Solution. Pour résoudre la question proposée, il suffira de transformer les intégrales (41) et (42) en intégrales extraordinaires à l'aide des formules (31) et (34). En effet, on tire des formules (34)

$$x^r\cos\left(\frac{r\pi}{2}-2sx\right)=x^r\cos\frac{r\pi}{2}\cos 2sx+x^r\sin\frac{r\pi}{2}\sin 2sx$$

$$=\frac{\cos 2sx}{\Gamma(-r)}\int_0^{\prime\infty}\cos xz\frac{dz}{z^{r+1}}-\frac{\sin 2sx}{\Gamma(-r)}\int_0^{\prime\infty}\sin xz\frac{dz}{z^{r+1}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(-r)}\int_0^{\prime\infty}\cos(2s+z)x\frac{dz}{z^{r+1}}\,;$$

et par suite, l'intégrale (41) peut être réduite à l'expression

$$\frac{1}{\Gamma(-r)}\int_0^{\prime\infty}Z\frac{dz}{z^{r+1}}\,,$$

la valeur de Z étant

$$Z=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2s+z)x.\,dx=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}e^{-(s+\frac{1}{2}z)^2}\,.$$

On aura donc

$$(43)\qquad \int_0^\infty x^r e^{-x^2}\cos\left[\frac{r\pi}{2}-2sx\right]dx=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-s^2}}{\Gamma(-r)}\int_0^{\prime\infty}e^{-sz-\frac{1}{2}z^2}\frac{dz}{z^{r+1}}.$$

De plus, on tirera de la formule (31)

$$\frac{(s-x\sqrt{-1})^r+(s+x\sqrt{-1})^r}{2}=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\prime\infty}e^{-sz}\cos xz\frac{dz}{z^{r+1}}\,,$$

et par conséquent, l'intégrale (41) prendra la forme

$$\frac{1}{\Gamma(-r)}\int_0^{\prime\infty}Z\frac{dz}{z^{r+1}}\,,$$

la valeur de Z étant

$$Z=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos zx.dx=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}e^{-\frac{1}{4}z^2}.$$

On aura donc

$$(44)\quad \int_0^\infty \frac{(s-x\sqrt{-1})^r+(s+x\sqrt{-1})^r}{2}e^{-x^2}dx=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-r)}\int_0^\infty e^{-sz-\frac{1}{4}z^2}\frac{dz}{z^{r+1}}.$$

Si maintenant on compare l'équation (43) à l'équation (44), on trouvera

$$(45)\quad \int_0^\infty x^r e^{-x^2}\cos\left(\frac{r\pi}{2}-2sx\right)dx=e^{-s^2}\int_0^\infty \frac{(s+x\sqrt{-1})^r+(s-x\sqrt{-1})^r}{2}e^{-x^2}dx.$$

On se trouve ainsi ramené à une formule que nous avons établie par une autre méthode dans le Bulletin de la Société philomatique de 1822.

Corollaire. Si, dans l'équation (45) on suppose $r=n$, n désignant un nombre entier, on aura

$$\cos\left(\frac{r\pi}{2}-2sx\right)=(-1)^{\frac{n}{2}}\cos 2sx,$$

si n est pair, et

$$\cos\left(\frac{r\pi}{2}-2sx\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin 2sx,$$

si n est impair. Si, dans la même hypothèse, on développe le second membre de la formule (45), et si l'on a égard à l'équation

$$(46)\quad \int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n},$$

on trouvera, pour des valeurs paires de n,

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{c}\int_0^\infty x^n e^{-x^2}\cos 2sx.dx= \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}s^n e^{-s^2}}{2}\left[1-\frac{n(n-1)}{1}\left(\frac{1}{2s}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\left(\frac{1}{2s}\right)^4-\ldots\ldots\right]\end{array}\right\}$$

et pour des valeurs impaires de n

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{c}\int_0^\infty x^n e^{-x^2}\sin 2sx.dx= \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}s^n e^{-s^2}}{2}\left[1-\frac{n(n-1)}{1}\left(\frac{1}{2s}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\left(\frac{1}{2s}\right)^4-\ldots\ldots\right]\end{array}\right\}$$

La formule (4) s'accorde avec l'équation (18) de la page 54.

SUR LES MOMENTS LINÉAIRES.

La théorie des *moments linéaires* se lie intimement, d'un côté, à la théorie des moments des forces, pris par rapport à un point fixe, et représentés par des surfaces planes; de l'autre, à la théorie des couples établie par M. Poinsot: et fournit, comme cette dernière, les moyens de simplifier la solution d'un grand nombre de problèmes de mécanique. Elle a d'ailleurs l'avantage de faire disparaître les difficultés que présente, dans certains cas, le choix des signes qui doivent affecter les surfaces désignées sous le nom de moments. Enfin elle s'applique, non-seulement aux forces, mais encore à toutes les quantités qui ont pour mesure des longueurs portées sur des droites, dans des directions déterminées, par exemple, aux vitesses et aux quantités de mouvement. Nous nous bornerons, dans cet article, à exposer les principes de la nouvelle théorie, et nous considérerons en particulier les moments linéaires d'une ou de plusieurs forces appliquées à un seul point. Pour que l'on puisse facilement comprendre ce que nous avons à dire à ce sujet, il est d'abord nécessaire de rappeler quelques définitions généralement adoptées.

Soit P une force quelconque appliquée au point matériel (A), et représentée par une longueur $\overline{AB}$ portée à partir du point (A) sur sa propre direction. Si, d'un autre point (O) pris à volonté dans l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur la direction de la force P, le produit de cette perpendiculaire par la force elle-même représentera le double de la surface du triangle OAB, qui a pour base la force $\overline{AB}$, et pour sommet le point (O). Ce même produit, équivalent, comme on vient de le dire, au double de la surface OAB, est ce qu'on appelle le *moment* de la force P, par rapport au point (O). De plus, le plan du triangle OAB, ou, en d'autres termes, le plan qui passe par le point (O) et par la force $\overline{AB}$, est ce qu'on nomme le *plan du moment*. Cela posé, il est clair que le moment d'une force $\overline{AB}$ reste le même, lorsque, sans changer la direction de la force, on déplace le point (A) de manière à le transporter en un autre point (A') de la direction dont il s'agit. En effet, si, sur la droite $\overline{AB}$ prolongée, on prend $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, les deux triangles OAB, $OA'B'$, auront des bases égales avec la même hauteur, et par conséquent des surfaces égales.

Le moment d'une force n'étant autre chose que le produit de cette force par la

perpendiculaire abaissée d'un point donné sur sa direction, le point à partir duquel on abaisse la perpendiculaire, s'appelle l'origine ou le *centre des moments*. Le plus souvent, on place le centre des moments à l'origine même des coordonnées. La droite menée du centre des moments au point d'application de la force sera désignée sous le nom de *rayon vecteur*. Ce rayon vecteur est l'un des côtés du triangle OAB, dont la surface doublée équivaut au moment de la force $\overline{AB}$; d'où il est aisé de conclure qu'on obtiendra encore un produit égal à ce moment, si l'on multiplie le rayon vecteur $\overline{OA}$ par la perpendiculaire abaissée du point (B) sur ce rayon vecteur, ou, ce qui revient au même, par la projection de la force $\overline{AB}$ sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur

Si l'on projette sur un plan quelconque le centre des moments et la force $\overline{AB}$, on obtiendra en même temps, pour projection du triengle OAB, un nouveau triangle qui aura pour sommet la projection du point (O), et pour base la projection de la force $\overline{AB}$. Ce nouveau triangle sera donc celui dont la surface doublée mesure le moment de la force projetée par rapport à la projection du centre des moments. Ainsi, le moment de la projection d'une force sur un plan quelconque est égal à la projection sur ce même plan d'une surface équivalente au moment de la force donnée et comprise dans le plan du moment. C'est ce que nous exprimerons en disant que *le moment de la projection d'une force ne diffère pas de la projection de son moment.*

Le plan du moment d'une force $\overline{AB} = P$ peut tourner dans deux sens différents autour du centre des moments. Si l'on vient à fixer ce même centre, et que le rayon vecteur se change en une droite rigide, la force appliquée à l'extrémité mobile de cette droite tendra évidemment à imprimer au plan du moment un seul des deux mouvements de rotation qu'il peut prendre. Supposons que ce mouvement s'effectue et que l'on ait élevé par le centre des moments un demi-axe perpendiculaire au plan : un spectateur qui posera les pieds sur le plan de manière à s'appuyer contre le demi-axe, verra les différents points du plan se mouvoir, en passant devant lui, de sa droite à sa gauche ou de sa gauche à sa droite; ce que nous exprimerons en disant que le mouvement de rotation a lieu *de droite à gauche* ou *de gauche à droite* (*). On doit observer au reste que si, par le centre des moments, on élevait à la fois deux demi-axes perpendiculaires au plan du moment, le même mouvement de rotation paraîtrait s'effectuer autour de l'un de ces demi-axes de droite à gauche, et autour de l'autre, de gauche à droite. Revenons maintenant au cas où l'on trace un seul demi-axe, et supposons que

(*) Le moyen que nous employons ici, et à l'aide duquel on distingue facilement les deux espèces de mouvements de rotation que peut prendre un plan tournant sur lui-même autour d'un point donné, est celui dont M. Ampere a fait usage dans la *Théorie de l'électricité dynamique*.

ce soit précisément celui autour duquel le mouvement de rotation s'effectue de droite à gauche. Si, à partir du centre des moments, on porte sur ce demi-axe une longueur numériquement égale au moment de la force P, on obtiendra ce que nous appellerons le moment *linéaire* de cette force. La *direction* de ce moment linéaire sera celle du demi-axe sur lequel il se compte; et son *intensité* aura pour mesure le moment même de la force P.

Concevons à présent que, dans le plan du moment de la force P, on fasse varier cette force en grandeur et en direction, de sorte qu'elle se change en une nouvelle force P' toujours appliquée au point (A) et propre à faire tourner le plan dans le même sens que la première, autour du centre des moments. Les moments linéaires des deux forces P, P', devront être portées sur le même demi-axe; et si l'on projette ces deux forces sur un plan mené par le point (A) perpendiculairement au rayon vecteur, les projections auront encore la même direction. Imaginons ensuite que le plan du moment de la force P' vienne à se détacher du plan du moment de la force P, en tournant d'une certaine quantité autour du rayon vecteur. Pendant ce mouvement, deux demi-axes perpendiculaires au rayon vecteur, aboutissant à deux points différents de ce rayon, et assujettis à tourner autour de ces points avec le plan du moment de la force P, décriront évidemment des angles égaux. Or, comme on peut supposer que ces deux demi-axes coïncident, le premier avec la projection de la force P' sur le plan mené par le point (A) perpendiculairement au rayon vecteur, le second avec le demi-axe mené par le point (O) et sur lequel on compte le moment linéaire de la même force, nous devons conclure qu'après l'arrivée de la force P' dans sa nouvelle position, les moments linéaires des forces P, P', comprendront entre eux le même angle que les projections de ces forces sur le plan perpendiculaire au rayon vecteur. Il est d'ailleurs essentiel d'observer qu'il suffit de choisir convenablement l'intensité de la force P', sa direction par rapport au rayon vecteur dans le plan de son moment, et la quantité dont on fait tourner ce même plan, pour que cette force, parvenue dans sa nouvelle position, coïncide avec une force quelconque menée par le point (A). On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si deux forces quelconques appliquées au point (A) sont projetées sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur qui joint le point (A) avec le centre des moments, les projections formeront entre elles le même angle que les moments linéaires des forces données.

Considérons maintenant, avec deux forces P, P', simultanément appliquées au point (A), la résultante R de ces deux forces. Soit toujours (O) le point pris pour centre des moments, et supposons que l'on construise tout-à-la fois les moments linéaires des forces P, P', R, avec les projections de ces forces sur le plan mené par le point (A) perpendiculairement au rayon vecteur. D'après ce qu'on vient de dire,

les moments linéaires formeront entre eux les mêmes angles que les projections des forces correspondantes ; et de plus ces moments linéaires seront, en vertu de leur définition même, respectivement égaux aux produits qu'on obtient en multipliant le rayon vecteur par les projections dont il s'agit. Cela posé, concevons, 1.° que les droites $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, représentent en grandeur et en direction les projections des forces

$$P, P', R;$$

2.° que les droites $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OG}$, représentent en grandeur et en direction leurs moments linéaires. Les trois dernières droites seront proportionnelles aux trois premières, et, prises deux à deux, elles formeront entre elles les mêmes angles. Par suite, les deux figures $ABCD$, $OEFG$, seront entièrement semblables. Or, la force projetée $\overline{AD}$ étant la résultante des forces projetées $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, la figure $ABCD$ est nécessairement un parallélogramme ; donc la figure $OEFG$ en sera un également. Donc le moment linéaire $\overline{OG}$ de la résultante R sera la diagonale du parallélogramme construit sur les moments linéaires des composantes ; et, pour l'obtenir, il suffira de mener par l'extrémité du moment linéaire de la force P une droite égale et parallèle au moment linéaire de la force P', puis de joindre le centre des moments avec l'extrémité de cette droite. Ainsi les moments linéaires se *composent* comme les forces elles-mêmes, et à l'aide de la même construction. Cette remarque ne se borne pas au cas où l'on considère deux composantes ; elle s'étend à un nombre quelconque de forces P, P', P'', etc........ Car il est clair qu'en répétant plusieurs fois de suite la construction indiquée d'une part sur les forces combinées deux à deux, de l'autre sur les moments linéaires correspondants, on obtiendra par le même procédé, 1.° la résultante de toutes ces forces, 2.° le moment linéaire de cette résultante. Enfin, la remarque subsiste, quelles que soient les directions des forces données et celles de leurs moments linéaires respectifs, et par conséquent dans le cas même où quelques-unes de ces directions viendraient à coïncider.

Pour indiquer que le moment linéaire de la résultante de plusieurs forces P, P', P''... résulte de la composition de leurs moments linéaires, nous le désignerons désormais sous le nom de *moment linéaire résultant.*

Dans le cas particulier où les plans des moments de deux forces coïncident, c'est-à-dire, lorsqu'un seul plan renferme à-la-fois le centre des moments et les deux forces, leurs moments linéaires se comptent évidemment sur un seul axe perpendiculaire au plan dont il s'agit. De plus, ils se comptent sur cet axe dans le même sens ou dans des sens opposés, suivant que les forces données tendent à faire tourner le plan qui les renferme dans le même sens ou en sens contraires. Si toutes les forces P, P', P''... appliquées au point matériel (A), se trouvaient comprises avec le centre des moments

dans un plan unique, tous les moments linéaires se comptant alors sur le même axe, le moment linéaire de la résultante serait égal à la somme des moments linéaires des composantes, pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant que les forces correspondantes tendraient à faire tourner le plan de tous les moments dans le même sens que la résultante ou dans le sens inverse.

Revenons au cas où les moments linéaires des forces P, P', P'', etc., ont des directions quelconques. Dans ce cas, au lieu de construire géométriquement le moment linéaire de la résultante, on pourrait déterminer analytiquement son intensité et sa direction. En effet, soit R cette résultante, et désignons par

$$p,\ p',\ p'' \ldots\ldots\ldots\ r,$$

les perpendiculaires abaissées du centre des moments sur les directions des forces

$$P,\ P',\ P'' \ldots\ldots\ldots\ R.$$

Les moments linéaires des mêmes forces seront représentés par

$$Pp,\ P'p',\ P''p'' \ldots\ldots\ Rr\ ;$$

et, si l'on suppose que ces moments linéaires forment respectivement, avec le demi-axe des x positives, les angles

$$\lambda,\ \lambda',\ \lambda'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ l\ ;$$

avec le demi-axe des y positives, les angles

$$\mu,\ \mu',\ \mu'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ m\ ;$$

avec le demi-axe des z positives, les angles

$$\nu,\ \nu',\ \nu'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ n\ ,$$

les produits

$$\begin{aligned}
&Pp \cos\lambda,\ P'p' \cos\lambda',\ P''p'' \cos\lambda'' \ldots\ Rr\cos l,\\
&Pp \cos\mu,\ P'p' \cos\mu',\ P''p'' \cos\mu'' \ldots\ Rr\cos m,\\
&Pp \cos\nu,\ P'p' \cos\nu',\ P''p'' \cos\nu'' \ldots\ Rr\cos n,
\end{aligned}$$

seront ce qu'on peut appeler les ***projections algébriques*** des moments linéaires dont il s'agit, sur les axes des x, y, z. Cela posé, puisque le moment linéaire Rr est à l'égard des autres ce qu'est la résultante R à l'égard des forces $P, P', P'' \ldots$, les relations trouvées entre les projections algébriques des forces

$$P, P' P'' \ldots\ldots R,$$

subsisteront nécessairement entre les projections algébriques des moments linéaires

$$Pp, P'p', P''p'' \ldots\ldots Rr.$$

En conséquence, la projection algébrique sur chaque axe du moment linéaire résultant sera égale à la somme des projections algébriques sur le même axe des moments linéaires des composantes. On aura donc les trois équations.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Rr\cos l = Pp\cos\lambda + P'p'\cos\lambda + P''p''\cos\lambda'' + \text{etc.}\ldots\ldots, \\ Rr\cos m = Pp\cos\mu + P'p'\cos\mu + P''p''\cos\mu'' + \text{etc.}\ldots\ldots, \\ Rr\cos n = Pp\cos\nu + P'p'\cos\nu' + P''p''\cos\nu'' + \text{etc.}\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Si à ces trois équations on réunit la suivante

$$(2) \qquad \cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,$$

on obtiendra en tout quatre équations suffisantes pour déterminer les valeurs des quatre inconnues

$$Rr, l, m, n,$$

c'est-à-dire, la direction et l'intensité du moment linéaire résultant, toutes les fois que l'on connaîtra en grandeur et en direction les moments linéaires des forces P, P', etc. Les seconds membres des équations (1) étant, dans cette hypothèse, des quantités connues, si, pour abréger, on les désigne par

$$L, M, N,$$

ces équations deviendront respectivement

$$(3) \qquad Rr\cos l = L, \quad Rr\cos m = M, \quad Rr\cos n = N.$$

Or on tire de ces dernières, en ayant égard à la formule (2),

$$(4) \qquad (Rr)^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Donc, par suite,

$$(5) \qquad Rr = \sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}.$$

L'intensité Rr ou la grandeur du moment linéaire résultant étant ainsi déterminée,

on obtiendra les angles $l, m, n,$ que sa direction forme avec les demi-axes des coordonnées positives, par le moyen des équations

$$(6)\qquad \cos l = \frac{L}{Rr},\ \cos m = \frac{M}{Rr},\ \cos n = \frac{N}{Rr}.$$

Ces angles seront aigus ou obtus, suivant que les quantités L, M, N seront positives ou négatives.

Les calculs qui précèdent subsistent, quel que soit le point de l'espace que l'on ait pris pour centre des moments. Dans le cas particulier où ce centre coïncide avec l'origine des coordonnées, on peut exprimer les projections algébriques du moment linéaire de chaque force en fonction de l'intensité de cette force, des coordonnées de son point d'application et des angles que forme sa direction avec les demi-axes des coordonnées positives. On y parvient facilement à l'aide des considérations suivantes.

Le moment de la force P appliquée au point (A), savoir, Pp représente, comme on l'a dit ci-dessus, le double de la surface du triangle OAB qui a pour base la force $\overline{AB} = P$, et pour sommet le point (O), centre des moments, c'est-à-dire, dans le cas présent, l'origine des coordonnées. La surface de ce triangle est donc

$$\tfrac{1}{2} Pp.$$

En la multipliant par $\cos\lambda$, c'est-à-dire, par le cosinus de l'angle que forme la direction du moment linéaire avec le demi-axe des x positives, on obtient la moitié de la projection algébrique de ce moment linéaire. Or, le moment linéaire se comptant sur l'un des deux demi-axes perpendiculaires au plan du moment Pp, et l'axe des x étant perpendiculaire au plan des y, z, l'angle λ sera évidemment l'un de ceux que le plan du moment fait avec le plan des y, z, et qui, étant suppléments l'un de l'autre, ont, au signe près, le même cosinus. D'ailleurs, si l'on multiplie une surface plane par le cosinus de l'angle aigu compris entre le plan qui la renferme et un autre plan pris à volonté, on aura pour produit la projection de la surface sur le dernier plan. Donc le produit

$$\tfrac{1}{2} Pp \cos\lambda$$

sera égal, au signe près, à la projection du triangle OAB sur le plan des y, z. Donc, par suite, la projection algébrique du moment linéaire, savoir,

$$Pp \cos\lambda$$

sera égale, au signe près, au double de la surface du triangle projeté, ou, en d'autres

termes, au moment de la force P projetée elle-même sur le plan des y, z. Ajoutons que le produit $Pp\cos\lambda$ sera positif ou négatif, suivant que l'angle λ, formé par la direction du moment linéaire avec le demi-axe des x positives sera aigu ou obtus, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que la force P tendra à faire tourner le plan de son moment de droite à gauche ou de gauche à droite autour de la perpendiculaire au plan prolongée de manière à former avec la direction des x positives un angle aigu, et, par conséquent, autour du demi-axe des x positives. Or, comme un plan mené par ce demi-axe et par le point (A) laisserait d'un même côté la force P et sa projection sur le plan des y, z, il est clair que cette projection tendra elle-même à faire tourner le plan des y, z autour du demi-axe des x positives, de droite à gauche dans le premier cas, et de gauche à droite dans le second. On peut donc conclure que le produit $Pp\cos\lambda$, c'est-à-dire, la projection algébrique du moment linéaire de la force P sur l'axe des x positives, sera égal au moment de la force projetée sur le plan des y, z, ce dernier moment étant pris tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, suivant que la force projetée tendra à faire tourner le plan des y, z de droite à gauche ou de gauche à droite autour du demi-axe des x positives.

On prouvera de même que la projection algébrique du moment linéaire de la force P sur l'axe des y ou des z est égale au moment de la force P projetée sur celui des plans coordonnés auxquels cet axe est perpendiculaire, le dernier moment étant pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que la force projetée tend à faire tourner le plan dont il s'agit de droite à gauche ou de gauche à droite autour du demi-axe des y ou des z positives.

Considérons maintenant l'angle solide trièdre qui a pour arêtes les trois demi-axes des coordonnées positives, et concevons qu'un rayon mobile d'une longueur indéfinie, mené par l'origine, fasse le tour de cet angle solide, en s'appliquant successivement sur les trois faces. Son mouvement sur chaque face sera un mouvement de rotation, de droite à gauche ou de gauche à droite, autour de l'arête perpendiculaire à cette face. De plus, il est aisé de voir que les trois mouvemens de rotation sur les trois faces, c'est-à-dire, en d'autres termes, sur les trois plans coordonnés, seront de même espèce. Par exemple, si la disposition des demi-axes des coordonnées positives OX, OY, OZ, est celle qui se trouve la plus usitée, les trois mouvements de rotation auront lieu de droite à gauche autour de ces trois demi-axes, lorsque le rayon mobile, en faisant le tour de l'angle solide, passera successivement de la position OX à la position OY, et de celle-ci à la position OZ, pour revenir ensuite à la position OX. Si le demi-axe des z positives se trouvait transporté de l'autre côté du plan des x, y, alors les mouvements de rotation de droite à gauche auraient lieu dans le cas où le rayon mobile prendrait successivement les trois positions

$$OX,\ OZ,\ OY,$$

pour revenir ensuite directement de la position OY à la position OX.

Afin de bien distinguer les deux espèces de mouvements que peut prendre un rayon mobile assujetti à passer par l'origine et à parcourir l'une après l'autre les trois faces de l'angle solide $OXYZ$, nous dirons que ce rayon mobile a dans chacun des plans coordonnés un mouvement *direct* de rotation, s'il passe successivement de la position OX à la position OY, et de celle-ci à la position OZ; nous dirons, dans le cas contraire, que le même rayon vecteur a un mouvement de rotation *rétrograde*. Cela posé, si l'on adopte la disposition la plus ordinaire pour les demi-axes des coordonnées positives, les mouvements directs de rotation autour de ces demi-axes auront lieu de droite à gauche, et les mouvements rétrogrades, de gauche à droite.

Je reviens aux projections algébriques du moment linéaire de la force P, et je vais d'abord chercher une nouvelle expression de la projection algébrique de ce moment sur l'axe des x, en admettant, pour fixer les idées, la disposition la plus commune des demi-axes des coordonnées positives. La force P pouvant être remplacée par ses trois composantes rectangulaires, la projection algébrique de son moment linéaire sur l'axe des x sera égale à la somme des projections algébriques sur le même axe des moments linéaires de ces trois composantes, ou, en d'autres termes, à la somme des moments des mêmes composantes projetées sur le plan des y, z, ces derniers moments étant pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que les forces projetées tendront à imprimer au plan des y, z un mouvement de rotation direct ou rétrograde. Or, si l'on nomme α, β, γ les angles formés par la force P avec les axes des x, y, z, prolongés dans le sens des coordonnées positives, les trois composantes rectangulaires de P seront représentées par les valeurs numériques des trois produits

$$P\cos\alpha, \qquad P\cos\beta, \qquad P\cos\gamma.$$

Si d'ailleurs on projette ces composantes sur le plan des y, z, la première se trouvera réduite à zéro, tandis que les deux autres conserveront leurs intensités respectives. Enfin il est clair que les projections des deux dernières composantes agiront suivant des droites menées parallèlement aux axes des y et z par la projection du point d'application de la force P. Soient

$$x, \qquad y, \qquad z$$

les coordonnées de ce même point dans l'espace. La projection de la composante parallèle à l'axe des z aura un moment égal au produit de son intensité par la perpendiculaire abaissée de l'origine sur sa direction, c'est-à-dire, par la valeur numérique de y. Ce moment sera donc représenté par la valeur numérique du produit $P\cos\gamma \times y$. On prouvera de même que la projection de la composante parallèle à l'axe des y a un moment représenté par la valeur numérique du produit $P\cos\beta \times z$. Ajoutons que,

des deux projections dont il s'agit, la première tendra à produire un mouvement de rotation direct, si $P\cos\gamma$ et y sont de même signe, c'est-à-dire, si le produit $Py\cos\gamma$ est positif; la seconde, si $P\cos\gamma$ et z sont de signes différents, c'est-à-dire, en d'autres termes, si le produit $Pz\cos\beta$ est négatif. Les mouvements de rotation deviendraient rétrogrades dans les suppositions contraires. Par suite, pour obtenir les projections algébriques sur l'axe des x des moments linéaires que fournissent les deux composantes de la force P parallèles aux axes des z et des y, il faudra prendre le produit

$$Py\cos\gamma$$

avec le signe $+$, et le produit

$$Pz\cos\beta$$

avec le signe $-$. La somme des deux résultats, savoir,

$$P(y\cos\gamma - z\cos\beta),$$

devant être équivalente à la projection algébrique sur l'axe des x du moment linéaire de la force P, on aura nécessairement

$$Pp\cos\lambda = P(y\cos\gamma - z\cos\beta).$$

On trouverait de même, en projetant les moments linéaires de la force P et de ses composantes sur les axes des y et des z,

$$Pp\cos\mu = P(z\cos\alpha - x\cos\gamma),$$

$$Pp\cos\nu = P(x\cos\beta - y\cos\alpha).$$

Il est au reste essentiel d'observer que les trois équations

$$(7)\qquad \begin{cases} Pp\cos\lambda = P(y\cos\gamma - \cos\beta), \\ Pp\cos\mu = P(z\cos\alpha - \cos\gamma), \\ Pp\cos\nu = P(x\cos\beta - \cos\alpha), \end{cases}$$

ont lieu seulement dans le cas où l'on adopte pour les demi-axes des coordonnées positives la disposition la plus ordinaire, c'est-à-dire, lorsque les mouvements de rotation de droite à gauche autour de ces demi-axes sont en même temps des mouvements directs, et tendent à faire passer un rayon mobile

dans le plan des y, z, de la direction des y positives à la direction des z positives;
dans le plan des z, x, de la direction des z positives à la direction des x positives;
dans le plan des x, y, de la direction des x positives à la direction des y positives.

Si les mouvements de rotation de droite à gauche autour des mêmes demi-axes devenaient rétrogrades, alors il faudrait remplacer les formules (7) par les suivantes :

$$(8)\qquad \begin{cases} Pp\cos\lambda = P(z\cos\beta - y\cos\gamma), \\ Pp\cos\mu = P(x\cos\gamma - z\cos\alpha), \\ Pp\cos\nu = P(y\cos\alpha - x\cos\beta). \end{cases}$$

Lorsque, dans chacune des équations (7), on supprime le facteur P commun aux deux membres, elles se réduisent à

$$(9)\quad p\cos\lambda = y\cos\gamma - z\cos\beta,\; p\cos\mu = z\cos\alpha - x\cos\gamma,\; p\cos\nu = x\cos\beta - y\cos\alpha.$$

On peut de la même manière réduire les équations (8) à

$$(10)\quad p\cos\lambda = z\cos\beta - y\cos\gamma,\; p\cos\mu = x\cos\gamma - z\cos\alpha,\; p\cos\nu = y\cos\alpha - x\cos\beta.$$

Enfin on peut comprendre les équations (9) et (10) dans la seule formule

$$(11)\qquad \frac{y\cos\gamma - z\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{z\cos\alpha - x\cos\gamma}{\cos\mu} = \frac{x\cos\beta - y\cos\alpha}{\cos\nu} = \pm p,$$

la lettre p devant être affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que les mouvements de rotation de droite à gauche autour des demi-axes des coordonnées positives sont des mouvements directs ou rétrogrades. Ajoutons que, dans l'un et l'autre cas, les équations (9) ou (10), combinées avec la suivante,

$$(12)\qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

donneront

$$(13)\qquad \begin{aligned} p^2 &= (y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2. \end{aligned}$$

On trouvera donc, pour l'expression de la perpendiculaire p abaissée du centre des moments sur la direction de la force P, ...

$$(14) \quad p = [(y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= [x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Après avoir ainsi déterminé la valeur de p, on obtiendra celles des angles λ, μ, ν, par le moyen des formules

$$(15) \quad \cos\lambda = \pm\frac{y\cos\gamma - z\cos\beta}{p}, \quad \cos\mu = \pm\frac{z\cos\alpha - x\cos\gamma}{p}, \quad \cos\nu = \pm\frac{x\cos\beta - y\cos\alpha}{p},$$

dont les seconds membres devront être affectés simultanément du signe que l'on placera devant la lettre p dans la formule (11). Les valeurs précédentes de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, satisfont évidemment aux deux équations de condition

$$(16) \quad \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0, \quad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = 0.$$

Or, comme les demi-axes des coordonnées positives forment les angles α, β, γ avec la direction de la force P, et les angles λ, μ, ν avec la direction du moment linéaire Pp, la somme

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu$$

représente nécessairement le cosinus de l'angle compris entre les deux directions. Donc la première des deux équations (16) exprime que ce cosinus est nul, ou, ce qui revient au même, que les deux directions se coupent à angles droits. De même, puisque le rayon vecteur mené de l'origine au point d'application de la force P a pour projections algébriques sur les axes les coordonnées x, y, z, et forme par conséquent, avec les demi-axes des coordonnées positives, des angles qui ont pour cosinus respectifs

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}, \quad \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}, \quad \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}},$$

l'angle compris entre la direction de ce rayon vecteur et celle du moment linéaire aura évidemment pour cosinus

$$\frac{x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}.$$

Donc la seconde des équations (16), qu'on obtient en égalant ce cosinus à zéro, exprime que la direction du moment linéaire est perpendiculaire à celle du rayon vecteur. Ainsi, en partant de cette seule remarque, que le moment linéaire se compte sur une

droite perpendiculaire, non-seulement à la force P, mais encore au rayon vecteur, on aurait pu établir immédiatement les équations (16), desquelles on déduit la formule

$$(17)\qquad \frac{y\cos\gamma - z\cos\beta}{\cos\lambda} = \frac{z\cos\alpha - x\cos\gamma}{\cos\mu} = \frac{x\cos\beta - y\cos\alpha}{\cos\nu},$$

par l'élimination successive des trois coordonnées x, y, z. Ajoutons que l'équation (14) peut elle-même se démontrer directement. En effet, le rayon vecteur mené de l'origine au point d'application de la force P est représenté par

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)};$$

et l'angle que forme la direction de ce rayon vecteur avec celle de la force P, ayant pour cosinus

$$\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}},$$

aura nécessairement pour sinus

$$\left[1 - \frac{(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}{x^2+y^2+z^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{[x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}.$$

Or, en multipliant ce sinus par le rayon vecteur, on obtiendra évidemment pour produit la valeur de la perpendiculaire p, telle que la donne l'équation (14).

Des formules (14) et (17) réunies, on déduit facilement la formule (11). Pour y parvenir, il suffit de s'appuyer sur un théorème d'algèbre en vertu duquel l'équation

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \text{etc.},$$

entraîne toujours la suivante

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \text{etc.} \ldots\ldots = \pm\frac{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2+\ldots)}}{\sqrt{(b^2+b'^2+b''^2+\ldots)}}.$$

[*Voyez* l'*Analyse algébrique*, note II, 14.e théorème.] Ce théorème, appliqué à la formule (17), reproduit [en vertu de l'équation (14)] la formule (11); mais il ne donne pas le moyen de décider quel signe on doit attribuer, dans la formule (11), à la quantité p.

Concevons maintenant que plusieurs forces

$$P,\ P',\ P'', \ldots\ldots$$

se trouvent simultanément appliquées au point (A) qui a pour coordonnées x, y, z. Désignons par R leur résultante, et par

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'', \beta'', \gamma''; \ldots \quad a, b, c,$$

les angles que les directions des forces

$$P, \qquad P', \qquad P'', \ldots\ldots\ldots\ldots R.$$

forment avec les demi-axes des coordonnées positives. Les équations (4) deviendront

$$(18) \begin{cases} R(y\cos c - z\cos b) = P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y\cos\gamma' - z\cos\beta') + \text{etc.}, \\ R(z\cos a - x\cos c) = P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z\cos\alpha' - x\cos\gamma') + \text{etc.}, \\ R(x\cos b - y\cos a) = P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x\cos\beta' - y\cos\alpha') + \text{etc.} \end{cases}$$

Or, si l'on fait varier le point d'application de toutes les forces, en transportant toutes ces forces parallèlement à elles-mêmes, les seules coordonnées x, y, z, varieront dans les équations (18). Ces équations doivent donc subsister, lorsqu'on y considère les coordonnées x, y, z, comme indéterminées; et par conséquent les coëfficients de x, y, z, doivent avoir les mêmes valeurs dans les deux membres de chaque équation. En égalant deux à deux ces coëfficients, on retrouve les formules (8) de la page 41. Ainsi, les trois équations relatives aux moments des forces entraînent celles qui se rapportent aux projections. Réciproquement, les formules (8) [page 41] étant données, il est clair qu'on en déduira immédiatement les équations (18).

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le point (O), centre des moments, coïncidait avec l'origine des coordonnées. Imaginons à présent que l'on transporte ce même centre en un point (O') dont les coordonnées soient repectivement

$$x_0, y_0, z_0;$$

et cherchons à exprimer les projections algébriques du moment linéaire de la force P par le moyen des quantités

$$P; \quad \alpha, \beta, \gamma; \quad x, y, z; \quad x_0, y_0, z_0.$$

Pour y parvenir, on observera que, si l'on transportait à-la-fois le centre des moments et l'origine au point (O'), les coordonnées du point (A) par rapport à cette nouvelle origine étant alors exprimées par les différences

$$x - x_0, \; y - y_0, \; z - z_0,$$

les projections algébriques du moment linéaire de la force P par rapport à la même origine seraient égales [au signe près] aux trois produits

$$(19)\quad \begin{cases} P[(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta], \\ P[(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma], \\ P[(x-x_0)\cos\beta-(y-y_0)\cos\alpha]. \end{cases}$$

Ces trois derniers produits, pris avec le signe $+$ dans le cas où les mouvements de rotation directs ont lieu de droite à gauche autour des demi-axes des coordonnées positives, et avec le signe $-$ dans le cas contraire, représentent donc les projections algébriques du moment linéaire de la force P par rapport au point (O').

Lorsqu'on donne à-la-fois les projections algébriques d'une force et les projections algébriques de son moment linéaire, on peut aisément en conclure l'intensité de la force, la droite suivant laquelle elle agit, et le sens dans lequel elle est dirigée. En effet, soient P la force en question, Pp son moment linéaire, et $\alpha, \beta, \gamma;\ \lambda, \mu, \nu,$ les angles que la force et son moment linéaire forment avec les demi-axes des coordonnées positives. Si l'on suppose connues les six quantités

$$(20)\quad P\cos\alpha,\ P\cos\beta,\ P\cos\gamma,\ Pp\cos\lambda,\ Pp\cos\mu,\ Pp\cos\nu,$$

on en déduira immédiatement les valeurs des suivantes

$$(21)\quad P, \alpha, \beta, \gamma;\ Pp, \lambda, \mu, \nu,$$

c'est-à-dire, les intensités de la force et du moment linéaire, avec les angles qui déterminent leurs directions respectives, On pourra donc construire, 1.° le moment linéaire en grandeur et en direction; 2.° une force, non-seulement égale et parallèle à la force P, mais encore dirigée dans le même sens. Concevons cette force parallèle appliquée au centre des moments. Le plan mené par ce centre, perpendiculairement à la direction du moment linéaire, devra renfermer la force P et la force parallèle: et par conséquent, cette dernière devra couper à angles droits la direction du moment linéaire, ce qui aura lieu, si l'équation de condition

$$(22)\quad \cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0$$

est satisfaite. Cette condition étant supposée remplie, on divisera l'intensité Pp du moment linéaire par l'intensité de la force P, pour obtenir la perpendiculaire p abaissée sur la direction de cette force du centre des moments; puis l'on tracera, dans le plan dont nous venons de parler, deux droites parallèles à la force déjà cons-

truite, et situées, de part et d'autre du centre des moments, à la distance p. La force cherchée P devra nécessairement agir suivant une de ces parallèles, dans le même sens que la force déjà consruite, et de manière à faire tourner le plan de droite à gauche autour du centre des moments. L'obligation où l'on est de satisfaire à cette dernière condition, déterminera celle des deux parallèles que l'on doit préférer. Quant au point d'application de la force P sur cette parallèle, il restera complètement indéterminé; ce qu'il était facile de prévoir. Car, si l'on porte sur la même droite, mais à partir de deux points différents, deux forces égales et dirigées dans le même sens, leurs projections algébriques seront évidemment égales, et il en sera de même de leurs moments, ainsi que des projections algébriques de leurs moments linéaires.

Il est bon d'observer que l'équation (22), multipliée par P^2p, peut être présentée sous la forme

$$(23) \qquad P\cos\alpha . Pp\cos\lambda + P\cos\beta . Pp\cos\mu + P\cos\gamma . Pp\cos\nu = 0.$$

De plus, en attribuant des valeurs finies quelconques aux six quantités

$$P\cos\alpha,\quad P\cos\beta,\quad P\cos\gamma;$$
$$P\cos\lambda,\quad P\cos\mu,\quad P\cos\nu;$$

on en déduit évidemment des valeurs finies pour les suivantes

$$P,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma;$$
$$Pp,\ \lambda,\ \mu,\ \nu;$$

et même pour la quantité

$$p = \frac{Pp}{P};$$

à moins toutefois que la force P ne s'évanouisse, auquel cas ses projections algébriques sont toutes nulles simultanément. Donc, lorsqu'on fait abstraction de ce cas particulier, la seule condition nécessaire pour que six quantités, prises au hasard, puissent être censées représenter, 1.° les projections algébriques d'une force; 2.° les projections algébriques de son moment linéaire, se réduit à celle que fournit l'équation (23), c'est-à-dire, à l'évanouissement de la somme qu'on obtient en multipliant deux à deux les projections algébriques correspondantes, puis ajoutant les produits ainsi formés.

En vertu des principes que nous venons d'établir, il est clair que, si, plusieurs forces étant appliquées au même point, on donne, 1.° les sommes

$$X,\ Y,\ Z$$

de leurs projections algébriques sur les axes des x, y et z; 2.° les sommes

$$L, M, N$$

des projections algébriques de leurs moments linéaires sur les mêmes axes, on pourra déterminer l'intensité de la résultante, la droite suivant laquelle elle agit, et le sens dans lequel elle est dirigée. Comme les six quantités

$$X, Y, Z;$$
$$L, M, N,$$

représenteront précisément les projections algébriques de cette résultante et de son moment linéaire, on devra obtenir une somme nulle, en les multipliant deux à deux et ajoutant les produits. On aura donc

$$LX + MY + NZ = 0. \tag{24}$$

De plus, la résultante ne pourra s'évanouir que dans le cas particulier où les trois quantités

$$X, Y, Z$$

seraient nulles simultanément. Soient toujours R cette résultante, Rr son moment linéaire, et a, b, c; l, m, n, les angles formés par sa direction et par celle du moment linéaire avec les demi-axes des coordonnées positives. La valeur de R, déterminée par la formule (11) de la page 41, sera finie et différente de zéro, à moins que les quantités X, Y, Z, ne s'évanouissent à-la-fois. Si l'on fait abstraction de ce cas particulier, les quantités

$$a, b, c, r$$

auront toujours des valeurs finies, déterminées par les formules (12) de la page 41, et par la suivante

$$r = \frac{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}{R} = \frac{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}; \tag{25}$$

et il en sera encore de même des valeurs de l, m, n, fournies par les équations (6), à moins toutefois que r ne s'évanouisse, c'est-à-dire, à moins que les trois quantités

$$L, M, N$$

ne deviennent nulles en même temps. Mais, dans ce dernier cas, le moment linéaire

se réduisant à zéro, il n'y aurait plus lieu de chercher les angles $l, m, n,$ que sa direction fait avec les demi axes des coordonnées positives. Dans la même hypothèse, la force R agirait suivant une droite menée par le centre des moments, de manière à former avec ces demi-axes les angles a, b, c. Ajoutons que, dans le cas général, la direction du moment linéaire Rr devant être perpendiculaire à celle de la résultante R, les valeurs de $a, b, c, l, m, n,$ doivent vérifier l'équation de condition

$$\cos a \cos l + \cos b \cos m + \cos c \cos n = 0. \tag{26}$$

Or, cette équation, en vertu des formules (12) [page 41] et des formules (6), se réduit à

$$\frac{LX + MY + NZ}{R^2 r} = 0, \tag{27}$$

et par conséquent à l'équation (24).

Les valeurs de $X, Y, Z, L, M, N,$ ou, ce qui revient au même, celles des quantités $R, a, b, c, r, l, m, n,$ supposées connues, ne suffisent pas pour déterminer le point d'application de la force R. Soient $\xi, \eta, \zeta,$ les coordonnées de ce même point. Si l'on adopte, pour les demi-axes des coordonnées positives, la disposition la plus ordinaire, on pourra donner aux équations (3) la forme suivante

$$\left\{\begin{array}{l} R(\eta \cos c - \zeta \cos b) = L, \\ R(\zeta \cos a - \xi \cos c) = M, \\ R(\xi \cos b - \eta \cos a) = N. \end{array}\right. \tag{28}$$

On en conclura, en ayant égard aux formules (9) de la page 41,

$$\left\{\begin{array}{l} Z\eta - Y\zeta = L, \\ X\zeta - Z\xi = M, \\ Y\xi - X\eta = N. \end{array}\right. \tag{29}$$

Il semble, au premier abord, que ces trois dernières équations fournissent les moyens de déterminer les trois inconnues ξ, η, ζ en fonction des six quantités X, Y, Z, L, M, N. Mais il faut observer que, si l'on ajoute les équations (29), après avoir multiplié la première par X, la seconde par Y, la troisième par Z, on retrouvera la condition (24). Cette condition devant toujours être remplie par les valeurs données des quantités $X, Y, Z, L, M, N,$ il en résulte que deux des équations (29) entraînent la troisième. Donc il n'existera en réalité que deux équations entre les coordonnées ξ, η, ζ. Ces deux équations étant du premier degré, les différens systèmes de valeurs qu'elles fourniront pour les coordonnées ξ, η, ζ correspondront à des points situés

sur une même droite. Cette droite sera précisément celle suivant laquelle agit la résultante R. Sa projection sur le plan des y, z sera représentée par la première des équations (29), sur le plan des z, x, par la seconde, et sur le plan des x, y, par la troisième. Si l'on fait passer une parallèle à cette même droite par l'origine des coordonnées, les trois équations de la parallèle seront respectivement

$$(30) \qquad \eta Z - \zeta Y = 0, \quad \zeta X - \xi Z = 0, \quad \xi Y - \eta X = 0,$$

et pourront être remplacées par la formule

$$(31) \qquad \frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta}{Z},$$

à laquelle on parviendrait directement en observant que cette parallèle est précisément la droite suivant laquelle agirait une force qui, appliquée à l'origine, aurait pour projections algébriques sur les axes, les quantités X, Y, Z.

Si l'on plaçait le centre des moments au point qui a pour coordonnées x_0, y_0, z_0, les équations (29) se trouveraient remplacées par les suivantes

$$(32) \qquad \begin{cases} (\eta - y_0) Z - (\zeta - z_0) Y = L, \\ (\zeta - z_0) X - (\xi - x_0) Z = M, \\ (\xi - x_0) Y - (\eta - y_0) X = N. \end{cases}$$

En supposant le même point situé sur la direction de la force R, on aurait à-la-fois

$$(33) \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

ce qui permettrait de substituer aux équations (32) la formule

$$(34) \qquad \frac{\xi - x_0}{X} = \frac{\eta - y_0}{Y} = \frac{\zeta - z_0}{Z}$$

de laquelle on tire immédiatement la suivante

$$(35) \qquad \frac{\xi - x_0}{\cos a} = \frac{\eta - y_0}{\cos b} = \frac{\zeta - z_0}{\cos c}.$$

cette dernière présente, sous la forme la plus simple, les équations d'une droite qui passe par le point dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0, et qui, prolongée dans un certain sens, forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles a, b, c.

Dans d'autres articles, nous appliquerons la théorie des moments linéaires à différentes questions de statique ou de dynamique.

DE L'INFLUENCE QUE PEUT AVOIR,

SUR LA VALEUR D'UNE INTÉGRALE DOUBLE,

L'ORDRE DANS LEQUEL ON EFFECTUE LES INTÉGRATIONS.

Dans mon premier Mémoire sur les intégrales définies, présenté à l'Institut le 22 août 1814, j'ai remarqué qu'une intégaale double devient quelquefois indéterminée, et qu'alors elle prend deux valeurs différentes suivant l'ordre qu'on établit entre les deux intégrations. Or, la différence de ces deux valeurs peut être calcnlée directement, lorsqu'l s'agit de cas particuliers. Mais on peut aussi la déterminer en général et *à priori*, à l'aide des intégrales singulières dont j'ai développé la théorie dans le Mémoire de 1814, dans le Bulletin de la Société philomatique de 1822, et dans le résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal. Je vais revenir un instant sur cette détermination, et je m'attacherai de préférence à quelques intégrales doubles dont la considération fournit les moyens d'évaluer un grand nombre d'intégrales définies.

Soient $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ deux fonctions propres à vérifier l'équation

$$(1)\qquad \frac{d\varphi(x,y)}{dx} = \frac{d\chi(x,y)}{dy}.$$

Désignons d'ailleurs par $\mathrm{F}(x,y)$ l'un quelconque des deux membres de l'équation (1), par x_0, X deux valeurs réelles de la variable x, et par y_0, Y deux valeurs réelles de la variable y. Si la fonction $\mathrm{F}(x,y)$ reste finie et continue pour toutes les valeurs des variables x et y renfermées entre les limites $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$, on aura

$$(2)\qquad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\mathrm{F}(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\mathrm{F}(x,y)\,dx\,dy,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3)\qquad \int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\,dx = \int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y)-\chi(x_0,y)]\,dx.$$

Si, au contraire, la fonction $F(x,y)$ devient infinie ou indéterminée pour un ou plusieurs systèmes de valeurs de x et de y compris entre les limites x_0, X; y_0, Y, l'équation (3) cessera d'être exacte, et l'on aura

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} F(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} F(x,y)\,dx\,dy - \Delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \qquad \int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\,dx = \int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y)-\chi(x_0,y)]\,dy - \Delta;$$

Δ désignant la somme de plusieurs intégrales singulières [voyez la 34.ᵉ Leçon de calcul infinitésimal]. Concevons, pour fixer les idées, que les systèmes de valeurs qui, entre les limites ci-dessus mentionnées, rendent la fonction $F(x,y)$ indéterminée ou infinie, se réduisent à un seul, savoir, $x=\xi$, $y=\eta$. Alors, en représentant par ε une quantité infiniment petite, on trouvera [voyez encore la 34.ᵉ Leçon de calcul infinitésimal]

$$(6) \qquad \Delta = \lim \int_{y_0}^{Y}[\chi(\xi+\varepsilon,y)-\chi(\xi-\varepsilon,y)]\,dy.$$

Il importe d'observer que la condition (1) sera toujours vérifiée, si l'on prend

$$(7) \qquad \varphi(x,y)=f(z)\frac{dz}{dx}, \qquad \chi(x,y)=f(z)\frac{dz}{dy},$$

z désignant une fonction réelle ou imaginaire des variables x, y. Supposons en particulier

$$(8) \qquad z=x+y\sqrt{-1}, \qquad f(z)=\frac{1}{(z-a-b\sqrt{-1})^m},$$

a, b désignant deux constantes réelles, et m un nombre entier quelconque. Les formules (7) donneront

$$(9) \qquad \varphi(x,y)=\frac{1}{[x-a+(y-b)\sqrt{-1}]^m}, \qquad \chi(x,y)=\frac{\sqrt{-1}}{[x-a+(y-b)\sqrt{-1}]^m},$$

et la valeur de Δ, déterminée immédiatement par l'intégration, sera l'une de celles que nous allons indiquer.

Considérons d'abord le cas où le nombre m se réduit à l'unité. Dans ce cas, on a évidemment $\xi=a$, $\eta=b$.

$$(10)\qquad \varphi(x,y)=\frac{1}{x-a+(y-b)\sqrt{-1}},\qquad \chi(x,y)=\frac{\sqrt{-1}}{x-a+(y-b)\sqrt{-1}},$$

et l'on tire de l'équation (5)

$$(11)\qquad \Delta=\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left(\frac{1}{X-a+(y-b)\sqrt{-1}}-\frac{1}{x_0-a+(y-b)\sqrt{-1}}\right)dy$$
$$-\int_{x_0}^{X}\left(\frac{1}{x-a+(Y-b)\sqrt{-1}}-\frac{1}{x-a+(y_0-b)\sqrt{-1}}\right)dx,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12)\qquad \Delta=\int_{y_0}^{Y}\frac{(y-b)dy}{(X-a)^2+(y-b)^2}-\int_{y_0}^{Y}\frac{(y-b)dy}{(x_0-a)^2+(y-b)^2}$$
$$-\int_{x_0}^{X}\frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+(Y-b)^2}+\int_{x_0}^{X}\frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+(y_0-b)^2}$$
$$+\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{y_0}^{Y}\frac{(X-a)dy}{(X-a)^2+(y-b)^2}+\int_{y_0}^{Y}\frac{(a-x_0)dy}{(a-x_0)^2+(y-b)^2}\\ \displaystyle+\int_{x_0}^{X}\frac{(Y-b)dx}{(x-a)^2+(Y-b)^2}+\int_{x_0}^{X}\frac{(b-y_0)dx}{(x-a)^2+(b-y_0)^2}\end{array}\right\}.$$

Si maintenant on effectue les intégrations indiquées, on reconnaîtra que, dans la formule (12), la partie réelle du second membre s'évanouit, et l'on trouvera simplement

$$(13)\qquad \Delta=\left\{\begin{array}{l}\operatorname{arctang}\frac{Y-b}{X-a}+\operatorname{arctang}\frac{b-y_0}{X-a}+\operatorname{arctang}\frac{Y-b}{a-x_0}+\operatorname{arctang}\frac{b-y_0}{a-x_0}\\ +\operatorname{arctang}\frac{X-a}{Y-b}+\operatorname{arctang}\frac{X-a}{b-y_0}+\operatorname{arctang}\frac{a-x_0}{Y-b}+\operatorname{arctang}\frac{a-x_0}{b-y_0}\end{array}\right\}\sqrt{-1},$$

pourvu que l'on adopte les notations dont nous nous sommes toujours servis, et que l'on désigne par $\operatorname{arctang} x$ celui des arcs compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$, qui a pour tangente la variable x. Enfin, comme, en admettant ces notations, on aura pour des valeurs positives de x

$$\text{arctang}\, x + \text{arctang}\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

et pour des valeurs négatives de x

$$\text{arctang}\, x + \text{arctang}\, \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

on conclura de l'équation (13), en supposant a renfermé entre les limites x_0, X, et b entre les limites y_0, Y,

(14) $$\Delta = 2\pi\sqrt{-1};$$

au contraire, on trouvera, comme on devait s'y attendre,

(15) $$\Delta = 0,$$

si la quantité a est située hors des limites x_0, X, ou la quantité b hors des limites y_0, Y. Alors, en effet, les fonctions $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ déterminées par les formules (10), et par suite la fonction $F(x,y)$ cessent de prendre des valeurs infinies entre les limites $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$. Donc alors la formule (5) doit se réduire à l'équation (3).

Si la quantité a était équivalente à l'une des limites x_0, X, la quantité b restant comprise entre y_0, et Y, ou si la quantité b était équivalente à l'une des limites y_0, Y, la quantité a demeurant comprise entre x_0 et X, l'une des quatre premières intégrales de la formule (12), et par suite la partie réelle de Δ deviendraient indéterminées. Mais, en réduisant les intégrales comprises dans les formules (11) et (12) à leurs valeurs *principales*, on ferait encore disparaître la partie réelle de Δ, et l'on tirerait de la formule (12)

(16) $$\Delta = \pi\sqrt{-1}.$$

Concevons, par exemple, que l'on ait $a = X$, et que b soit renfermé entre les limites y_0, Y. L'intégrale

(17) $$\int_{y_0}^{Y} \frac{(y-b)\,dy}{(X-a)^2 + (y-b)^2} = \int_{y_0}^{Y} \frac{dy}{y-b}$$

aura une valeur générale indéterminée [voyez les 24.e et 25.e Leçons de calcul infinitésimal]. Mais, si l'on réduit cette intégrale à sa valeur principale, c'est-à-dire, à $l\left(\frac{Y-b}{b-y_0}\right)$, l'on tirera de la formule (12)

(18) $$\Delta =$$

$$\sqrt{-1}\left\{\int_{y_0}^{Y}\frac{(a-x_0)\,dx}{(a-x_0)^2+(y-b)^2}+\int_{x_0}^{X}\frac{(Y-b)\,dx}{(x-a)^2+(Y-b)^2}+\int_{x_0}^{X}\frac{(b-y_0)\,dx}{(x-a)^2+(b-y_0)^2}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\operatorname{arctang}\frac{Y-b}{a-x_0}+\operatorname{arctang}\frac{b-y_0}{a-x_0}\\ +\operatorname{arctang}\frac{a-x_0}{Y-b}+\operatorname{arctang}\frac{a-x_0}{b-y_0}\end{array}\right\}\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même, $\Delta=\pi\sqrt{-1}$. Il est bon d'observer que la valeur de Δ, fournie par l'équation (18), deviendrait nulle, si la quantité b cessait d'être renfermée entre les limites y_0, Y.

Si les quantités a et b étaient à-la-fois équivalentes, la première à l'une des limites x_0, X, la seconde à l'une des limites y_0, Y, il ne suffirait plus, pour faire disparaître la partie réelle de Δ, de réduire chacune des intégrales comprises dans les formules (11) et (12) à sa valeur principale. Concevons, pour fixer les idées, que l'on ait en même temps

(19) $$a=X,\quad b=Y;$$

et de plus $x_0<X$, $y_0<Y$. Alors, dans le second membre de la formule (12), les deux intégrales

(20) $$\int_{y_0}^{Y}\frac{(y-b)\,dy}{(X-a)^2+(y-b)^2}=\int_{y_0}^{b}\frac{dy}{x-b},\quad \int_{x_0}^{X}\frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+(Y-b)^2}=\int_{x_0}^{a}\frac{dx}{x-a},$$

deviendront infinies, et leur différence indéterminée. Mais, si, dans les formules (11) et (12), l'on remplace les limites supérieures des intégrales relatives à x et à y, savoir, X et Y par les quantités $a-\varepsilon$ et $b-\varepsilon$, ε désignant un nombre infiniment petit, ou, en d'autres termes, si l'on suppose Δ déterminé par l'équation

(21) $$\Delta =$$

$$\sqrt{-1}\int_{y_0}^{b-\varepsilon}\left(\frac{1}{(y-b)\sqrt{-1}}-\frac{1}{x_0-a+(y-b)\sqrt{-1}}\right)dy-\int_{x_0}^{a-\varepsilon}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-a+(Y-b)\sqrt{-1}}\right)dx,$$

la formule (12) se trouvera réduite à

$$(22)\quad \Delta = \int_{y_0}^{b-\varepsilon} \frac{dy}{y-b} - \int_{y_0}^{b-\varepsilon} \frac{(y-b)\,dy}{(x_0-a)^2+(y-b)^2} - \int_{x_0}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{x-a} + \int_{x_0}^{a-\varepsilon} \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+(y_0-b)^2}$$

$$+\sqrt{-1}\left\{\int_{y_0}^{b-\varepsilon} \frac{(a-x_0)\,dy}{(a-x_0)^2+(y-b)^2} + \int_{x_0}^{a-\varepsilon} \frac{(b-y_0)\,dx}{(x-a)^2+(b-y_0)^2}\right\}.$$

Si maintenant, après avoir effectué les intégrations indiquées dans la formule (22), on suppose $\varepsilon = 0$, on trouvera

$$(23)\qquad \Delta = \left\{\text{arctang}\,\frac{b-y_0}{a-x_0} + \text{arctang}\,\frac{a-x_0}{b-y_0}\right\}\sqrt{-1},$$

et par conséquent

$$(24)\qquad \Delta = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}.$$

On arrivera généralement au même résultat, si, la quantité a étant équivalente à l'une des valeurs x_0, X de la variable x, et la quantité b à l'une des valeurs y_0, Y de la variable y, on remplace, dans les formules (11) et (12), la limite x_0 ou X des intégrales relatives à x par $a \pm \varepsilon$, et la limite y_0 ou Y des intégrales relatives à y par $b \pm \varepsilon$.

Concevons à présent que, les fonctions $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ étant déterminées par les équations (9), on laisse au nombre entier m une valeur quelconque. On tirera de la formule (5)

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta = {} & \int_{y_0}^{Y} \frac{\sqrt{-1}.dy}{[X-a+(y-b)\sqrt{-1}]^m} - \int_{y_0}^{Y} \frac{\sqrt{-1}.dy}{[x_0-a+(y-b)\sqrt{-1}]^m} \\ & - \int_{x_0}^{Y} \frac{dx}{[x-a+(Y-b)\sqrt{-1}]^m} + \int_{x_0}^{Y} \frac{dx}{[x-a+(y_0-b)\sqrt{-1}]^m} \end{aligned}\right\};$$

puis on en conclura, en effectuant les intégrations

$$(26)\qquad \Delta = 0.$$

Toutefois, la valeur de Δ pourrait cesser d'être nulle, si la quantité a était équivalente à l'une des limites x_0, X, la quantité b restant comprise entre y_0 et Y, ou si la quantité b était équivalente à l'une des limites y_0, Y, la quantité a de

meurant comprise entre x_0 et X. Supposons, par exemple, $a = X$, b étant renfermé entre les limites y_0, Y. Alors l'intégrale

$$(27) \qquad \int_{y_0}^{Y} \frac{\sqrt{-1}.dy}{[X-a+(y-b)\sqrt{-1}]^m} = \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^{m-1} \int_{y_0}^{Y} \frac{dy}{(y-b)^m},$$

deviendra infinie, si m est un nombre pair, et indéterminée, si m est un nombre impair. Dans le premier cas, la valeur de Δ sera infinie. Dans le second, elle sera indéterminée; mais, pour la rendre nulle, il suffira de réduire les intégrales comprises dans la formule (25) à leurs valeurs principales. Les mêmes remarques s'appliquent aux autres suppositions précédemment indiquées. Dans chacune de ces suppositions, pour que la valeur de Δ, fournie par l'équation (25), s'évanouisse, il est nécessaire, et il suffit 1.° que le nombre m soit un nombre impair, 2.° que l'on réduise les intégrales renfermées dans le second membre de l'équation à leurs valeurs principales.

Si les quantités a et b étaient à-la-fois équivalentes, la première à l'une des limites x_0, X, la seconde à l'une des limites y_0, Y, il ne suffirait plus, pour faire disparaître la partie réelle de Δ, de réduire les intégrales comprises dans la formule (25) à leurs valeurs principales. Concevons, pour fixer les idées, que l'on ait en même temps

$$(19) \qquad a = X, \quad b = Y,$$

et de plus $x_0 < X$, $y_0 < Y$. Alors, dans le second membre de la formule (25), les deux intégrales

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{y_0}^{Y} \frac{\sqrt{-1}.dy}{[X-a+(y-b)\sqrt{-1}]^m} = \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^{m-1} \int_{y_0}^{b} \frac{dy}{(y-b)^m}, \\ \displaystyle\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{[x-a+(Y-b)\sqrt{-1}]^m} = \int_{x_0}^{X} \frac{dy}{(x-a)^m}, \end{array} \right.$$

deviendront infinies; et leur différence, savoir,

$$(30) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^{m-1} \int_{y_0}^{b} \frac{dy}{(y-b)^m} - \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{(x-a)^m}$$

deviendra infinie, si le nombre entier m — 1, divisé par 4, donne pour reste 1, 2 ou 3, et indéterminée, si m — 1 est un multiple de 4. Ajoutons que, si, dans le dernier cas, on effectue les intégrations relatives à x et à y, non plus entre les

limites $x = x_0$, $x = a$, $y = y_0$, $y = b$, mais entre les limites $x = x_0$, $x = a - \varepsilon$, $y = y_0$, $y = b - \varepsilon$, ε désignant un nombre infiniment petit, la formule (25) sera remplacée par la suivante

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta = & \int_{y_0}^{b-\varepsilon} \frac{\sqrt{-1}.dy}{[(y-b)\sqrt{-1}]^m} - \int_{y_0}^{b-\varepsilon} \frac{\sqrt{-1}.dy}{[x_0 - a + (y-b)\sqrt{-1}]^m} \\ & - \int_{x_0}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)^m} + \int_{x_0}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{[x - a + (y_0 - b)\sqrt{-1}]^m}, \end{aligned} \right.$$

de laquelle, en posant après les intégrations $\varepsilon = 0$, on tirera encore

$$(26) \qquad \Delta = 0.$$

On arriverait généralement au même résultat, si, la quantité a étant réduite à l'une des valeurs x_0, X de la variable x, la quantité b à l'une des valeurs y_0, Y de la variable y, et le nombre $m - 1$ à un multiple de 4, on remplaçait, dans le second membre de la formule (25), la limite x_0 ou X des intégrales relatives à x par $a \pm \varepsilon$, et la limite y_0 ou Y des intégrales relatives à y par $b \pm \varepsilon$.

En résumant tout ce qui a été dit ci-dessus relativement aux valeurs de Δ déterminées par les équations (11) et (25), on obtient immédiatement les deux théorêmes que nous allons énoncer.

1.er Théorème. *Soient a, b deux quantités réelles; x_0, X deux limites réelles de la variable x; y_0, Y deux limites réelles de la variable y; et Δ une expression imaginaire dont la valeur soit fixée par l'équation*

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta = \sqrt{-1} & \int_{y_0}^{Y} \left(\frac{1}{X - a + (y-b)\sqrt{-1}} - \frac{1}{x_0 - a + (y-b)\sqrt{-1}} \right) dy \\ & - \int_{x_0}^{X} \left(\frac{1}{x - a + (Y-b)\sqrt{-1}} - \frac{1}{x - a + (y_0 - b)\sqrt{-1}} \right) dx. \end{aligned} \right.$$

On aura

$$\Delta = 0,$$

si la quantité a est située hors des limites x_0, X, ou la quantité b hors des limites y_0, Y. On trouvera au contraire

$$\Delta = 2\pi\sqrt{-1},$$

si l'on suppose à-la-fois la quantité a *renfermée entre les limites* x_0, X *et la quantité* b *entre les limites* y_0, Y. *De plus, si, dans la dernière hypothèse, l'une des différences*

$$X - a, \quad a - x_0, \qquad Y - b, \quad b - y_0,$$

devient précisément égale à zéro, on aura simplement

$$\Delta = \pi\sqrt{-1},$$

pourvu que, dans le second membre de la formule (11), *on réduise l'intégrale qui deviendra indéterminée à sa valeur principale. Enfin, si deux des différences*

$$X - a, \quad a - x_0, \qquad Y - b, \quad b - y_0,$$

s'évanouissent simultanément, on aura

$$\Delta = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1},$$

pourvu que, dans le second membre de la formule (11), *on remplace la limite* x_0 *ou* X *de l'intégrale relative à* x *par* $a \pm \varepsilon$, *la limite* y_0 *ou* Y *de l'intégrale relative à* y *par* $b \pm \varepsilon$, *et le nombre* ε *par zéro après les intégrations effectuées.*

2.ᵉ Théorème. *Soient toujours* a, b *deux quantités réelles;* x_0, X *deux limites réelles de la variable* x*; et* y_0, Y *deux limites réelles de la variable* y. *Soient en outre* m *un nombre entier quelconque, et* Δ *une expression imaginaire dont la valeur se déduise de l'équation*

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta = &\int_{y_0}^{Y} \frac{\sqrt{-1}.dy}{[X-a+(y-b)\sqrt{-1}]^m} - \int_{y_0}^{Y} \frac{\sqrt{-1}.dy}{[x_0-a+(y-b)\sqrt{-1}]^m} \\ &- \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{[x-a+(Y-b)\sqrt{-1}]^m} + \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{[x-a+(y_0-b)\sqrt{-1}]^m} \end{aligned}\right\}.$$

On aura

$$\Delta = 0,$$

si aucune des différences

$$X - a, \quad a - x_0, \qquad Y - b, \quad b - y_0,$$

ne devient égale à zéro. Si l'une de ces différences s'évanouit, Δ *prendra une*

valeur infinie ou indéterminée, suivant que m *sera un nombre pair ou un nombre impair; et, dans le dernier cas, on pourra faire évanouir* Δ, *en réduisant, dans le second membre de la formule* (25), *l'intégrale qui deviendra indéterminée à sa valeur principale. Enfin, si deux des différences*

$$X-a,\quad a-x_0,\qquad Y-b,\quad b-y_0,$$

s'évanouissent simultanément, Δ *prendra une valeur infinie ou indéterminée, suivant que le nombre* $\mathrm{m}-1$ *sera ou ne sera pas divisible par* 4, *et, dans le dernier cas, on pourra encore faire évanouir* Δ, *en remplaçant la limite* x_0 *ou* X *des intégrales relatives à* x *par* $a\pm\varepsilon$, *la limite* y_0 *ou* Y *des intégrales relatives à* y *par* $b\pm\varepsilon$, *et le nombre* ε *par zéro après les intégrations effectuées.*

Si l'on suppose que des quatre quantités x_0, y_0, X, Y, les deux premières soient négatives et les deux dernières positives, alors, en posant $a=0$, $b=0$, dans les théorêmes 1 et 2, on en tirera

$$(31)\quad \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left(\frac{1}{X+y\sqrt{-1}}-\frac{1}{x_0+y\sqrt{-1}}\right)dy-\int_{x_0}^{X}\left(\frac{1}{x+Y\sqrt{-1}}-\frac{1}{x+y_0\sqrt{-1}}\right)dx=2\pi\sqrt{-1},$$

$$(32)\quad \int_{y_0}^{Y}\frac{\sqrt{-1}.dy}{(X+y\sqrt{-1})^{\mathrm{m}}}\quad\int_{y_0}^{Y}\frac{\sqrt{-1}.dy}{(x_0+y\sqrt{-1})^{\mathrm{m}}}-\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{(x+Y\sqrt{-1})^{\mathrm{m}}}-\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{(x+y_0\sqrt{-1})^{\mathrm{m}}}=0.$$



SUR DIVERSES RELATIONS QUI EXISTENT

ENTRE LES RÉSIDUS DES FONCTIONS

ET LES INTÉGRALES DÉFINIES.

Soit $f(x)$ une fonction donnée de x. Si l'on pose

$$(1) \qquad f(x) - \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z} = \varpi(x),$$

la fonction $\varpi(x)$ [voyez les pages 21 et 22] conservera en général une valeur finie pour toutes les valeurs finies, réelles ou imaginaires de la variable x. Par suite, si l'on intègre, par rapport aux variables x et y, les deux membres de l'équation identique

$$(2) \qquad \frac{d\varpi(x+y\sqrt{-1})}{dy} = \sqrt{-1}\,\frac{d\varpi(x+y\sqrt{-1})}{dx},$$

entre les limites $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$, on trouvera

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{X}[\varpi(x+Y\sqrt{-1})-\varpi(x+y_0\sqrt{-1})]dx = \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[\varpi(X+y\sqrt{-1})-\varpi(x_0+y\sqrt{-1})]dy;$$

puis, en remettant pour $\varpi(x)$ sa valeur tirée de l'équation (1), on aura

$$(4) \qquad \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})]dy - \int_{x_0}^{X}[f(x+Y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})]dx = \Delta,$$

la valeur de Δ étant

(5) $$\Delta =$$

$$\mathcal{E}((f(z)))\left\{\sqrt{-1}\int_{y_0}^{X}\left(\frac{1}{X-z+y\sqrt{-1}}-\frac{1}{x_0-z+y\sqrt{-1}}\right)dy-\int_{x_0}^{X}\left(\frac{1}{x-z+Y\sqrt{-1}}-\frac{1}{x-z+y_0\sqrt{-1}}\right)dx\right\}$$

Soit maintenant $z=a+b\sqrt{-1}$ une quelconque des valeurs de z propres à vérifier l'équation

(6) $$\frac{1}{f(z)}=0;$$

et supposons que cette équation n'ait pas de racines égales, dont la valeur commune soit $a+b\sqrt{-1}$. En vertu du théorème 1.[er] de la page 92, la valeur de la différence

(7) $$\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left(\frac{1}{X-z+y\sqrt{-1}}-\frac{1}{x_0-z+y\sqrt{-1}}\right)dy-\int_{x_0}^{X}\left(\frac{1}{x-z+Y\sqrt{-1}}-\frac{1}{x-z+y_0\sqrt{-1}}\right)dx,$$

correspondante à $z=a+b\sqrt{-1}$, se réduira simplement à zéro, si la quantité a est située hors des limites x_0, X, ou la quantité b hors des limites y_0, Y; et à $2\pi\sqrt{-1}$, si les quantités a, b restent comprises, la première entre x_0 et X. le seconde entre y_0 et Y, sans vérifier aucune des conditions

(8) $$a=x_0,\quad a=X,$$ (9) $$b=y_0,\quad b=Y.$$

Donc, si l'équation (6) n'a point de racines égales, ni de racines dans lesquelles la partie réelle coïncide avec l'une des limites x_0, X, ou le coëfficient de $\sqrt{-1}$ avec l'une des limites y_0, Y, on pourra, dans le second membre de la formule (5), remplacer généralement l'expression (7) par $2\pi\sqrt{-1}$, pourvu que l'on écrive à droite et à gauche de la caractéristique $\mathcal{E}$, comme on l'a déjà fait à la page 15, les quantités x_0, X, y_0, Y, afin de resserrer le résidu intégral entre les limites convenables. On aura donc alors

(10) $$\Delta=2\pi\sqrt{-1}\;{}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(z))),$$

et par suite, l'équation (4) donnera

(11) $$\left\{\begin{aligned}&\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})]dy-\int_{x}^{X}[f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})]dx\\&=2\pi\sqrt{-1}\;{}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(z))).\end{aligned}\right.$$

Concevons maintenant que $z=a+b\sqrt{-1}$, étant une des racines inégales de l'équation (6), vérifie l'une des conditions (8), ou l'une des conditions (9). Les formules (4) et (5) continueront de subsister, si, dans chacune d'elles, on réduit l'intégrale indéterminée à sa valeur principale. De plus, en vertu du théorême déjà rappelé, la valeur de l'expression (7) correspondante à $z=a+b\sqrt{-1}$, sera zéro, si la quantité a est située hors des limites x_0, X, ou la quantité b hors des limites y_0, Y, et $\pi\sqrt{-1}$ dans le cas contraire. Donc, lorsque la racine $z=a+b\sqrt{-1}$ vérifie l'une des conditions (8) ou (9), l'expression (7) prend toujours la moitié de la valeur qu'elle aurait dans le cas contraire. D'ailleurs nous avons remarqué [page 17] que, dans le résidu intégral

$$(12) \qquad {}_{x_0}\overset{X}{\mathcal{E}}{}_{y_0}^{Y}((f(z))),$$

le résidu partiel relatif à une semblable racine doit être pareillement réduit à la moitié de sa valeur. Donc, si l'équation (6) admet des racines de cette espèce, la formule (11) continuera de subsister, pourvu que l'on y réduise l'intégrale qui deviendra indéterminée à sa valeur principale.

Concevons encore que la valeur $z=a+b\sqrt{-1}$, étant une des racines inégales de l'équation (6), vérifie tout-à-la-fois l'une des conditions (8) et l'une des conditions (9). Les intégrales comprises dans les formules (4) et (5) deviendront infinies. De plus, ces formules continueront de subsister, si l'on remplace la limite x_0 ou X de l'intégrale relative à x par $a\pm\varepsilon$, la limite y_0 ou Y de l'intégrale relative à y par $b\pm\varepsilon$, et le nombre ε par zéro après les intégrations effectuées. Ajoutons qu'en vertu du théorême déjà rappelé, la valeur de l'expression (7), correspondante à $z=a+b\sqrt{-1}$, se réduira simplement à $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, au quart de la valeur qu'elle recevrait si les quantités a, b demeuraient comprises, la première entre x_0 et X, la seconde entre y_0 et Y. Or, nous avons remarqué [page 17] que, dans l'expression (12), le résidu partiel relatif à une racine de l'équation (6) devait être précisément réduit au quart de sa valeur, lorsque, dans cette racine, la partie réelle coïncidait avec une des limites x_0, X, et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ avec une des limites y_0, Y. Donc, si l'équation (6) admet des racines de cette espèce, la formule (11) continuera de subsister, pourvu que les limites des intégrales relatives à x et à y subissent les modifications ci-dessus indiquées. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que, pour obtenir le résultat auquel ces modifications conduisent, il suffit de rapprocher l'une de l'autre les deux limites de chaque intégration, en diminuant ou augmentant chacune de ces limites de la quantité infiniment petite ε, puis de faire, après les intégrations effectuées, $\varepsilon=0$.

La formule (11), établie comme on vient de le dire, suppose évidemment que la

fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ conserve une valeur unique et déterminée, au moins pour toutes les valeurs réelles des variables x, y comprises entre les limites $x=x_0$, $x=X$; $y=y_0$, $y=Y$. Cela posé, en résumant ce qui précède, on obtiendra immédiatement le théorème que nous allons énoncer.

1.er Théorème. *Soient x, y deux variables réelles, et $z=x+y\sqrt{-1}$ une variable imaginaire. Soient d'ailleurs x_0, X deux limites réelles de la variable x; y_0, Y deux limites réelles de la variable y; et $f(z)$ une fonction réelle ou imaginaire de z, qui conserve une valeur unique et déterminée pour toutes les valeurs de x et de y comprises entre les limites $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$. Si l'équation*

$$(6) \qquad \frac{1}{f(z)}=0$$

n'a pas de racines égales, on aura en général

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})]dy-\int_{x_0}^{X}[f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})]dx \\ =2\pi\sqrt{-1}\,\underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}\underset{y_0}{\overset{Y}{}}((f(z))). \end{array} \right.$$

Ajoutons que si, dans la formule (11), l'une des deux intégrales devient indéterminée, il faudra la réduire à sa valeur principale; et que, si elles deviennent toutes deux infinies, on devra rapprocher l'une de l'autre les limites de chaque intégrale, en faisant croître ou décroître ces limites de la quantité infiniment petite ε, et supposer, après les intégrations effectuées, $\varepsilon=0$.

Supposons maintenant que l'équation (6) ait plusieurs racines égales, dont la valeur commune soit $z=a+b\sqrt{-1}$, et désignons par m le nombre de ces racines. Il est clair que le résidu de

$$(13) \qquad \frac{f(z)}{x-z},$$

relatif à la valeur $a+b\sqrt{-1}$ de la variable z, sera le même que celui de la différence

$$\frac{f(z)}{x-z}-\frac{(z-a-b\sqrt{-1})^m f(z)}{(x-a-b\sqrt{-1})^m(x-z)}=\frac{f(z)}{x-a-b\sqrt{-1}}+\frac{(z-a-b\sqrt{-1})f(z)}{(x-a-b\sqrt{-1})^2}+\ldots+\frac{(z-a-b\sqrt{-1})^{m-1}f(z)}{(x-a-b\sqrt{-1})^m},$$

et par conséquent égal à

(14) $$\frac{A_1}{x-a-b\sqrt{-1}}+\frac{A_2}{(x-a-b\sqrt{-1})^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{A_m}{(x-a-b\sqrt{-1})^m},$$

si l'on représente par

(15) $$A_1, \qquad A_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_m$$

les résidus des fonctions

(16) $$f(z), \quad (z-a-b\sqrt{-1})f(z),\ldots\ldots \ (z-a-b\sqrt{-1})^{m-1}f(z),$$

relatifs à la valeur dont il s'agit. Par suite, dans le résidu intégral qui forme le second membre de l'équation (5), la partie relative à $z=a+b\sqrt{-1}$ sera

(17) $$A_1 s_1+A_2 s_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_m s_m,$$

pourvu que l'on fasse généralement

(18) $$\left\{\begin{array}{l} s_m=\sqrt{-1}\displaystyle\int_{y_0}^{Y}\left(\frac{1}{[X-a+(y-b)\sqrt{-1}]^m}-\frac{1}{[x_0-a+(y-b)\sqrt{-1}]^m}\right)dy \\ \quad -\displaystyle\int_{x_0}^{Y}\left(\frac{1}{[x-a+(Y-b)\sqrt{-1}]^m}-\frac{1}{[x-a+(y_0-b)\sqrt{-1}]}\right)dx. \end{array}\right\}$$

Cela posé, concevons d'abord que la quantité a ait une valeur distincte de chacune des limites x_0, X, et la quantité b une valeur distincte de chacune des limites y_0, Y. En vertu du théorème 2 de la page 93, $s_2, s_3,\ldots s_m$ s'évanouiront. Quant à la valeur de s_1, ou, ce qui revient au même, de l'expression (7), elle sera toujours déterminée par le théorème 1.er [page 92]. Donc la formule (11) continuera de subsister comme dans le cas où l'équation (6) n'avait que des racines inégales.

Admettons, en second lieu, que les quantités a, b vérifient l'une des équations (8) ou (9). Alors, en vertu du théorème 2 [page 92], $s_2, s_4, s_6,\ldots$ acquerront des valeurs infinies, et $s_3, s_5, s_7,\ldots$ des valeurs indéterminées, que l'on pourra faire évanouir en réduisant chacune des intégrales indéterminées à sa valeur principale. Donc, pour que le polynome (17) se réduise à son premier terme $A_1 s_1$, il sera nécessaire, 1.° que le second, le troisième, le cinquième termes disparaissent, c'est-à-dire que l'on ait

(19) $$A_2=0, \quad A_4=0, \quad A_6=0, \text{ etc.},$$

2.° que l'on réduise les intégrales indéterminées à leurs valeurs principales. Si ces deux espèces de conditions sont remplies, la formule (11) continuera de subsister.

Admettons enfin que les quantités a, b vérifient tout-à-la-fois l'une des équations (8) et l'une des équations (9). Alors, en vertu du théorême 2.° [page 93], $s_2, s_3, s_4; s_6, s_7, s_8; s_{10}$, etc...., acquerront des valeurs infinies, et $s_1, s_5, s_9 \ldots$, des valeurs indéterminées, que l'on pourra faire évanouir en remplaçant la limite x_0 ou X des intégrales relatives à x par $a \pm \varepsilon$, la limite y_0 ou Y des intégrales relatives à y par $b \pm \varepsilon$, et le nombre ε par zéro après les intégrations effectuées. Donc, pour que le polynome (17) se réduise à son premier terme, il sera nécessaire, 1.° que l'on ait

$$(20) \qquad A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ A_4 = 0;\ A_6 = 0,\ A_7 = 0,\ A_8 = 0;\ A_{10} = 0, \text{ etc.};$$

2.° que les limites des diverses intégrales soient modifiées comme on vient de le dire. Si ces deux espèces de conditions sont remplies, la formule (11) continuera de subsister.

Il est essentiel d'observer que si, en supposant, dans la formule (18), le nombre n plus grand que l'unité, on substitue, aux limites de l'intégrale relative à x ou à y, les limites plus rapprochées qu'on obtient en augmentant ou diminuant x_0, X, y_0 et Y de la quantité infiniment petite ε, la valeur de s_n, correspondante aux valeurs principales des deux intégrales, et développée suivant les puissances ascendantes de ε ne renfermera jamais de termes finis, mais seulement des termes infiniment petits proportionnels à ε, à ε^2, à ε^3, etc., et de plus, quand elle deviendra infinie, un terme proportionnel à $\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}$. Donc, si l'on réduit les intégrales comprises dans les formules (4) et (5) à leurs valeurs principales, et les limites de ces intégrales à des limites plus rapprochées, respectivement équivalentes aux quantités x_0, X, y_0, Y, augmentées ou diminuées de ε, la valeur de Δ, développée suivant les puissances ascendantes de ε, aura pour terme fini la somme des produits de la forme $A_1 s_1$; c'est-à-dire, le produit

$$(21) \qquad 2\pi\sqrt{-1}\ {}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}\,((f(z)))\,.$$

Par suite, si l'on fait évanouir ε, Δ ne pourra conserver une valeur finie qu'autant qu'il se réduira au produit (21). On peut donc énoncer la proposition suivante.

2.° Théorême. *Les mêmes choses étant posées que dans le 1.er théorême, si la différence*

$$(22) \quad \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})]\,dy-\int_{x_0}^{X}[f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})]\,dx,$$

conserve une valeur finie et déterminée, dans le cas où l'on remplace les intégrales

qu'elle renferme par leurs valeurs principales, les limites de ces intégrales par des limites plus rapprochées, respectivement équivalentes aux quantités x_0, X, y_0, Y, augmentées ou diminuées de ε, et le nombre ε par zéro, après les intégrations effectuées, la valeur finie de la différence (22) *sera précisément*

$$(21)\qquad 2\pi\sqrt{-1}\,\overset{X}{\underset{x_0}{}}\mathcal{E}\overset{Y}{\underset{y_0}{}}((f(z))).$$

En d'autres termes, la formule (11) *se trouvera vérifiée.*

Ce nouveau théorême ne suppose pas, comme le premier, que l'équation (6) admette seulement des racines inégales.

Si, pour fixer les idées, on suppose $x_0 < X$ et $y_0 < Y$, alors, en désignant par ε un nombre infiniment petit, on aura, en vertu du théorême 2.°

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{-1}\int_{y_0+\varepsilon}^{Y-\varepsilon}[f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})]\,dy-\int_{x_0+\varepsilon}^{X-\varepsilon}[f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})]\,dx\\ &=2\pi\sqrt{-1}\,\overset{X}{\underset{x_0}{}}\mathcal{E}\overset{Y}{\underset{y_0}{}}((f(z))),\end{aligned}\right.$$

pourvu que le premier membre de la formule (23) ait une valeur finie, et que l'on réduise les intégrales comprises dans ce premier membre à leurs valeurs principales

Il nous reste à montrer quelques applications des formules (11) et (23).

D'abord, si l'on pose, dans la formule (11),

$$x_0=0,\quad X=a,\quad y_0=0,\quad Y=b,$$

ou bien

$$x_0=-a,\quad X=0,\quad y_0=0,\quad Y=b,$$

ou enfin

$$x_0=-a,\quad X=a,\quad y_0=0,\quad Y=b,$$

a et b désignant deux quantités réelles, on obtiendra successivement les trois équations

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^a[f(x+b\sqrt{-1})-f(x)]\,dx=\sqrt{-1}\int_0^b[f(a+y\sqrt{-1})-f(y\sqrt{-1})]\,dy\\ &\qquad\qquad -2\pi\,\overset{a}{\underset{0}{}}\mathcal{E}\overset{b}{\underset{0}{}}((f(z)))\sqrt{-1},\end{aligned}\right.$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{-a}^{0}[f(x+b\sqrt{-1})-f(x)]\,dx &= \sqrt{-1}\int_{0}^{b}[f(y\sqrt{-1})-f(-a+y\sqrt{-1})]\,dy \\ &\quad -2\pi\,\overset{0}{\underset{-a}{}}\mathcal{E}_{0}^{b}((f(z)))\sqrt{-1}, \end{aligned}\right.$$

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{-a}^{a}[f(x+b\sqrt{-1})-f(x)]\,dx &= \sqrt{-1}\int_{0}^{b}[f(a+y\sqrt{-1})-f(-a+y\sqrt{-1})]\,dy \\ &\quad -2\pi\,\overset{a}{\underset{-a}{}}\mathcal{E}_{0}^{b}((f(z)))\sqrt{-1}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles les intégrales indéterminées doivent toujours être réduites à leurs valeurs principales.

Soient encore

$$x_0=a,\ X=b,\ y_0=a,\ Y=b.$$

Si l'équation (6) n'a point de racine équivalente à l'une des expressions imaginaires

$$(27)\qquad a+a\sqrt{-1},\ a+b\sqrt{-1},\ b+a\sqrt{-1},\ b+b\sqrt{-1},$$

on tirera immédiatement de la formule (11), en remplaçant la lettre y par la lettre x,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{a}^{b}[f(x+b\sqrt{-1})-f(x+a\sqrt{-1})-\sqrt{-1}f(b+x\sqrt{-1})+\sqrt{-1}f(a+x\sqrt{-1})]\,dx \\ &= -2\pi\,\overset{b}{\underset{a}{}}\mathcal{E}_{a}^{b}((f(z)))\sqrt{-1}. \end{aligned}\right.$$

Si, au contraire, l'on compte au nombre des racines de l'équation (6) une ou plusieurs des expressions (27), on tirera du 2.° théorème, ou de l'équation (23)

$$\begin{aligned} &\int_{a-\varepsilon}^{b-\varepsilon}[f(x+b\sqrt{-1})-f(x+a\sqrt{-1})-\sqrt{-1}f(b+x\sqrt{-1})+\sqrt{-1}f(a+x\sqrt{-1})]\,dx \\ &= -2\pi\,\overset{b}{\underset{a}{}}\mathcal{E}_{a}^{b}((f(z)))\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

puis, en réduisant ε à zéro, on reproduira la formule (28). En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante.

3.° Théorème. *On a généralement*

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_a^b [f(x+b\sqrt{-1})-f(x+a\sqrt{-1})-\sqrt{-1}f(b+x\sqrt{-1})+\sqrt{-1}f(a+x\sqrt{-1})]\,dx\\ &=-2\pi \mathop{\mathcal{E}}_a^b{}_a^b((f(z))),\end{aligned}\right.$$

pourvu que l'on réduise l'intégrale relative à x à sa valeur principale.

Supposons maintenant que la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouisse pour $x=\pm\infty$, quelque soit y. Alors, si l'on prend

$$x_0=-\infty,\ X=\infty,\ y_0=a,\ Y=b,$$

l'intégrale relative à y s'évanouira dans la formule (11), et l'on se trouvera conduit au nouveau théorème que nous allons énoncer.

4.e Théorème. *Si la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\pm\infty$, quel que soit y, on aura généralement*

$$(29)\quad \int_{-\infty}^{\infty}[f(x+b\sqrt{-1})-f(x+a\sqrt{-1})]\,dx=-2\pi \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty}{}_a^b((f(z)))\sqrt{-1},$$

pourvu que l'intégrale relative à x soit réduite à sa valeur principale.

On établira, sans plus de difficulté, la proposition suivante.

5.e Théorème. *Si la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $y=\pm\infty$, quel que soit x, on aura généralement*

$$(30)\quad \int_{-\infty}^{\infty}[f(b+y\sqrt{-1})-f(a+y\sqrt{-1})]\,dy=2\pi \mathop{\mathcal{E}}_a^b{}_{-\infty}^{\infty}((f(z))),$$

pourvu que l'intégrale relative à y soit réduite à sa valeur principale.

Concevons à présent que la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouisse, 1.° pour $x=\pm\infty$, quel que soit y; 2.° pour $y=\infty$, quel que soit x; et soit $\mathcal{F}$ la limite vers laquelle converge le produit

$$(31)\quad (x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})$$

pour des valeurs croissantes de y; alors, en désignant par b un très-grand nombre, on aura sensiblement

$$(x+b\sqrt{-1})f(x+b\sqrt{-1})=\mathcal{F},\qquad f(x+b\sqrt{-1})=\frac{\mathcal{F}}{x+b\sqrt{-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+b\sqrt{-1})\,dx = \mathcal{F}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x+b\sqrt{-1}} = \mathcal{F}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+b^2} - \mathcal{F}\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b\,dx}{x^2+b^2}$$

$$= \mathcal{F}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+b^2} - \pi\mathcal{F}\sqrt{-1},$$

puis, en réduisant chaque intégrale à sa valeur principale,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+b\sqrt{-1})\,dx = -\pi\mathcal{F}\sqrt{-1}.$$

Cela posé, on tirera de la formule (29), en attribuant à la quantité a une valeur nulle, et à la quantité b une très-grande valeur,

$$\text{(32)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\sqrt{-1}\left\{ \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty\;\;0}^{\infty\;\;\infty}((f(z))) - \frac{1}{2}\mathcal{F} \right\}.$$

En supposant, dans l'équation (32), la constante $\mathcal{F}$ réduite à zéro, on établira le théorême suivant.

6.° Théorême. *Si la fonction* $f(x+y\sqrt{-1})$ *s'évanouit*, 1.° *pour* $x=\pm\infty$, *quel que soit* y; 2.° *pour* $y=\infty$, *quel que soit* x, *on aura généralement*

$$\text{(33)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty\;\;0}^{\infty\;\;\infty}((f(z)))\sqrt{-1},$$

pourvu que l'intégrale soit réduite à sa valeur principale, et que le produit $(x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})$ *s'évanouisse avec la fonction* $f(x+y\sqrt{-1})$, *en vertu de la supposition* $y=\infty$.

On pourrait aisément revenir du 6.° théorême à la formule (32). En effet, si la supposition $y=\infty$ réduit le produit (31), non plus à zéro, mais à une quantité finie $\mathcal{F}$, la même supposition fera évanouir le produit

$$(x+y\sqrt{-1})\left\{ f(x+y\sqrt{-1}) - \frac{\mathcal{F}}{x+y\sqrt{-1}} \right\} = (x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1}) - \mathcal{F}.$$

On aura donc, en vertu du 6.° théorême,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(x)-\frac{\mathcal{F}}{x}\right\}dx = 2\pi \,\underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathcal{E}_{0}^{\infty}\left(\left(f(z)-\frac{\mathcal{F}}{x}\right)\right)\sqrt{-1},$$

puis, en réduisant chaque intégrale à sa valeur principale, et remplaçant, en conséquence l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x}$$

par zéro, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi \,\underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathcal{E}_{0}^{\infty}\left(\left(f(z)-\frac{\mathcal{F}}{z}\right)\right)\sqrt{-1}. \tag{34}$$

Comme on a d'ailleurs, en vertu des principes du calcul des résidus [voyez les pages 11 et suivantes]

$$\underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathcal{E}_{0}^{\infty}\left(\left(f(z)-\frac{\mathcal{F}}{z}\right)\right) = \underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((f(z))) - \frac{1}{2}\mathcal{E}\left(\left(\frac{\mathcal{F}}{z}\right)\right) = \underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((f(z))) - \frac{\mathcal{F}}{2},$$

il est clair que la formule (34) reproduira l'équation (32)

En supposant, dans les équations (24) et (25), $a=\infty$, puis, appliquant à ces équations les raisonnements par lesquels nous avons déduit le 6.e théorème de la formule (29), on sera immédiatement conduit à deux propositions nouvelles, que nous allons énoncer.

7.e Théorème. *Si la fonction* $f(x+y\sqrt{-1})$ *s'évanouit*, 1.º *pour* $x=\infty$, *quel que soit* y; 2.º pour $y=\infty$, quel que soit x, on aura

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \sqrt{-1}\int_{0}^{\infty} f(y\sqrt{-1})\,dy + 2\pi \,\underset{0}{\overset{\infty}{}}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((f(z)))\sqrt{-1}, \tag{35}$$

pourvu que chaque intégrale soit réduite à sa valeur principale, et que le produit (31) *s'évanouisse avec la fonction* $f(x+y\sqrt{-1})$ *en vertu de la supposition* $y=\infty$.

8.e Théorème. *Si la fonction* $f(x+y\sqrt{-1})$ *s'évanouit*, 1.º *pour* $x=-\infty$, *quel que soit* y; 2.º *pour* $y=\infty$, *quel que soit* x, *on aura*

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = -\sqrt{-1}\int_{0}^{\infty} f(y\sqrt{-1})\,dy + 2\pi \,\underset{-\infty}{\overset{0}{}}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((f(z)))\sqrt{-1} \tag{36}$$

pourvu que chaque intégrale soit réduite à sa valeur principale, et que le produit (31) *s'évanouisse avec la fonction* $f(x+y\sqrt{-1})$ *en vertu de la supposition* $y=\infty$.

Lorsque les formules (35) et (36) subsistent simultanément, en les ajoutant l'une à l'autre, on reproduit l'équation (33). De plus, si, dans la formule (35), on remplace la lettre y par la lettre x, on obtiendra la proposition suivante.

9.° Théorème. *Si la fonction* $f(x+y\sqrt{-1})$ *s'évanouit,* 1.° *pour* $x=\infty$, *quel que soit* y; 2.° *pour* $y=\infty$, *quel que soit* x, *on aura*

$$(37)\qquad \int_0^\infty [f(x)-\sqrt{-1}f(x\sqrt{-1})]dx = 2\pi \mathop{\mathcal{E}}_0^\infty {}_0^\infty ((f(z)))\sqrt{-1},$$

pourvu que l'intégrale soit réduite à sa valeur principale, et que le produit (31) *s'évanouisse avec la fonction* $f(x+y\sqrt{-1})$ *en vertu de la supposition* $y=\infty$.

Comme on peut déduire l'équation (37) de la formule (28), en prenant $a=0$, $b=\infty$, il est clair que cette équation subsiste dans le cas même où la fonction $f(x)$ devient infinie pour $x=0$.

On pourrait présenter les diverses équations que nous venons d'établir sous différentes formes distinctes les unes des autres. Ainsi, par exemple, on reconnaîtra sans peine que l'équation (33) peut être remplacée par l'une des suivantes :

$$(38)\qquad \int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}dx = \pi \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty} {}_0^\infty ((f(z)))\sqrt{-1},$$

$$(39)\qquad \int_0^1 \frac{x[f(x)+f(-x)+\frac{1}{x}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)\right]}{2}\frac{dx}{x} = \pi \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty} {}_0^\infty ((f(z)))\sqrt{-1}.$$

On déduirait aisément des formules qui précèdent les valeurs de presque toutes les intégrales définies connues, et d'un grand nombre d'autres, spécialement de celles que nous avons considérées dans le Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires [pages 61 et suivantes]. Ainsi, par exemple, on tirera immédiatement de la formule (38), en désignant par $\mathrm{f}(x)$ une nouvelle fonction de x, et par r une constante positive,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(-x)}{2\sqrt{-1}}\frac{dx}{x} = \pi \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty} {}_0^\infty \left(\left(\frac{\mathrm{f}(z)}{z}\right)\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)}{2}\frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \pi \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty} {}_0^\infty \left(\left(\frac{r\,\mathrm{f}(z)}{z^2+r^2}\right)\right)\sqrt{-1},$$

$$\int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2\sqrt{-1}} \frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \pi \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty}\,_0^{\infty} \left(\left(\frac{z f(z)}{z^2+r^2}\right)\right).$$

D'ailleurs, si la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ ne devient pas infinie pour des valeurs positives de y, on aura, en vertu des principes du calcul des résidus [voyez les pages 11 et suivantes],

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty}\,_0^{\infty} \left(\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\mathcal{E}\frac{f(z)}{((z))} = \frac{1}{2}f(0),$$

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty}\,_0^{\infty} \left(\left(\frac{r f(z)}{z^2+r^2}\right)\right) = \mathcal{E}\frac{r f(z)}{(z+r\sqrt{-1})\,((z-r\sqrt{-1}))} = \frac{f(r\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty}\,_0^{\infty} \left(\left(\frac{z f(z)}{z^2+r^2}\right)\right) = \mathcal{E}\frac{z f(z)}{(z+r\sqrt{-1})\,((z-r\sqrt{-1}))} = \frac{f(r\sqrt{-1})}{2}.$$

On trouvera donc définitivement

$$(40) \qquad \int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} f(0),$$

$$(41) \qquad \int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2} \frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2} f(r\sqrt{-1}),$$

$$(42) \qquad \int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}} \frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2} f(r\sqrt{-1}).$$

La formule (41) suppose seulement que la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ conserve une valeur finie, 1.° pour $x=\pm\infty$, quel que soit y; 2.° pour $y=\infty$, quel que soit x. Les formules (40) et (42) supposent en outre que $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $y=\infty$. Si cette dernière condition n'était pas remplie, on devrait aux formules (40) et (42) substituer les deux suivantes

$$(43) \qquad \int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\left[f(0) - \mathcal{F}\right],$$

$$(44) \qquad \int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}} \frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}\left[f(r\sqrt{-1}) - \mathcal{F}\right],$$

qui se déduisent l'une et l'autre de l'équation (32), et dans lesquelles $\mathcal{F}$ désigne la valeur de $f(x+y\sqrt{-1})$ correspondante à $y=\infty$.

Si, dans les formules (40), (41), (42), (43), (44), on remplace $f(x)$ par l'une des fonctions

$$e^{ax\sqrt{-1}},\ (-x\sqrt{-1})^{a-1}\,e^{bx\sqrt{-1}},\ e^{ae^{bx\sqrt{-1}}}\ \text{etc.....},$$

a et b étant des quantités positives, on obtiendra les équations

$$(45)\qquad \int_0^\infty \sin ax\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2},$$

$$(46)\qquad \int_0^\infty \cos ax\,\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}e^{-ar},\quad \int_0^\infty \sin ax\,\frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}e^{-ar},$$

$$(47)\qquad \int_0^\infty x^{a-1}\sin\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}r^{a-1}e^{-br},$$

$$(48)\qquad \int_0^\infty e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}(e^a-1),^{*}$$

$$(49)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty e^{a\cos bx}\cos(a\sin bx)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}e^{ae^{-br}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\left(e^{ae^{-br}}-1\right),\ \text{etc...} \end{array}\right.$$

Les formules (46), qui ont été données pour la première fois par M. Laplace, et dont la seconde comprend comme cas particulier l'équation (45), sont elles-mêmes comprises dans la formule (47). Ajoutons que cette dernière suppose le nombre a renfermé entre

---

* Les valeurs trouvées pour l'intégrale (48) et pour la seconde des intégrales (49), dans le Mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires, sont incomplettes et doivent être remplacées par celles que nous donnons ici. Cette erreur provient de ce qu'on avait employé, pour déterminer les deux intégrales dont il s'agit, les formules (40) et (42), au lieu des formules (43) et (44).

les limites o, 2, et que, si l'on y fait $b=0$, $r=1$, on obtiendra une des intégrales les plus remarquables données par Euler, savoir,

(50)
$$\int_0^\infty x^{a-1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2\sin\frac{a\pi}{2}}.$$

Si, dans l'équation (37), on remplaçait successivement $f(x)$ par les deux fonctions

$$\frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{x} \qquad \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{x(x^4+r^4)},$$

on en tirerait

(51)
$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - e^{-ax}}{x}dx=0,$$

(52)
$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - e^{-ax}}{x}\frac{dx}{x^4+r^4}=\frac{\pi}{2r^4}e^{-\frac{ar}{\sqrt{2}}}\sin\frac{ar}{\sqrt{2}},$$

Nous développerons dans d'autres articles les nombreuses conséquences des formules générales auxquelles nous sommes parvenus dans celui-ci; et nous allons montrer, en finissant, comment, à l'aide de ces formules, on peut, dans beaucoup de cas, déterminer le résidu intégral d'une fonction donnée $f(z)$, c'est-à-dire, la somme de tous les résidus qui correspondent aux diverses racines de l'équation (6).

Concevons que la fonction $f(z)$ s'évanouisse pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de la variable z, c'est-à-dire, que la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouisse, 1.° lorsqu'on suppose $x=\pm\infty$, 2.° lorsqu'on suppose $y=\pm\infty$; et admettons d'abord que, dans l'une et l'autre hypothèse, le produit

$$(x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})$$

se réduise à la constante $\mathcal{G}$. On aura sensiblement, pour de très-grandes valeurs numériques de x ou de y,

$$(x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})=\mathcal{G}, \quad f(x+y\sqrt{-1})=\frac{\mathcal{G}}{x+y\sqrt{-1}}.$$

Donc alors, si l'on attribue aux quantités x_0, y_0, X, Y de très-grandes valeurs numériques, en supposant x_0 et y_0 négatives, X et Y positives, le premier membre de la formule (11) se confondra sensiblement avec la différence

$$(53)\qquad \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left\{\frac{\mathcal{F}}{X+y\sqrt{-1}}-\frac{\mathcal{F}}{x_0+y\sqrt{-1}}\right\}dy-\int_{x_0}^{X}\left\{\frac{\mathcal{F}}{x+Y\sqrt{-1}}-\frac{\mathcal{F}}{x+y_0\sqrt{-1}}\right\}dx.$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (31) de la page 94, cette même différence se réduit à

$$2\pi\mathcal{F}\sqrt{-1}.$$

Donc, si l'on prend

$$x_0=-\infty,\quad X=\infty,\quad y_0=-\infty,\quad Y=\infty,$$

la formule (11) donnera

$$2\pi\mathcal{F}\sqrt{-1}=2\pi\,\underset{-\infty\;\;-\infty}{\overset{\infty\;\;\infty}{\mathcal{E}}}((f(z)))\sqrt{-1};$$

et, en divisant les deux membres par $2\pi\sqrt{-1}$, on obtiendra l'équation

$$(54)\qquad \underset{-\infty\;\;-\infty}{\overset{\infty\;\;\infty}{\mathcal{E}}}((f(z)))=\mathcal{F},$$

que l'on peut écrire plus simplement comme il suit

$$(55)\qquad \mathcal{E}((f(z)))=\mathcal{F}.$$

Si l'on a $\mathcal{F}=0$, ou, en d'autres termes, si le produit $zf(z)$ s'évanouit pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de la variable z, l'équation (55) deviendra

$$(56)\qquad \mathcal{E}((f(z)))=0.$$

On pourrait aisément revenir de la formule (56) à la formule (55). En effet, lorsque, pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de z, le produit $zf(z)$ se réduit non plus à zéro, mais à une quantité finie $\mathcal{F}$, il est clair que, pour ces mêmes valeurs de z, le produit

$$z\left\{f(z)-\frac{\mathcal{F}}{z}\right\}=zf(z)-\mathcal{F}$$

s'évanouit. On a donc alors, en vertu de la formule (56),

$$\mathcal{E}\left(\left(f(z)-\frac{\mathcal{F}}{z}\right)\right)=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathcal{E}((f(z)))=\mathcal{E}\frac{\mathcal{F}}{((z))}=\mathcal{F}.$$

La formule (55) cesserait d'être exacte, si la valeur du produit

(31) $$(x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1}),$$

correspondante à des valeurs infinies positives ou négatives de la variable x ou y, changeait avec le signe de cette variable. Alors il faudrait à la formule (55) substituer l'une de celles que nous allons indiquer.

Supposons, en premier lieu, que, la fonction $f(z)$ étant nulle pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de z, le produit (31) se réduise à la constante $\mathcal{F}_1$ pour $x=-\infty$, et à la constante $\mathcal{F}_2$ pour $x=\infty$. Alors, en attribuant aux quantités $-a$ et $+b$ de très-grandes valeurs positives, on tirera de la formule (29)

$$\mathcal{E}((f(z)))=$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\mathcal{F}_2}{x+b\sqrt{-1}}-\frac{\mathcal{F}_1}{x+a\sqrt{-1}}\right\}dx=\frac{\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2}{2}+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\mathcal{F}_2}{x^2+b^2}-\frac{\mathcal{F}_1}{x^2+a^2}\right\}x\,dx,$$

puis, en remplaçant les intégrales par leurs valeurs principales,

(57) $$\mathcal{E}((f(z)))=\frac{\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2}{2}.$$

Supposons, en second lieu, que la fonction $f(z)$ étant nulle pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de z, le produit (31) se réduise à la constante $\mathcal{F}'$ pour $y=-\infty$, et à la constante $\mathcal{F}''$ pour $y=\infty$. Alors, en attribuant aux quantités $-a$ et $+b$ de très-grandes valeurs positives, et remplaçant les intégrales relatives à y par leurs valeurs principales, on tirera de la formule (30)

(58) $$\mathcal{E}((f(z)))=\frac{\mathcal{F}'+\mathcal{F}''}{2}.$$

Si l'on avait, dans la formule (57), $\mathcal{F}_2=-\mathcal{F}_1$, ou, dans la formule (58) $\mathcal{F}''=-\mathcal{F}'$, on retrouverait précisément l'équation (56). En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante.

10.° Théorème. *Si la fonction* $f(z)$ *s'évanouit pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de la variable* z, *le résidu intégral de cette fonction sera nul, ou, en d'autres termes, on aura*

$$(56) \qquad \mathcal{E}((f(z))) = 0,$$

pourvu que le produit $(x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})$ *conserve une valeur finie pour des valeurs infinies positives ou négatives de l'une des variables* x, y, *et qu'il change de signe, sans changer de valeur numérique, dans le cas où la variable dont il s'agit passe de l'infini positif à l'infini négatif.*

Ce théorème, en raison de sa généralité, et des nombreuses applications qu'on en peut faire, paraît devoir mériter l'attention des géomètres. Si l'on remplace la fonction $f(z)$ par le rapport $\frac{f(z)}{z-x}$, la formule (56) donnera

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{z-x}\right)\right) = f(x) - \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z} = 0,$$

et l'on déduira facilement du théorème 10 une proposition nouvelle dont voici l'énoncé.

11.° Théorème. *Si la fonction* $f(z)$ *conserve une valeur finie pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de la variable* z, *on aura*

$$(59) \qquad f(x) = \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z},$$

pourvu que la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ *change de signe, sans changer de valeur numérique, lorsqu'on passera de la supposition* $x=-\infty$, *à la supposition* $x=\infty$, *ou bien de la supposition* $y=-\infty$ *à la supposition* $y=\infty$.

Si la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ se réduisait, pour $x=-\infty$, à la constante $\mathcal{F}_1$, et, pour $x=\infty$, à une constante $\mathcal{F}_2$ différente de $-\mathcal{F}_1$, alors il faudrait à la formule (59) substituer l'équation

$$(60) \qquad f(x) = \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z} + \frac{\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2}{2},$$

qui se déduit immédiatement de la formule (57).

De même, si la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ se réduisait pour $y=-\infty$ à la constante $\mathcal{F}'$, et pour $y=\infty$ à la constante $\mathcal{F}''$ différente de $-\mathcal{F}'$, il faudrait à la formule (59) substituer l'équation

$$(61)\qquad f(x)=\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}+\frac{\mathcal{F}'+\mathcal{F}''}{2},$$

qui se déduit immédiatement de la formule (58).

Il est important d'observer que les équations (54), (56) et (59) s'accordent avec les formules (63), (64) et (57) des pages 22 et 23. La seule différence consiste en ce que, dans les formules dont il s'agit, on supposait la fonction $f(z)$ réduite à une fraction rationnelle.

Nous avons déjà remarqué que l'équation (59) fournit le moyen de décomposer dans tous les cas possibles une fraction rationnelle en fractions simples. On en déduit avec la même facilité un grand nombre de formules dont quelques-unes étaient déjà connues, par exemple, celle qui sert à développer en série la cotangente de l'arc x. On tire en effet de l'équation (59)

$$\cot x=\mathcal{E}\frac{\cos z}{(x-z)\,((\sin z))}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\pi}+\frac{1}{x-2\pi}+\frac{1}{x-3\pi}+\text{etc.}...$$
$$+\frac{1}{x+\pi}+\frac{1}{x+2\pi}+\frac{1}{x+3\pi}+\text{etc.}...,$$

et par suite

$$(62)\qquad \cot x=\frac{1}{x}-2x\left\{\frac{1}{\pi^2-x^2}+\frac{1}{4\pi^2-x^2}+\frac{1}{9\pi^2-x^2}+\text{etc.}...\right\}$$

On trouvera de même, en supposant $a<\pi$,

$$(63)\qquad \frac{\cos ax}{\sin \pi x}=\mathcal{E}\frac{\cos az}{(x-z)\,((\sin \pi z))}=\frac{1}{\pi x}+\frac{2x}{\pi}\left\{\frac{\cos a}{1-x^2}-\frac{\cos 2a}{4-x^2}+\frac{\cos 3a}{9-x^2}-...\right\}$$

$$(64)\qquad \frac{\sin ax}{\sin \pi x}=\mathcal{E}\frac{\sin az}{(x-z)\,((\sin \pi z))}=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sin a}{1-x^2}-\frac{2\sin 2a}{4-x^2}+\frac{3\sin 3a}{9-x^2}-...\right\}$$

Lorsqu'on suppose précisément $a=\pi$, l'équation (63) continue de subsister, tandis-que la formule (64) devient inexacte. Mais alors, pour développer la fonction $\frac{\sin ax}{\sin \pi x}=1$, il faut employer l'équation (61), au lieu de l'équation (59), et, comme on a, dans ce cas, $\mathcal{F}'=1$, $\mathcal{F}''=1$, il en résulte que le second membre de la formule (64) doit être augmenté de la quantité $\frac{\mathcal{F}'+\mathcal{F}''}{2}=1$. Or, en opérant de cette manière, on obtient effectivement, à la place de la formule (64), une équation identique.



DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME CURIEUX SUR LES NOMBRES.

(*Extrait du Bulletin de la Société philomatique.*)

On trouve dans un numéro du Bulletin de la société philomatique l'énoncé d'une propriété remarquable des fractions ordinaires observée par M. J. Farey.

Cette propriété n'est qu'un simple corollaire d'un théorème curieux que je vais commencer par établir.

THÉORÈME. *Si, après avoir rangé dans leur ordre de grandeur les fractions irréductibles dont le dénominateur n'excède pas un nombre entier donné, on prend à volonté, dans la suite ainsi formée, deux fractions consécutives, leurs dénominateurs seront premiers entre eux, et elles auront pour différence une nouvelle fraction dont le numérateur sera l'unité.*

Démonstration. Soit $\frac{a}{b}$ la plus petite des deux fractions que l'on considère, et n le nombre entier donné. Soient de plus a' et b' les plus grandes valeurs entières que l'on puisse attribuer aux variables x et y dans l'équation indéterminée

$$(1) \qquad bx - ay = 1,$$

en supposant toutefois $b' < n$. La fraction $\frac{a}{b}$ étant irréductible par hypothèse, et la valeur de b' vérifiant l'équation

$$ba' - ab' = 1,$$

b et b' seront nécessairement premiers entre eux, et l'on aura de plus

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb'}.$$

La fraction $\frac{a'}{b'}$ jouira donc, relativement à la fraction $\frac{a}{b}$, des propriétés énoncées

dans le théorême; et, pour établir ce même théorême, il suffira de prouver que, parmi toutes les fractions irréductibles dont le dénominateur n'excède pas n, celle qui surpasse immédiatement $\frac{a}{b}$ est précisément $\frac{a'}{b'}$. On y parvient de la manière suivante.

Les diverses valeurs de y qui résolvent l'équation (1) forment la progression arithmétique

$$\ldots . b'-2b,\ b'-b,\ b',\ b'+b,\ b'+2b\ldots;$$

et, puisque b' est la plus grande de ces valeurs qui soit comprise dans n, on a nécessairement

$$n<b'+b.$$

Soit maintenant $\frac{f}{g}$ une fraction irréductible et plus grande que $\frac{a}{b}$ prises parmi celles dont le dénominateur n'excède par n. Si l'on fait, pour abréger,

$$bf-ag=m, \tag{2}$$

on aura

$$\frac{f}{g}-\frac{a}{b}=\frac{m}{bg}.$$

Ainsi, la différence des fractions $\frac{f}{g}$, $\frac{a}{b}$ sera généralement exprimée par $\frac{m}{bg}$; et, si l'on donne à m une valeur constante en laissant varier g, cette différence aura la plus petite valeur possible, lorsque g aura la plus grande valeur possible. D'ailleurs les diverses valeurs de g qui satisfont à l'équation (2) sont évidemment comprises dans la progression arithmétique

$$\ldots . . mb'-2b,\ mb'-b,\ mb',\ mb'+b,\ mb'+2b\ldots . .$$

dont le terme $mb'+b$, égal ou supérieur à $b'+b$, est par suite supérieur à n: et, comme g ne doit pas excéder n, il est clair qu'il sera tout au plus égal au terme mb'; d'où il suit que la fraction $\frac{m}{bg}$ ne pourra devenir inférieure à

$$\frac{m}{mb'b}=\frac{1}{bb'}.$$

Donc, parmi toutes les fractions supérieures à $\frac{a}{b}$, et dont le dénominateur n'excède

pas n, la plus petite est celle dont la différence avec $\frac{a}{b}$ est égale à $\frac{1}{bb'}$, c'est-à-dire, la fraction $\frac{a'}{b'}$.

Corollaire. Si, parmi les fractions dont il s'agit dans le théorême, on en prend trois de suite à volonté, en désignant ces trois fractions par

$$\frac{a}{b},\ \frac{a'}{b'},\ \frac{a''}{b''},$$

on aura

$$a'b - ab' = 1,\ a''b' - a'b'' = 1,$$

et par suite

$$a'b - ab' = a''b' - a'b'';$$

d'ou l'on conclut

$$\frac{a + a''}{b + b''} = \frac{a'}{b'}.$$

Cette dernière équation n'est autre chose que l'expression analytique de la propriété observée par M. J. Farey.



SUR LES MOMENTS LINÉAIRES

DE PLUSIEURS FORCES APPLIQUÉES A DIFFÉRENTS POINTS.

Considérons plusieurs forces

$$P, \quad P', \quad P'', \quad \text{etc.....},$$

respectivement appliquées à différents points dont les coordonnées rectangulaires soient respectivement

$$x, y, z; \quad x', y', z'; \quad x'', y'', z''; \quad \text{etc......}$$

Supposons de plus ces mêmes forces dirigées de manière à former, avec le demi-axe des x positives, les angles

$$\alpha, \quad \alpha', \quad \alpha'', \quad \text{etc.....};$$

avec le demi-axe des y positives, les angles

$$\beta, \quad \beta', \quad \beta'', \quad \text{etc.....};$$

enfin avec le demi-axe des z positives, les angles

$$\gamma, \quad \gamma', \quad \gamma'', \quad \text{etc......}$$

Les projections algébriques de la force P sur les axes seront

$$P\cos\alpha, \quad P\cos\beta, \quad P\cos\gamma;$$

tandis que les projections algébriques de son moment linéaire se trouveront représentées, si l'on place le centre des moments à l'origine des coordonnées, par les trois produits

$$P(y\cos\gamma - z\cos\beta), \quad P(z\cos\alpha - x\cos\gamma), \quad P(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$

et, si l'on place le centre des moments au point qui a pour coordonnées x_0, y_0, z_0, par les trois suivants

$$P[(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta],\quad P[(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma],\quad P[(x-x_0)\cos\beta-(y-y_0)\cos\alpha].$$

On peut remarquer d'ailleurs que, pour obtenir ces trois derniers produits, il suffit d'ajouter respectivement aux trois premiers les quantités

$$P(y_0\cos\gamma-z_0\cos\beta),\quad P(z_0\cos\alpha-x_0\cos\gamma),\quad P(x_0\cos\beta-y_0\cos\alpha),$$

prises en signes contraires, c'est-à-dire, en d'autres termes, les projections algébriques sur les axes coordonnés du moment linéaire d'une force égale et parallèle à P, mais dirigée en sens contraire, et appliquée au point (x_0, y_0, z_0), ce moment linéaire étant calculé pour le cas où l'on place le centre des moments à l'origine des coordonnées. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

Si, en plaçant le centre des moments à l'origine des coordonnées, on construit, 1.° le moment linéaire de la force P, 2.° le moment linéaire d'une force égale et parallèle, mais dirigée en sens contraire, et appliquée au point (x_0, y_0, z_0), le moment linéaire résultant, transporté parallèlement à lui-même, de manière que son origine coïncide avec le point (x_0, y_0, z_0), représentera, en grandeur et en direction, le moment linéaire de la force P par rapport à ce même point.

Nous dirons, avec M. Poinsot, que deux forces forment *un couple*, lorsqu'elles seront égales et parallèles, mais dirigées en sens contraires suivant deux droites différentes; et le *moment* de ce couple ou son *moment linéaire* sera ce que devient le moment ou le moment linéaire de l'une des forces, quand on prend le point d'application de l'autre pour centre des moments. Cela posé, le moment du couple sera évidemment égal au produit de l'une des forces par leur distance mutuelle, c'est-à-dire, en d'autres termes, à la surface du parallélogramme construit sur les deux forces; et le plan du moment du couple sera précisément le plan de ce parallélogramme, ou, si l'on veut, celui qui renferme les deux forces données. De plus, le moment linéaire du couple élevé par le point d'application de l'une des forces, se comptera sur le demi-axe perpendiculaire au plan du couple, et autour duquel l'autre force tend à produire un mouvement de rotation de droite à gauche. Enfin, comme, dans la proposition ci-dessus établie, les points d'application des deux forces P et l'origine des coordonnées peuvent être des points quelconques de l'espace, il est clair que cette proposition se réduira simplement à celle que je vais énoncer.

1.er Théorème. *Lorsque deux forces forment un couple, le moment linéaire résultant, pour le système de ces deux forces, est égal et parallèle au moment du couple et dirigé dans le même sens, quel que soit le point de l'espace que l'on prenne pour centre des moments.*

Revenons maintenant au système des forces P, P', P''.... appliquées à différents points de l'espace. Soient respectivement

$$X,\quad Y,\quad Z$$
$$L,\quad M,\quad N$$

les sommes des projections algébriques de ces mêmes forces, et celles des projections algébriques de leurs moments linéaires, dans le cas où l'on place le centre des moments à l'origine des coordonnées. On aura

$$(1)\quad \begin{cases} X=P\cos\alpha+P'\cos\alpha+\text{etc.}, Y=P\cos\beta+P'\cos\beta'+\text{etc}, Z=P\cos\gamma+P'\cos\gamma'+\text{etc.} \\ L=P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+\text{etc.}, M=P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)+\text{etc.}, N=P(x\cos\beta-y\cos\alpha)+\text{etc.} \end{cases}$$

Cela posé, si, par un point quelconque on mène des forces $P, P', P''\ldots.$ égales et parallèles aux forces données, leur résultante, que je désignerai par R aura pour valeur

$$(2)\qquad R=\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)},$$

et formera, avec les demi-axes des coordonnées positives, des angles a, b, c déterminés par les équations

$$(3)\qquad \cos a=\frac{X}{R},\quad \cos b=\frac{Y}{R},\quad \cos c=\frac{Z}{R}.$$

De plus, si, en prenant le point dont il s'agit pour centre des moments, on construit les moments linéaires des forces données, on pourra composer ces moments entre eux de manière à obtenir en définitive un moment linéaire résultant. Soit K ce dernier moment, et désignons par l, m, n les angles que forme sa direction avec les demi-axes des coordonnées positives. Si le point pris pour centre des moments se confond avec l'origine des coordonnées, on aura évidemment

$$(4)\qquad K=\sqrt{(L^2+M^2+N^2)},$$

$$(5)\qquad \cos l=\frac{L}{K},\quad \cos m=\frac{M}{K},\quad \cos n=\frac{N}{K};$$

puisque les projections algébriques du moment linéaire résultant devront être respectivement égales aux sommes des projections algébriques de tous les autres. Si le même point, supposé distinct de l'origine, avait pour coordonnées

$$x_0,\quad y_0,\quad z_0,$$

il faudrait, d'après ce qui a été dit ci-dessus, lui appliquer des forces égales et pa-

rallèles aux forces $P, P' P''\dots$, mais dirigées en sens contraires. En joignant ces nouvelles forces au système des forces données, et composant les uns avec les autres les moments linéaires de toutes les forces pris par rapport à l'origine, on formerait un moment linéaire résultant égal et parallèle à celui que l'on cherche, et dirigé dans le même sens. Or, les nouvelles forces étant égales et parallèles aux forces données, mais dirigées en sens contraires, leur résultante serait égale et directement opposée à la force R. Par suite, les sommes des projections algébriques de leurs moments linéaires seraient respectivement égales aux projections algébriques du moment linéaire de la force R prises en signes contraires, c'est-à-dire, à

$$R(z_0\cos b - y_0\cos c) = z_0 Y - y_0 Z,$$
$$R(x_0\cos c - z_0\cos a) = x_0 Z - z_0 X,$$
$$R(y_0\cos a - x_0\cos b) = y_0 X - x_0 Y.$$

Donc, si à ces trois dernières expressions on ajoute les quantités L, M, N, on aura pour sommes les projections algébriques du moment linéaire représenté par K. Donc, en plaçant le centre des moments au point qui a pour coordonnées x_0, y_0, z_0, on trouvera

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} K\cos l &= L - y_0 Z + z_0 Y,\\ K\cos m &= M - z_0 X + x_0 Z,\\ K\cos n &= N - x_0 Y + y_0 X.\end{aligned}\right.$$

On aurait pu obtenir immédiatement les seconds membres de ces dernières équations en exprimant, au moyen des quantités X, Y, Z, L, M, N, les sommes des projections algébriques des moments linéaires des forces $P, P', P''\dots$ par rapport au point qui a pour coordonnées x_0, y_0, z_0, c'est-à-dire, en d'autres termes, les trois polynomes

$$P[(y-y_0)\cos\gamma - (z-z_0)\cos\beta] + P'[(y'-y_0)\cos\gamma' - (z'-z_0)\cos\beta'] + \text{etc.},$$
$$P[(z-z_0)\cos\alpha - (x-x_0)\cos\gamma] + P'[(z'-z_0)\cos\alpha' - (x'-x_0)\cos\gamma'] + \text{etc.},$$
$$P[(x-x_0)\cos\beta - (y-y_0)\cos\alpha] + P'[(x'-x_0)\cos\beta' - (y'-y_0)\cos\alpha'] + \text{etc.}..$$

On tire d'ailleurs des équations (6)

$$(7)\qquad K = \sqrt{[(L - y_0 Z + z_0 Y)^2 + (M - z_0 X + x_0 Z)^2 + (N - x_0 X + y_0 X)^2]}.$$

$$(8)\qquad \cos l = \frac{L - y_0 Z + z_0 Y}{K},\qquad \cos m = \frac{M - z_0 X + x_0 Z}{K},\qquad \cos n = \frac{N - x_0 Y + y_0 X}{K}.$$

Pour plus de commodité, la résultante R à laquelle se réduit le système des forces P, P', P''.... lorsque toutes ces forces sont transportées parallèlement à elles-mêmes et appliquées à un même point, sera nommée désormais la *force principale* du système. Le moment linéaire K résultant de la composition des moments linéaires des forces données sera de même appelé *moment linéaire principal*. Cela posé, il est clair que la direction et l'intensité du moment linéaire principal dépendront de la position du centre des moments; tandis que la direction et l'intensité de la force principale seront indépendantes de son point d'application. De plus, quand on aura construit le moment linéaire principal relatif à l'origine des coordonnées, il suffira de le composer avec le moment linéaire de la force principale appliquée au point dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0, en sens contraire de sa direction naturelle, puis de transporter à ce dernier point l'origine du moment linéaire résultant, pour obtenir le moment linéaire principal relatif à ce même point. On en conclura facilement que *la projection du moment linéaire principal sur la direction de la force principale est une quantité constante, indépendante de la position du centre des moments.* Au reste, cette proposition, que je dois à M. Coriolis, peut encore être démontrée de la manière suivante.

Pour déterminer la projection du moment linéaire principal sur la direction de la force principale, il suffit de multiplier le moment lui-même par le cosinus de l'angle compris entre sa direction et celle de la force, et de prendre la valeur numérique du produit. Or, le cosinus de l'angle compris entre les deux directions est équivalent à la somme

$$\cos a \cos l + \cos b \cos m + \cos c \cos n,$$

laquelle, en vertu des équations (3) et (8), se réduit à la fraction

$$\frac{LX + MY + NZ}{KR}.$$

Donc, la projection cherchée sera équivalente à la valeur numérique de cette fraction multipliée par K, c'est-à-dire, à

$$\pm \frac{LX + MY + NZ}{R}.$$

Cette dernière expression, ainsi que l'on s'y attendait, ne dépend point des coordonnées du centre des moments, mais seulement des six quantités

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

qui conservent les mêmes valeurs, quelle que soit la position de ce centre.

La projection du moment linéaire principal sur la direction de la force principale, étant une quantité invariable, représente la plus petite valeur que puisse admettre ce moment linéaire, ou, en d'autres termes, son *minimum*. Pour obtenir ce minimum, il faut évidemment placer le centre des moments dans une position telle que la direction du moment linéaire principal devienne parallèle à celle de la force principale. Cette condition sera remplie, si l'on a

$$\frac{\cos l}{\cos a}=\frac{\cos m}{\cos b}=\frac{\cos n}{\cos c},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{L-y_0Z+z_0Y}{X}=\frac{M-z_0X+x_0Z}{Z}=\frac{N-x_0Y+y_0X}{Z}.$$

Par conséquent, si l'on nomme

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

les coordonnées d'un point qui, pris pour centre des moments, remplisse la condition énoncée, on aura

$$(9)\qquad \frac{L-\eta Z+\zeta Y}{X}=\frac{M-\zeta X+\xi Z}{Y}=\frac{N-\xi Y+\eta X}{Z}=\frac{LX+MY+NZ}{R^2}.$$

Cette dernière formule équivaut aux trois équations

$$(10)\qquad \begin{cases} L-\eta Z+\zeta Y=\dfrac{X}{R}\,\dfrac{LX+MY+NZ}{R}, \\[2ex] M-\zeta X+\xi Z=\dfrac{Y}{R}\,\dfrac{LX+MY+NZ}{R}, \\[2ex] N-\xi Y+\eta X=\dfrac{Z}{R}\,\dfrac{LX+MY+NZ}{R}. \end{cases}$$

Comme ces trois équations sont du premier degré relativement aux coordonnées ξ, η, ζ, et que la troisième équation se déduit immédiatement des deux autres, il est clair qu'elles appartiennent à une droite, sur laquelle il suffira de placer le centre des moments, pour que le moment linéaire principal devienne un minimum. Cette droite sera désignée désormais sous le nom d'*axe principal*.

Lorsque le système des forces données se réduit à une seule, les six quantités

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

appartiennent à cette force unique, et représentent les projections algébriques de cette force sur les axes, et celles de son moment linéaire par rapport à l'origine. Dans la même hypothèse, on a nécessairement

$$LX + MY + NZ = 0,$$

et par suite les équations (10) se réduisent aux suivantes

$$(11) \qquad Z\eta - Y\zeta = L, \quad X\zeta - Z\xi = M, \quad Y\xi - X\eta = N;$$

c'est-à-dire, aux équations de la droite suivant laquelle agit la force donnée. Donc alors l'axe principal se confond avec cette droite.

Lorsque le système des forces données se réduit à deux forces P, P', on a

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha', \quad Y = P\cos\beta + P'\cos\beta', \quad Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma'.$$

Alors la force principale est la résultante des forces P, P' transportées parallèlement à elles-mêmes et appliquées à un même point, tandis que le moment linéaire principal est la diagonale du parallélogramme construit sur les moments linéaires des deux forces données. Dans la même hypothèse, la force principale s'évanouit, lorsque les deux forces P, P' forment un couple; auquel cas on a nécessairement

$$(12) \qquad \begin{cases} X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \\ P' = P \\ \cos\alpha' = -\cos\alpha, \quad \cos\beta' = -\cos\beta, \quad \cos\gamma' = -\cos\gamma. \end{cases}$$

Dans ce cas particulier, les projections algébriques du moment linéaire principal deviennent indépendantes de la position du centre des moments; par suite, le moment linéaire principal conserve toujours la même valeur, et n'admet plus de minimum, ensorte que l'axe principal disparaît entièrement. La valeur constante du moment linéaire principal est alors équivalente au moment linéaire du couple, c'est-à-dire, au moment linéaire de l'une des forces, quand on place le centre des moments sur la direction de l'autre force, ainsi que nous l'avons déjà expliqué. On arriverait aux mêmes conclusions, en observant que, dans le cas présent, les projections algébriques du moment linéaire principal se réduisent, en vertu des formules (12), à

$$L = P[(y - y')\cos\gamma - (z - z')\cos\beta)],$$
$$M = P[(z - z')\cos\alpha - (x - x')\cos\gamma)],$$
$$N = P[(x - x')\cos\beta - (y - y')\cos\alpha)],$$

c'est-à-dire, aux projections algébriques du moment linéaire de la force P, dans le cas où l'on prend pour centre des moments le point d'application de la force P'.

Si, pour le système des forces P, P', la force principale et le moment linéaire principal s'évanouissaient en même temps, on en conclurait que ces deux forces sont égales et agissent suivant une même droite, mais en sens contraires.

En général, quel que soit le nombre des forces P, P', P''.... lorsque X, Y, Z s'évanouissent, la grandeur et la direction du moment linéaire principal deviennent indépendantes de la position du centre des moments. Par suite, si, la force principale étant nulle, le moment linéaire principal se réduit à zéro pour une certaine position du centre des moments, il s'évanouira également pour toutes les autres.

Considérons, pour fixer les idées, un système composé seulement de trois forces P, P', P''. Si, pour ce système, les six quantités

$$X, Y, Z, L, M, N$$

s'évanouissent, non-seulement la force principale s'évanouira, mais il en sera de même du moment linéaire principal, quel que soit le centre des moments. Cela posé, concevons que l'on fasse coïncider le centre des moments avec le point d'application de la force P''. Dans ce cas, le moment linéaire de la force P'' étant nul, ceux des deux autres forces devront être égaux et dirigés suivant une même droite, mais en sens contraires, afin que le moment résultant se réduise à zéro. Par suite, les directions des forces P' et P'' devront être comprises dans un plan unique mené perpendiculairement à la droite dont il s'agit par le point d'application de la force P''. Ce plan unique, renfermant les points d'application des trois forces P, P', P'', sera nécessairement le plan du triangle formé avec ces trois points; et, comme au point d'application de la force P'' on peut substituer à volonté celui de la force P, ou celui de la force P', on déduira évidemment des remarques que nous venons de faire la proposition suivante

2.e Théorème. *Si pour le système des trois forces P, P', P'' les six quantités*

$$X, Y, Z, L, M, N$$

s'évanouissent, chacune des trois forces sera comprise dans le plan du triangle qui renferme les trois points d'application.



USAGE DES MOMENTS LINÉAIRES

DANS LA RECHERCHE DES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME INVARIABLE

ENTIÈREMENT LIBRE DANS L'ESPACE.

Cherchons d'abord les conditions d'équilibre de deux points matériels (A), (A') sollicités au mouvement par deux forces P, P', et liés entre eux par une droite invariable $\overline{AA'}$. Si l'équilibre subsiste entre les forces appliquées aux extrémités de cette droite, on ne le troublera pas, en fixant l'une de ces extrémités, par exemple, le point (A'). Dans cette supposition, le point (A), restant seul mobile, ne pourra décrire que la surface d'une sphère; et la force P, pour le maintenir en équilibre, devra être normale à cette surface, par conséquent dirigée suivant le rayon $\overline{AA'}$ ou suivant son prolongement. On prouverait de même, en fixant le point (A), que la force P' doit encore être dirigée suivant le rayon $\overline{AA'}$ prolongé dans un sens ou dans un autre. Concevons maintenant que, les forces P, P' agissant l'une et l'autre suivant la droite qui joint leurs points d'application, on rende à ces deux points leur mobilité primitive. Pour que l'équilibre continue de subsister, il sera évidemment nécessaire que la droite soit tirée à ses extrémités par les deux forces dans deux sens opposés, et autant dans un sens que dans l'autre. Par suite, les deux forces devront être égales et dirigées en sens contraires. Réciproquement, si les deux forces P, P', appliquées aux extrémités de la droite invariable $\overline{AA'}$, sont égales entre elles, et agissent suivant cette droite, mais en sens opposés, il y aura évidemment équilibre.

Lorsque deux forces sont égales et agissent suivant une même droite en sens contraires, leurs moments linéaires sont nécessairement égaux et directement opposés. En conséquence, pour le système composé de ces deux forces, le moment linéaire principal s'évanouit aussi bien que la force principale. Réciproquement, si, pour un système composé de deux forces P, P', la force principale et le moment linéaire principal s'évanouissent, on pourra en conclure que ces deux forces sont égales et agissent en sens contraires suivant la droite qui joint leurs points d'application. Donc alors, si cette droite est invariable, elles se feront équilibre.

Pour traduire en analyse les conditions d'équilibre que nous venons de trouver, désignons par

$$x, y, z; x', y', z'$$

les coordonnées des points (A), (A'); et par

$$\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$$

les angles que forment les directions des forces P, P' avec les demi-axes des coordonnées positives. Enfin, soient respectivement

$$X, Y, Z$$

$$L, M, N$$

les sommes des projections algébriques des deux forces sur les axes des x, y, z, et les sommes des projections algébriques sur les mêmes axes de leurs moments linéaires; dans le cas où l'on place le centre des moments à l'origine des coordonnées. La force principale étant représentée par

$$\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)},$$

et le moment linéaire principal par

$$\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)},$$

il sera nécessaire, et il suffira pour l'équilibre que l'on ait à-la-fois
et désignant par m le nombre des racines de l'équation

$$(1) \qquad \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 & \text{et} \\ L^2 + M^2 + N^2 = 0; \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \qquad \begin{cases} X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0; & \text{et} \\ L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0. \end{cases}$$

Si, dans ces dernières équations, on remet pour X, Y, Z, L, M, N leurs valeurs respectives, on trouvera

(3) $$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' = 0,\quad P\cos\beta + P'\cos\beta' = 0,\quad P\cos\gamma + P'\cos\gamma' = 0.$$

(4) $$\begin{cases} P[y\cos\gamma - z\cos\beta] + P'[y'\cos\gamma' - z'\cos\beta'] = 0, P[z\cos\alpha - x\cos\gamma] + P'[z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma'] = 0, \\ P[x\cos\beta - y\cos\alpha] + P'[x'\cos\beta' - y'\cos\alpha'] = 0. \end{cases}$$

En vertu des équations (3), les équations (4) deviennent

(5) $$P[(y-y')\cos\gamma - (z-z')\cos\beta] = 0,\ P[(z-z')\cos\alpha - (x-x')\cos\gamma] = 0,\ P[(x-x)\cos\beta - (y-y')\cos\alpha] = 0;$$

et peuvent être remplacées par les deux équations comprises dans la formule

(6) $$\frac{P\cos\alpha}{x-x'} = \frac{P\cos\beta}{y-y'} = \frac{P\cos\gamma}{z-z'}.$$

En conséquence, les six équations d'équilibre que nous avons d'abord trouvées se réduisent à cinq, savoir, aux équations (3) et à celles que comprend la formule (6). Les équations (3) expriment que les forces P, P' sont égales et agissent en sens opposés, suivant la même droite, ou suivant des droites parallèles. La formule (6) exprime que la force P agit suivant la droite qui joint les points d'application des deux forces. Ajoutons que les équations (5) et la formule (6) peuvent être remplacées par une seule formule, savoir,

(7) $$\frac{P\cos\alpha}{x-x'} = \frac{P\cos\beta}{y-y'} = \frac{P\cos\gamma}{z-z'} = \frac{P'\cos\alpha'}{x'-x} = \frac{P'\cos\beta'}{y'-y} = \frac{P'\cos\gamma'}{z'-z}.$$

En vertu de ce qui précède, une force P, appliquée au point (A) et agissant suivant la droite $\overline{AA'}$, fera équilibre à une seconde force $P'=P$ appliquée à un autre point (A') de la même droite, et dirigée suivant cette droite, mais en sens contraire, pourvu que l'on suppose les deux points liés invariablement entre eux. Cet équilibre subsisterait encore, si l'on transportait le point d'application de la force P de (A) en (A'), sans changer la direction de cette force, puisqu'alors on aurait au point (A') deux forces égales et directement opposées. Le point (A') pouvant d'ailleurs être choisi arbitrairement sur la direction de la force P, nous devons conclure qu'une force dirigée suivant une droite dont tous les points sont supposés liés invariablement les uns aux autres, produit toujours le même effet, en quelque point de cette droite qu'on la suppose appliquée. C'est ce qu'on peut encore exprimer en disant que deux forces appliquées aux extrémités d'une droite invariable, et agissant suivant cette droite dans le même sens, sont *équivalentes*.

Il est essentiel d'observer qu'en transportant le point d'application d'une force par-

tout où l'on voudra sur la direction de cette force, on ne changera jamais ni ses projections algébriques, ni celles de son moment linéaire.

Si, la droite $\overline{AA'}$ demeurant toujours invariable, l'extrémité (A) de cette droite était soumise à l'action de plusieurs forces P, Q, etc...., et l'extrémité (A') à l'action de plusieurs autres forces P', Q', etc...., il serait nécessaire, et il suffirait pour l'équilibre que la résultante des forces P, Q, etc...., fût égale à la résultante des forces P', Q', etc...., et que ces deux résultantes fussent dirigées suivant la même droite $\overline{AA'}$, mais en sens contraires. Par suite, il serait nécessaire et il suffirait que, pour le système de toutes les forces données, la force principale et le moment linéaire principal se trouvassent réduits à zéro. Si l'on désigne toujours par

$$X,\quad Y,\quad Z$$

$$L,\quad M,\quad N$$

les sommes des projections algébriques des forces données sur les axes, et celles de leurs moments linéaires, les deux conditions qu'on vient d'énoncer seront encore exprimées par les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} X^2+Y^2+Z^2=0, \\ L^2+M^2+N^2=0, \end{cases}$$

auxquelles on peut substituer les suivantes

$$(2)\qquad \begin{cases} X=0,\ Y=0,\ Z=0, \\ L=0,\ M=0,\ N=0. \end{cases}$$

Il semble donc, au premier abord, qu'il y ait, dans le cas présent, six équations d'équilibre. Mais on prouvera sans peine, comme on l'a déjà fait dans un cas semblable, que la sixième équation se déduit des cinq autres.

Cherchons maintenant les conditions d'équilibre d'un triangle invariable, c'est-à-dire, de trois points (A), (A'), (A'') liés par trois droites invariables et soumis à l'action de trois forces données P, P', P''. Si l'équilibre subsiste, il ne sera pas troublé, lorsqu'on fixera deux sommets du triangle, par exemple les points (A), (A'). Dans cette supposition, le point (A), restant seul mobile, ne pourra décrire qu'un cercle dont le plan sera perpendiculaire à celui du triangle, et dont le centre se trouvera situé sur la droite $\overline{AA'}$. De plus, la force P'', devant maintenir le point (A'') en équilibre sur la circonférence du cercle, sera nécessairement perpendiculaire à la tangente au cercle menée par le point (A''), et par conséquent

comprise dans le plan du triangle donné. On arriverait encore à la même conclusion, en observant que, si la force P'' n'était pas comprise dans le plan du triangle, elle ferait tourner le plan autour de l'axe $\overline{AA'}$ devenu fixe en vertu de l'hypothèse admise. Cela posé, on pourra construire un parallélogramme qui ait pour diagonale la force P'', et dont les côtés coïncident en direction avec les droites $\overline{A''A}$, $\overline{A''A'}$ ou avec leurs prolongements. Par suite on pourra décomposer la force P'' appliquée au sommet (A'') en deux autres qui agissent suivant les côtés adjacents. Soient Q, Q' les deux composantes dont il s'agit. Il sera permis de transporter la force Q agissant suivant le côté $\overline{A''A}$ du point (A'') au point (A), et la force Q' agissant suivant le côté $\overline{A''A'}$ du point (A'') au point (A'). On obtiendra par ce moyen, au lieu des trois forces P, P', P'' appliquées aux trois sommets d'un triangle invariable, quatre forces P, Q, P', Q' appliquées aux deux extrémités d'une droite invariable, et qui devront encore se faire équilibre. Donc, pour le système des quatre dernières forces, la force principale et le moment linéaire principal devront s'évanouir. D'ailleurs, la décomposition de la force P'' en deux autres, et le transport de ces deux composantes ne peuvent changer en aucune manière ni la force principale ni le moment linéaire principal du système des trois forces P, P', P''. Donc aussi, lorsque le triangle invariable est en équilibre, cette force principale et ce moment linéaire principal s'évanouissent. Cela posé, si l'on appelle

$$X,\ Y,\ Z$$
$$L,\ M,\ N$$

les sommes des projections algébriques des forces P, P', P'', et celles des projections algébriques de leurs moments linéaires, on aura, dans le cas d'équilibre,

$$(1) \qquad \sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}=0, \qquad \sqrt{(L^2+M^2+N^2)}=0;$$

et par suite

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X=0,\quad Y=0,\quad Z=0, \\ L=0,\quad M=0,\quad N=0. \end{array} \right.$$

Réciproquement on peut affirmer que le triangle invariable sera en équilibre, toutes les fois que les équations (2) seront satisfaites, c'est-à-dire, en d'autres termes, toutes les fois que, pour le système des trois forces appliquées aux trois sommets du triangle, la force principale et le moment linéaire principal se réduiront à zéro. En effet, dans cette hypothèse, les directions des trois forces seront, ainsi qu'on l'a précédemment démontré [page 124], comprises dans le plan du triangle. Par suite, on pourra décomposer la force P'' en deux autres dirigées vers les points (A), (A'), et trans-

porter ces dernières composantes de manière à les appliquer aux points dont il s'agit. On substituera par ce moyen au système des trois forces données un système de quatre forces appliquées aux deux extrémités (A), (A') d'une droite invariable; et, comme la force principale et le moment linéaire principal ne changeront pas de valeurs dans le passage du premier système au second, ces deux quantités seront encore nulles pour le nouveau système, d'ou l'on peut conclure qu'il y aura équilibre.

Si, le triangle $AA'A''$ restant invariable, chacun de ses sommets était soumis à l'action de plusieurs forces, on pourrait remplacer les différentes forces appliquées à chaque sommet par une résultante unique. Cela posé, comme le système des trois résultantes ainsi obtenues aurait la même force principale et le même moment linéaire principal que le système des forces données, on trouverait toujours que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre se réduisent à l'évanouissement de cette force principale et de ce moment linéaire principal, ou, ce qui revient au même, à l'évanouissement des six quantités que l'on obtient en ajoutant, 1.° les projections algébriques des forces données, 2.° les projections algébriques de leurs moments linéaires.

Dans les deux cas que nous venons de considérer, et qui sont relatifs à l'équilibre du triangle invariable, la sixième équation d'équilibre ne se déduit plus des cinq autres, comme il arrive quand on considère l'équilibre d'une droite invariable.

Soient maintenant (A), (A'), (A'').... des points liés invariablement les uns aux autres, et en tel nombre que l'on voudra. Ces points formeront ce qu'on appelle un *système invariable*. Cela posé, cherchons les conditions d'équilibre de plusieurs forces

$$P,\ P',\ P''....$$

respectivement appliquées à ces mêmes points; et désignons encore par

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

les sommes des projections algébriques de ces forces et de leurs moments linéaires, le centre des moments étant toujours placé à l'origine des coordonnées. Si l'on suppose d'abord que le plan mené par les trois points (A), (A'), (A'')...., ne renferme aucun des autres points donnés, chacune des forces P''', P'', etc.... pourra être remplacée par trois composantes respectivement dirigées suivant trois arêtes d'une pyramide qui aurait pour base le triangle $AA'A''$, et le point d'application de chacune de ces composantes pourra être transporté à l'un des trois sommets du triangle dont il s'agit. Quand, à l'aide de ces deux espèces d'opérations, on aura substitué au système des forces données celui de plusieurs forces appliquées aux trois sommets d'un triangle invariable, il sera nécessaire, et il suffira pour l'équilibre que la force principale et le

moment principal relatifs au nouveau système s'évanouissent. Or, cette force principale et ce moment linéaire principal se trouvent représentés pour le premier système par les deux quantités

$$\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}, \qquad \sqrt{(L^2+M^2+N^2)};$$

et comme, en passant du premier système au second, on ne change ni les sommes des projections algébriques des forces; c'est-à-dire, les quantités

$$X, \quad Y, \quad Z;$$

ni les sommes des projections algébriques de leurs moments linéaires, c'est-à-dire, les quantités

$$L, \quad M, \quad N;$$

il est clair que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre seront exprimées par les deux formules

$$\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}=0, \qquad \sqrt{(L^2+M^2+N^2)}=0, \tag{1}$$

auxquelles on peut substituer les six équations

$$\left\{\begin{array}{l} X=0,\ Y=0,\ Z=0; \\ L=0,\ M=0,\ N=0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Si l'une des forces P''', P^{IV}, etc..... avait son point d'application situé dans le plan du triangle $AA'A''$, il arriverait de deux choses l'une. Ou cette force se trouverait elle-même comprise dans le plan du triangle, et alors elle pourrait être remplacée par deux composantes appliquées à deux sommets de ce triangle, par exemple, aux points (A), (A'). Ou elle serait dirigée suivant une droite qui couperait le plan, et pourrait alors être appliquée à un nouveau point de cette droite que l'on supposerait invariablement lié avec tous les points du système. Ce nouveau point étant situé hors du plan du triangle, toute difficulté disparaîtrait. Dans l'un et l'autre cas, on parviendra évidemment aux conclusions que nous avons précédemment obtenues. On arriverait aussi au même résultat, en substituant au triangle $AA'A''$ un triangle quelconque dont les trois sommets seraient liés invariablement au système des points donnés. Donc en définitive, pour que des forces quelconques appliquées aux différents points d'un système invariable se fassent équilibre, il est nécessaire et il suffit que la force principale et le moment linéaire principal s'évanouissent, ou, en d'autres termes, que les

sommes des projections algébriques des forces données et des projections algébriques de leurs moments linéaires se réduisent à zéro. Lorsque le système des forces données ne satisfait pas aux conditions d'équilibre, on peut à ce premier système de forces en joindre un autre choisi de manière que l'équilibre se trouve rétabli. Soient, dans cette hypothèse,

$$X_1, \ Y_1, \ Z_1, \ L_1, \ M_1, \ N_1$$

ce que deviennent les quantités

$$X, \ Y, \ Z, \ L, \ M, \ N$$

lorsqu'on passe du premier système au second. On aura nécessairement

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} X+X_1=0, & Y+Y_1=0, & Z+Z_1=0; \\ L+L_1=0, & M+M_1=0, & N+N_1=0; \end{array} \right.$$

ou, ce qui revient au même

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} X_1=-X, & Y_1=-Y, & Z_1=-Z, \\ L=_1-L, & M_1=-M, & N_1=-N. \end{array} \right.$$

Réciproquement, si les équations qui précèdent subsistent, la réunion des deux systèmes produira l'équilibre. Donc, pour que deux systèmes de forces appliqués à des points liés invariablement les uns aux autres se fassent mutuellement équilibre, il est nécessaire et il suffit que, dans le passage du premier système au second, les sommes des projections algébriques des forces et des projections algébriques de leurs moments linéaires conservent les mêmes valeurs numériques, mais changent de signes.



SUR QUELQUES FORMULES

RELATIVES A LA DÉTERMINATION

DU RÉSIDU INTÉGRAL D'UNE FONCTION DONNÉE.

Soit $f(z)$ une fonction donnée de la variable z. Si le produit

$$z f(z) \tag{1}$$

s'évanouit pour des valeurs infinies, réelles ou imaginaires de cette variable, on aura [voyez la page 110]

$$\mathcal{E}((f(z))) = 0. \tag{2}$$

Si, au contraire, le produit (1) se réduit, pour des valeurs infinies de z, à la constante $\mathcal{F}$, on trouvera

$$\mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{F}. \tag{3}$$

Or, si l'on pose $z = \frac{1}{u}$, le produit (1) se changera dans le rapport

$$\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{u}, \tag{4}$$

et la constante désignée par $\mathcal{F}$ coïncidera évidemment avec la valeur de ce rapport correspondante à $u = 0$, ou, ce qui revient au même, avec le résidu de la fonction

$$\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2}, \tag{5}$$

relatif à une valeur nulle de u. On aura donc

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u^2))} = \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))},$$

et la formule (3) pourra être remplacée par la suivante

$$(6)\qquad \mathcal{E}\,((f(z)))=\mathcal{E}\,\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))}\,.$$

Or, cette dernière ne doit pas être restreinte au cas où le produit $z f(z)$ conserve une valeur finie pour des valeurs infinies de z; mais elle subsiste généralement lorsque le résidu de la fonction (5), correspondant à une valeur nulle de u, se réduit à une constante déterminée. C'est ce que nous allons faire voir.

Si l'on suppose le signe $\mathcal{E}$ relatif à la variable s, on aura, en vertu des principes établis à la page 21,

$$(7)\qquad \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2}=\mathcal{E}\,\frac{f\left(\frac{1}{s}\right)}{((s^2))\,(u-s)}+U\,,$$

U représentant une fonction de u qui conservera une valeur finie pour $u=0$; puis, en développant l'expression

$$\mathcal{E}\,\frac{f\left(\frac{1}{s}\right)}{((s^2))\,(u-s)}\,,$$

et désignant par m le nombre des racines de l'équation

$$(8)\qquad \frac{1}{f\left(\frac{1}{s}\right)}=0$$

qui se réduisent à zéro, on trouvera

$$(9)\qquad \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2}=\frac{1}{u}\,\mathcal{E}\,\frac{f\left(\frac{1}{s}\right)}{((s^2))}+\frac{1}{u^2}\,\mathcal{E}\,\frac{s f\left(\frac{1}{s}\right)}{((s^2))}+\ldots+\frac{1}{u^{m+2}}\,\mathcal{E}\,\frac{s^{m+1} f\left(\frac{1}{s}\right)}{((s^2))}+U\,.$$

Si, de plus, on remet pour u sa valeur $\frac{1}{z}$, et si l'on pose

$$(10)\qquad U u^2=\varpi(z)\qquad \text{ou}\qquad U=z^2\varpi(z)\,,$$

on tirera de l'équation (9), multipliée par u^2,

$$(11)\qquad f(z)=\frac{1}{z}\,\mathcal{E}\,\frac{f\left(\frac{1}{s}\right)}{((s^2))}+\mathcal{E}\,\frac{f\left(\frac{1}{s}\right)}{((s))}+\ldots+z^m\,\mathcal{E}\,\frac{s^m f\left(\frac{1}{s}\right)}{((s))}+\varpi(z)\,.$$

Si maintenant on prend le résidu intégral de chacun des membres de la formule (11) par rapport à z, et si l'on a égard aux équations

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)=1,\quad \mathcal{E}((1))=0,\quad \mathcal{E}((z))=0\ldots,\quad \mathcal{E}((z^m))=0,$$

on trouvera

(12) $$\mathcal{E}f(z)=\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))}+\mathcal{E}((\varpi(z))).$$

D'ailleurs, puisque la fonction U conserve une valeur finie, quand on suppose $u=0$, la même supposition fera nécessairement évanouir le produit

$$Uu=z\varpi(z).$$

On aura donc

(13) $$\mathcal{E}((\varpi(z)))=0;$$

et par conséquent l'équation (12) entraînera la suivante

(14) $$\mathcal{E}f(z)=\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))},$$

qui ne diffère pas de la formule (6). On pourrait encore établir la même formule à l'aide des raisonnements que nous allons indiquer.

Si l'on remplace immédiatement, dans la formule (7), u par $\frac{1}{z}$, et si l'on a égard à l'équation

$$\frac{1}{z(1-zz)}=\frac{1}{z}+\frac{z}{1-zz},$$

on trouvera

(15) $$f(z)=\frac{1}{z}\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))}+\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z))(1-zz)}+\varpi(z).$$

De plus, on reconnaîtra facilement que l'expression

$$(16)\qquad \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{s}\right)}{((s))\,(1-zs)},$$

considérée comme fonction de la variable z, donne pour résidu intégral relatif à cette variable une quantité nulle. En effet, ce dernier résidu ne pourrait différer de zéro, que dans le cas où, en désignant par ζ une valeur finie de z, et par $s=\varepsilon$, $z=\zeta+\varepsilon'$, des valeurs de s et de z, infiniment rapprochées, l'une de zéro, l'autre de ζ, on obtiendrait, pour le développement de la fonction

$$\frac{f\left(\frac{1}{s}\right)}{s(1-zs)}=\frac{f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon[1-\varepsilon(\zeta+\varepsilon')]}$$

suivant les puissances ascendantes de ε et de ε', une série de termes dont l'un serait réciproquement proportionnel au produit $\varepsilon\varepsilon'$. Or, il est clair que le développement dont il s'agit ne renfermera point de terme de cette espèce. Cela posé, si l'on prend le résidu intégral, relatif à z, de chacun des deux membres de la formule (15), on retrouvera évidemment l'équation (14), ou, ce qui revient au même, la formule (6).

Concevons à présent que, dans la formule (6), on substitue à la fonction $f(z)$ le rapport

$$\frac{f(z)}{z-x}.$$

On en tirera

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{z-x}\right)\right)=f(x)+\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{z-x}=\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z))\,(1-zx)},$$

et par suite

$$(17)\qquad f(x)=\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}+\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z))\,(1-zx)}.$$

Telle est l'équation que l'on devra substituer à la formule (59) de la page 112, si la fonction $f(z)$ devient infinie en même temps que la variable z.

Lorsque $f(x)$ est une fonction entière de x, le résidu intégral

$$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}$$

s'évanouit, attendu que $f(z)$ conserve une valeur finie pour une valeur finie quelconque de la variable z, et l'équation (17) se réduit à

(18) $$f(x) = \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z))\,(1-zx)}.$$

Il est facile de vérifier cette dernière formule. En effet, supposons

(19) $$f(x) = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + kx + l,$$

$a, b, c \ldots, k, l$ désignant des coëfficients constants, et m un nombre entier. En vertu de ce qui a été dit [page 12], le second membre de la formule (18) ne sera autre chose que le terme indépendant de la quantité infiniment petite ε, dans le développement du produit

(20) $$\frac{f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{1-\varepsilon x} = \left(\frac{a}{\varepsilon^m} + \frac{b}{\varepsilon^{m-1}} + \frac{c}{\varepsilon^{m-2}} + \ldots + \frac{k}{\varepsilon} + l\right)(1 + \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 + \text{etc.}\ldots)$$

en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette même quantité. Or, le terme dont il s'agit est évidemment égal au polynome (19).

Concevons à présent que $f(x)$ représente une fonction rationnelle de la variable x, en sorte que l'on ait

(21) $$f(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)},$$

$\mathrm{f}(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ désignant deux fonctions entières de la même variable. Si le degré de $\mathrm{f}(x)$ est inférieur à celui de $\mathrm{F}(x)$, le résidu

(22) $$\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z))\,(1-zx)}$$

s'évanouira, et la formule (17), réduite à

(23) $$f(x) = \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z},$$

suffira, comme on l'a dit (page 22), pour la décomposition de la fraction rationnelle $f(x)$ en fractions simples. Au contraire, si le degré de $\mathrm{f}(x)$ surpasse le degré de $\mathrm{F}(x)$, la fonction

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$$

se trouvera décomposée par l'équation (17) en deux parties dont l'une, savoir,

(24) $$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}$$

représentera la somme des fractions simples dont l'addition fournit le reste de la division de $f(x)$ par $F(x)$, tandis que l'autre partie, c'est-à-dire, l'expression (22), représentera le quotient de cette même division.

Supposons, pour fixer les idées,

(25) $$f(x)=\frac{1+x^4}{x+x^3}.$$

On tirera de l'équation (17)

(26) $$\frac{1+x^4}{x+x^3}=\mathcal{E}\frac{1+z^4}{((z+z^3))(x-z)}+\mathcal{E}\frac{1+z^4}{(1+z^2)((z^2))(1-xz)}.$$

On trouvera d'ailleurs

$$\mathcal{E}\frac{1+z^4}{((z+z^3))(x-z)}=\mathcal{E}\frac{1+z^4}{((z(z-\sqrt{-1})(z+\sqrt{-1})))}\frac{1}{x-z}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\sqrt{-1}}-\frac{1}{x+\sqrt{-1}}, \text{ et}$$

$$\mathcal{E}\frac{1+z^4}{(1+z^2)((z^2))(1-xz)}=x.$$

Par conséquent la formule (26) donnera

(27) $$\frac{1+x^4}{x+x^3}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\sqrt{-1}}-\frac{1}{x+\sqrt{-1}}+x,$$

ce qui est exact.

Concevons enfin que la fonction $f(x)$ devienne transcendante. Alors, pour que la formule (17) subsiste, il sera nécessaire que l'expression (22) se réduise à une constante déterminée. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on suppose

(28) $$f(x)=\cot\frac{1}{x}.$$

Dans ce cas particulier, on trouvera

$$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}=\mathcal{E}\frac{\sin\frac{1}{z}}{(x-z)\left(\left(\cos\frac{1}{z}\right)\right)}=-\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{x-\frac{1}{\pi}}-\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{x-\frac{1}{2\pi}}-\frac{1}{9\pi^2}\frac{1}{x-\frac{1}{3\pi}}-\text{etc...}$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{x+\frac{1}{\pi}}-\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{x+\frac{1}{2\pi}}-\frac{1}{9\pi^2}\frac{1}{x+\frac{1}{3\pi}}-\text{etc...},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z} = -2x\left\{\frac{1}{\pi^2x^2-1}+\frac{1}{4\pi^2x^2-1}+\frac{1}{9\pi^2x^2-1}+\text{etc.}\ldots\right\},$$

et de plus, en désignant par ε un nombre infiniment petit,

$$\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z))\,(1-zx)} = \mathcal{E}\frac{\cot z}{((z))\,(1-zx)} = \frac{d\left(\frac{\varepsilon\cot\varepsilon}{1-\varepsilon x}\right)}{d\varepsilon} = x\frac{\varepsilon\cot\varepsilon}{(1-\varepsilon x)^2}+\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon x)\cos^2\varepsilon} = x.$$

Par suite, la formule (17) donnera

$$(29)\qquad \cot\frac{1}{x} = x - 2x\left\{\frac{1}{\pi^2x^2-1}+\frac{1}{4\pi^2x^2-1}+\frac{1}{9\pi^2x^2-1}+\text{etc.}\ldots\right\}$$

On trouvera encore de même

$$(30)\qquad \frac{\sin\frac{a}{x-a}}{\sin\frac{a^2}{x^2-a^2}} = 1+\frac{x}{a}$$

$$+ax\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\sin\sqrt{[\pi(\pi+1)]}}{\sqrt{[\pi(\pi+1)]}}\dfrac{1}{a^2+\pi(a^2-x^2)}+\dfrac{\sin\sqrt{[2\pi(2\pi+1)]}}{\sqrt{[2\pi(2\pi+1)]}}\dfrac{1}{a^2+2\pi(a^2-x^2)}\\
+\dfrac{\sin\sqrt{[3\pi(3\pi+1)]}}{\sqrt{[3\pi(3\pi+1)]}}\dfrac{1}{a^2+3\pi(a^2-x^2)}+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\dfrac{\sin\sqrt{[\pi(\pi-1)]}}{\sqrt{[\pi(\pi-1)]}}\dfrac{1}{a^2-\pi(a^2-x^2)}+\dfrac{\sin\sqrt{[2\pi(2\pi-1)]}}{\sqrt{[2\pi(2\pi-1)]}}\dfrac{1}{a^2-2\pi(a^2-x^2)}\\
+\dfrac{\sin\sqrt{[3\pi(3\pi-1)]}}{\sqrt{[3\pi(3\pi-1)]}}\dfrac{1}{a^2-3\pi(a^2-x^2)}+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

Les deux équations qui précèdent suffisent pour montrer le parti que l'on peut tirer de la formule (17). Nous ajouterons que, si, dans l'équation (29), on remplace x par $\frac{1}{x}$, on se trouvera précisément ramené à la formule (62) de la page 113.



SUR UN THÉORÊME

RELATIF AU CONTACT DES COURBES.

Lorsque deux courbes se touchent en un point donné (P), et que l'on marque sur ces courbes, prolongées dans le même sens, deux points (Q), (R), situés à des distances égales et infiniment petites du point de contact, ces distances sont les deux côtés d'un triangle isocèle; et, comme chacune d'elles forme avec la tangente aux deux courbes un angle très-petit, on peut affirmer que la base du triangle isocèle est sensiblement perpendiculaire à ces mêmes courbes. On ne devra plus en dire autant, si le rapport entre les cordes ou distances $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, supposées infiniment petites, n'était pas rigoureusement égal à l'unité, mais en différait très-peu; et, dans ce dernier cas, on pourrait seulement assurer que la distance $\overline{QR}$ forme avec chacune des cordes $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ un angle sensible. Ainsi, quoique le rapport entre ces cordes se rapproche beaucoup de l'unité, quand les deux arcs deviennent rigoureusement égaux, on pourrait douter que, dans cette hypothèse, la distance $\overline{QR}$ fût sensiblement normale aux deux courbes données. C'est néanmoins ce que l'on peut facilement démontrer à l'aide des considérations suivantes.

Supposons que les longueurs égales portées sur la première et la seconde courbe à partir du point de contact, aboutissent, d'une part, au point (x, y, z), de l'autre, au point (ξ, η, ζ). Soient de plus s et ς les arcs renfermés, 1.° entre un point fixe de la première courbe et le point (x, y, z), 2.° entre un point fixe de la seconde courbe et le point (ξ, η, ζ). Tandis que les coordonnées x, y, z; ξ, η, ζ varieront simultanément, la différence

$$s - \varsigma$$

restera invariable, et l'on aura en conséquence $\varsigma = s + const.$,

$$d\varsigma = ds. \tag{1}$$

Soient d'ailleurs α, β, γ les angles que forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, la tangente commune aux deux courbes, prolongée dans le même sens que les arcs s et ς; v la longueur de la droite menée du point (ξ, η, ζ) au point (x, y, z); enfin λ, μ, ν les angles que forme cette droite avec les demi-axes des coordonnées positives. On aura sensiblement

(2) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{d\xi}{d\varsigma}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{d\eta}{d\varsigma}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{d\zeta}{d\varsigma}.$$

(3) $$v = \sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]}.$$

(4) $$\cos\lambda = \frac{\xi - x}{v}, \qquad \cos\mu = \frac{\eta - y}{v}, \qquad \cos\nu = \frac{\zeta - z}{v};$$

et l'on tirera des formules (2) réunies à l'équation (1)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

ou, ce qui revient au même,

(5) $$(dx + d\xi)(dx - d\xi) + (dy + d\eta)(dy - d\eta) + (dz + d\zeta)(dz - d\zeta) = 0.$$

Or, les équations (2) donneront

(6) $$\frac{dx + d\xi}{\cos\alpha} = \frac{dy + d\eta}{\cos\beta} = \frac{dz + d\zeta}{\cos\gamma} = ds + d\varsigma = 2\,ds.$$

De plus, en faisant converger h vers la limite zéro, dans la formule (3) de l'addition placée à la suite des Leçons sur le calcul infinitésimal, on en conclut que, *dans le voisinage d'une valeur particulière de* x, *qui fait évanouir deux fonctions données, le rapport entre ces fonctions diffère très-peu du rapport entre leurs dérivées, et par conséquent du rapport entre leurs différentielles, quand même ces différentielles et ces dérivées s'évanouiraient à leur tour pour la valeur particulière dont il s'agit.* En appliquant ce principe aux seconds membres des formules (4), on reconnaîtra que les quantités $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, peuvent être déterminées approximativement par les formules

(7) $$\cos\lambda = \frac{dx - d\xi}{dv}, \qquad \cos\mu = \frac{dy - d\eta}{dv}, \qquad \cos\nu = \frac{dz - d\zeta}{dv}.$$

On aura donc à très-peu près

(8) $$\frac{dx - d\xi}{\cos\lambda} = \frac{dy - d\eta}{\cos\mu} = \frac{dz - d\zeta}{\cos\nu} = dv.$$

Cette dernière équation sera d'autant plus exacte que les points (x, y, z) et (ξ, η, ζ) se trouveront plus rapprochés du point de contact des deux courbes. Si maintenant on remplace, dans la formule (5), les sommes

$$dx + d\xi, \qquad dy + d\eta, \qquad dz + d\zeta$$

par les quantités $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, qui sont entre elles dans les mêmes rapports, et les différences

$$dx - d\xi, \quad dy - d\eta, \quad dz - d\zeta$$

par des quantités proportionnelles à ces différences, savoir, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, et $\cos\nu$, on trouvera définitivement

$$(9) \qquad \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

Or, la formule (9) exprime que la droite menée du point (x, y, z) au point (ξ, η, ζ) est sensiblement perpendiculaire à la tangente commune aux deux courbes, ou, ce qui revient au même, sensiblement parallèle au plan normal. On peut donc énoncer le théorème suivant, qui est fort utile dans la théorie des contacts des courbes.

1.er Théorème. *Étant données deux courbes qui se touchent, si, à partir du point de contact, on porte sur ces courbes, prolongées dans le même sens, des longueurs égales, mais très-petites, la droite qui joindra les extrémités de ces longueurs sera sensiblement perpendiculaire à la tangente commune aux deux courbes.*

Lorsque, dans ce théorème, on remplace la seconde courbe par une droite tangente à la première, il se transforme en un autre dont voici l'énoncé.

2.e Théorème. *Si, à partir d'un point donné sur une courbe, on porte sur cette courbe et sur sa tangente, prolongées dans le même sens, des longueurs égales et très-petites, la droite qui joindra les extrémités de ces longueurs sera sensiblement perpendiculaire à la tangente, ou, ce qui revient au même, sensiblement parallèle au plan normal.*

Concevons, pour fixer les idées, que l'on désigne par i chacune des longueurs égales portées sur la courbe et sur sa tangente à partir du point donné. Les angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par la droite qui joindra les extrémités de ces deux longueurs, seront des fonctions de i; et, si l'on fait converger i vers la limite zéro, ces angles convergeront en général vers certaines limites, et s'approcheront indéfiniment de ceux qui déterminent la direction d'une certaine normale avec laquelle la droite dont il s'agit tendra de plus en plus à se confondre. Cette normale, qui mérite d'être remarquée, est celle que nous appellerons *normale principale*. Pour en fixer la direction, il suffirait de recourir aux formules (7) et au principe énoncé à la page (141). On peut aussi arriver très-facilement au même but par la méthode que nous allons indiquer.

Désignons par x, y, z les coordonnées du point de la courbe qui coïncide, non plus avec l'extrémité, mais avec l'origine de la longueur i, c'est-à-dire, les coordon-

nées du point par lequel on mène une tangente à la courbe. Soit toujours s l'arc compté sur la courbe entre le point (x, y, z), et un point fixe placé de manière que la longueur i serve de prolongement à l'arc s. Soient encore α, β, γ les angles que forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, la tangente au point (x, y, z) prolongée dans le même sens que l'arc s. Si l'on prend cet arc pour variable indépendante, l'extrémité de la longueur i, portée sur la courbe, aura évidemment pour coordonnées trois expressions de la forme

$$(10)\quad \left\{ \begin{array}{l} x + i\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{i^2}{2}\left(\dfrac{d^2x}{ds^2} + I\right), \quad y + i\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{i^2}{2}\left(\dfrac{d^2y}{ds^2} + J\right), \\ z + i\dfrac{dz}{ds} + \dfrac{i^2}{2}\left(\dfrac{d^2z}{ds^2} + K\right), \end{array} \right.$$

I, J, K devant s'évanouir avec i; tandis que l'extrémité d'une autre longueur égale à i, portée sur la tangente, et comptée dans le même sens que la première, aura pour coordonnées

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} x + i\cos\alpha = x + i\dfrac{dx}{ds}, \quad y + i\cos\beta = y = i\dfrac{dy}{ds}, \\ z + i\cos\gamma = z + i\dfrac{dz}{ds}. \end{array} \right.$$

Cela posé, si l'on nomme v la distance comprise entre les extrémités des deux longueurs, et λ, μ, ν les angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par la droite qui, partant de l'extrémité de la seconde longueur, se dirige vers l'extrémité de la première, on aura évidemment

$$(12)\quad v = \frac{i^2}{2}\sqrt{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} + I\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} + J\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} + K\right)^2\right]},$$

$$(13)\quad \cos\lambda = \frac{i^2}{2v}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + I\right), \quad \cos\mu = \frac{i^2}{2v}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + J\right), \quad \cos\nu = \frac{i^2}{2v}\left(\frac{d^2z}{ds^2} + K\right),$$

et par suite

$$(14)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\cos\lambda}{\dfrac{d^2x}{ds^2} + I} = \dfrac{\cos\mu}{\dfrac{d^2y}{ds^2} + J} = \dfrac{\cos\nu}{\dfrac{d^2z}{ds^2} + K} \\ = \dfrac{1}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{d^2x}{ds^2} + I\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2} + J\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2} + K\right)^2\right]}}. \end{array} \right.$$

Si maintenant on fait converger i vers la limite zéro, les valeurs numériques de I, J, K décroîtront indéfiniment, et, en passant aux limites, on tirera de la formule (14)

$$(15)\qquad \frac{\cos\lambda}{d^2x}=\frac{\cos\mu}{d^2y}=\frac{\cos\nu}{d^2z}=\frac{1}{\sqrt{[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]}}.$$

Les angles λ, μ, ν déterminés par cette dernière formule sont ceux qui se trouvent compris entre la normale principale, prolongée dans un certain sens, et les demi-axes des coordonnées positives. La même formule devrait être remplacée par la suivante

$$(16)\qquad \frac{\cos\lambda}{d^2x}=\frac{\cos\mu}{d^2y}=\frac{\cos\nu}{d^2z}=-\frac{1}{\sqrt{[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]}},$$

si la normale principale avait été prolongée en sens contraire. Ajoutons que les équations (15) et (16) sont renfermées l'une et l'autre dans la seule équation

$$(17)\qquad \frac{\cos\lambda}{d^2x}=\frac{\cos\mu}{d^2y}=\frac{\cos\nu}{d^2z}.$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$(18)\qquad \cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds},$$

et l'on en conclut, en prenant toujours l'arc s pour variable indépendante, que la formule (17) peut être réduite à

$$(19)\qquad \frac{\cos\lambda}{d\cos\alpha}=\frac{\cos\mu}{d\cos\beta}=\frac{\cos\nu}{d\cos\gamma}.$$

Si l'on cessait de prendre l'arc s pour variable indépendante, la formule (17) deviendrait inexacte. Mais la formule (19) existerait toujours; et, en substituant dans celle-ci, à la place de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, leurs valeurs tirées des formules (19), on trouverait

$$(20)\qquad \frac{\cos\lambda}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}=\frac{\cos\mu}{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}=\frac{\cos\nu}{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}.$$

Nous observerons, en finissant, que la normale principale est toujours celle sur laquelle se compte le rayon de courbure de la courbe proposée. Dans le cas où cette courbe devient plane, la normale principale reste comprise dans le plan de la courbe.



SUR LES DIVERS ORDRES

DE QUANTITÉS INFINIMENT PETITES.

Dans quelques-unes des questions qui se rattachent au calcul infinitésimal, et particulièrement dans les questions relatives au contact des courbes et des surfaces, il peut être utile de considérer, non-seulement des quantités infiniment petites du premier, du second, du troisième ordre, etc., mais encore des infiniment petits dont les ordres soient représentés par des nombres fractionnaires ou même irrationnels. La seule difficulté qu'on éprouve alors est de se former une idée précise de l'ordre d'une quantité infiniment petite. Toutefois cette difficulté disparaîtra, si l'on définit l'ordre dont il s'agit comme nous allons le faire.

Désignons par a un nombre constant, rationnel ou irrationnel; par i une quantité infiniment petite; et par r un nombre variable. Dans le système de quantités infiniment petites dont i sera la *base*, une fonction de i représentée par $f(i)$, sera un infiniment petit de l'*ordre* a, si la limite du rapport

(1) $$\frac{f(i)}{i^r}$$

est nulle pour toutes les valeurs de r plus petites que a, et infinie pour toutes les valeurs de r plus grandes que a.

Cette définition admise, si l'on désigne par n le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à l'ordre a de la quantité infiniment petite $f(i)$, le rapport

$$\frac{f(i)}{i^n}$$

sera le premier terme de la progression géométrique

(2) $$f(i),\quad \frac{f(i)}{i},\quad \frac{f(i)}{i^2},\quad \frac{f(i)}{i^3},\quad \text{etc.}\ldots$$

qui cessera d'être une quantité infiniment petite ; d'où l'on conclut, en raisonnant comme dans l'addition placée à la suite des Leçons sur le calcul infinitésimal, que $f^{(n)}(i)$ sera la première des fonctions

(3) $$f(i),\quad f'(i),\quad f''(i),\quad f'''(i),\quad \text{etc.}\ldots,$$

qui cessera de s'évanouir avec i.

Quant au rapport

(4) $$\frac{f(i)}{i^a}$$

que l'on déduit de l'expression (1) en posant $r=a$, il peut avoir une limite finie, ou nulle, ou infinie. Ainsi, par exemple,

$$i^a e^i,\qquad \frac{i^a e^i}{\mathrm{l}(i)},\qquad i^a e^i\,\mathrm{l}(i)$$

sont trois quantités infiniment petites de l'ordre a, et les quotients qu'on obtient en les divisant par i^a, savoir,

$$e^i,\qquad \frac{e^i}{\mathrm{l}(i)},\qquad e^i\,\mathrm{l}(i)$$

ont pour limites respectives

$$1,\qquad 0,\quad \text{et}\quad \frac{1}{0}.$$

Cela posé, on établira sans peine les propriétés des quantités infiniment petites, et en particulier les différents théorêmes que nous allons énoncer.

Théorême 1.er *Si, dans un système quelconque, l'on considère deux quantités infiniment petites d'ordres différents, pendant que ces deux quantités s'approcheront indéfiniment de zéro, celle qui sera d'un ordre plus élevé finira par obtenir constamment la plus petite valeur numérique.*

Démonstration. Concevons que, dans le système dont la base est i, l'on désigne par $I=f(i)$ et par $J=F(i)$ deux quantités infiniment petites, la première de l'ordre a, la seconde de l'ordre b ; et supposons $a<b$. Si l'on attribue au nombre variable r une valeur comprise entre a et b, les deux rapports

$$\frac{I}{i^r},\qquad \frac{J}{i^r}$$

auront pour limites respectives, le premier $\frac{1}{0}$, le second, zéro; et par suite, le quotient de ces rapports, ou la fraction

$$\frac{J}{I},$$

aura une limite nulle. Donc la valeur numérique du numérateur J décroîtra beaucoup plus rapidement que celle du dénominateur I, et cette dernière finira par devenir constamment supérieure à l'autre.

THÉORÈME 2. *Soient a, b, c..... les nombres qui indiquent, dans un système déterminé, les ordres de plusieurs quantités infiniment petites, et a le plus petit de ces nombres. La somme des quantités dont il s'agit sera un infiniment petit de l'ordre a.*

Démonstration. Soit toujours i la base du système adopté. Soient de plus I, J, etc.... les quantités données, la première de l'ordre a, la seconde de l'ordre b, etc.... Le rapport de la somme $I+J+$ etc.... à la quantité I, savoir,

$$1+\frac{J}{I}+\text{etc.}\ldots,$$

aura pour limite l'unité, attendu que les termes $\frac{J}{I}$, etc.... auront des limites nulles. Par suite, le produit

$$\left(1+\frac{J}{I}+\text{etc.}\ldots\right)\frac{I}{i^r}=\frac{I+J+\text{etc.}\ldots}{i^r}$$

aura la même limite que le rapport

$$\frac{I}{i^r},$$

et, puisque ce dernier rapport a une limite nulle ou infinie, suivant qu'on suppose $r<a$ ou $r>a$, on pourra en dire autant du rapport

$$\frac{I+J+\text{etc.}\ldots}{i^r}.$$

Donc $I+J+$ etc.... sera une quantité infiniment petite de l'ordre a.

Corollaire. Les raisonnements par lesquels nous venons d'établir le théorème 1.er, montrent évidemment que, pour de très-petites valeurs numériques de la base i, la somme de plusieurs quantités infiniment petites, rangées de manière que leurs ordres forment une suite croissante, est positive ou négative, suivant que son premier terme est lui-même positif ou négatif.

THÉORÈME 3. *Dans un système quelconque, le produit de deux quantités infiniment petites dont les ordres sont désignés par* a *et par* b, *est une autre quantité infiniment petite de l'ordre* $a+b$.

Démonstration. Soient toujours i la base du système que l'on considère, et I, J les quantités données, la première de l'ordre a, la seconde de l'ordre b. Les rapports

$$\frac{I}{i^r}, \quad \frac{J}{i^s},$$

auront des limites nulles, toutes les fois que l'on supposera $r<a$, $s<b$; des limites infinies, toutes les fois que l'on supposera $r>a$, $s>b$; et l'on pourra en dire autant du produit

$$\frac{I}{i^r}\cdot\frac{J}{i^s}=\frac{IJ}{i^{r+s}}.$$

Il en résulte évidemment que le rapport

$$\frac{IJ}{i^{r+s}}$$

aura une limite nulle pour $r+s<a+b$, et une limite infinie pour $r+s>a+b$. Donc le produit IJ sera une quantité infiniment petite de l'ordre $a+b$.

Nota. Si l'un des facteurs se réduisait à une quantité finie, le produit serait évidemment du même ordre que l'autre facteur.

Corollaire. Dans un système quelconque, le produit de plusieurs quantités infiniment petites dont les ordres sont désignés par $a, b, c, \ldots$ est une autre quantité infiniment petite de l'ordre $a+b+c\ldots$

THÉORÈME 4. *Si trois quantités infiniment petites sont telles que, la première étant prise pour base, la seconde soit de l'ordre* a, *et que, la seconde étant prise pour base, la troisième soit de l'ordre* b, *celle-ci, dans le système qui a pour base la première, sera d'un ordre équivalent au produit* ab.

Démonstration. Soient i, I et J les trois quantités données; en sorte que les deux rapports

$$\frac{I}{i^r}, \quad \frac{J}{I^s}$$

aient des limites nulles quand on suppose à-la-fois $r<a$, $s<b$, et des limites infinies quand on suppose à-la-fois $r>a$, $s>b$. Il est clair que le produit

$$\left(\frac{I}{i^r}\right)^s\frac{J}{I^s}=\frac{J}{i^{rs}}$$

aura une limite nulle pour $rs < ab$, une limite infinie pour $rs > ab$; et par suite, que, si l'on prend i pour base, J sera une quantité infiniment petite de l'ordre ab.

Corollaire 1.er Le rapport entre les ordres de deux quantités infiniment petites J et I reste le même, quelle que soit la base du système que l'on adopte, et ce rapport est équivalent au nombre b, qui indique l'ordre de la première quantité, quand on prend pour base la seconde. Donc, si, après avoir déterminé pour une certaine base les ordres de plusieurs quantités infiniment petites, on vient à changer de base, les nombres qui indiquent ces divers ordres croîtront ou décroîtront tous à-la-fois dans un rapport donné.

Corollaire 2.e Si l'on suppose, dans le théorème 4, que la quantité J se réduise à la quantité i, on aura évidemment $ab = 1$, $b = \frac{1}{a}$. Donc, si dans le système dont la base est i, la quantité I est un infiniment petit de l'ordre a, i sera de l'ordre $\frac{1}{a}$ dans le système qui aura pour base la quantité I. Ainsi, par exemple, lorsque I, considéré comme fonction de i, est un infiniment petit du premier ordre, on peut en dire autant de i considéré comme fonction de I.

Le second corollaire, réuni au premier, entraîne évidemment le suivant.

Corollaire 3.e Si deux quantités infiniment petites sont telles que, l'une étant prise pour base, l'autre soit du premier ordre, le nombre qui exprimera l'ordre d'une quantité quelconque restera le même dans les deux systèmes qui auront pour base les deux quantités données.

On parvient encore assez facilement à démontrer, ainsi que nous l'avons fait à la page 170 des Leçons sur le calcul infinitésimal, un théorème qui peut être employé avec succès dans la théorie des intégrales singulières des équations différentielles, et que nous allons rappeler ici.

Théorème 5. *Si l'on désigne par* i *et par* $f(i)$ *deux quantités infiniment petites, zéro sera la valeur unique ou l'une des valeurs que recevra le produit*

$$\frac{f(i)}{f'(i)} \tag{5}$$

lorsqu'on y fera évanouir la quantité i.

Nous ajouterons que, si la fonction $f(i)$, dans le système de quantités infiniment petites dont i représente la base, est un infiniment petit de l'ordre a, le nombre a sera ordinairement la valeur unique, ou du moins l'une des valeurs que recevra le produit de i par la fraction (5) renversée, c'est-à-dire, le rapport

$$\frac{i f'(i)}{f(i)} = i \frac{d.\mathrm{l} f(i)}{di}, \tag{6}$$

lorsqu'on y fera évanouir la quantité i. C'est ce qui arrivera en particulier, si l'on prend pour $f(i)$ l'une des fonctions

$$i^a e^i, \quad \frac{i^a}{\mathrm{l}(i)}, \quad i^a \mathrm{l}(i), \quad i^a \mathrm{ll}(i), \quad i^a \sin\frac{1}{i}, \quad \text{etc.}\ldots$$

Toutefois il existe des fonctions auxquelles cette remarque n'est pas applicable. On peut citer, comme exemple, la fonction imaginaire

$$i^a\left(\cos\frac{1}{i} + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{i}\right).$$

En effet, si l'on pose

$$f(i) = i^a\left(\cos\frac{1}{i} + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{i}\right) = i^a e^{\frac{1}{i}\sqrt{-1}}, \tag{7}$$

$f(i)$ sera infiniment petit de l'ordre a; et l'on trouvera

$$\frac{i f'(i)}{f(i)} = a - \frac{1}{i}\sqrt{-1}. \tag{8}$$

Or, il est clair que cette dernière expression acquerra une valeur infinie pour une valeur nulle de la quantité i.

SUR LES CONDITIONS D'ÉQUIVALENCE

DE DEUX SYSTÈMES DE FORCES

APPLIQUÉES A DES POINTS LIÉS INVARIABLEMENT LES UNS AUX AUTRES.

On dit en mécanique que deux systèmes de forces, dont les points d'application se trouvent assujettis à des liaisons quelconques, sont *équivalents*, lorsqu'un troisième système, choisi de manière à faire équilibre au premier, fait en même temps équilibre au second. Cela posé, si les points d'application ont été liés invariablement les uns aux autres, il est clair que, dans le passage du premier système au troisième, ou du second au troisième, les six quantités ci-dessus représentées [pag. 119 et suiv.] par

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N$$

devront conserver les mêmes valeurs numériques, mais changer de signe. Par conséquent, dans le passage du premier système au second, elles conserveront les mêmes valeurs numériques et les mêmes signes. Ainsi, pour que deux systèmes de forces appliquées à des points liés par des droites invariables soient équivalents, il est nécessaire et il suffit que de part et d'autre les projections algébriques des forces et de leurs moments linéaires fournissent les mêmes sommes; ce qui revient à dire que ces deux systèmes doivent avoir la même force principale et le même moment linéaire principal.

Concevons maintenant que, pour un système de forces appliquées à des points liés invariablement les uns aux autres, on connaisse les six quantités

$$X, Y, Z, L, M, N.$$

Pour que ce système soit réductible à une force unique, ou, en d'autres termes, pour qu'on puisse le remplacer par une force équivalente, il sera nécessaire et il suffira que les six quantités données soient propres à représenter les projections algébriques d'une seule force et de son moment linéaire. Par suite, il sera nécessaire et il suffira que l'on ait en même temps

(1) $$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

(2) $$LX + MY + NZ = 0.$$

Ces conditions étant supposées remplies, la force équivalente au système donné sera ce qu'on nomme sa *résultante*; et cette résultante ne sera autre chose que la force principale appliquée à l'un des points de la droite dont les coordonnées ξ, η, ζ vérifient les trois équations

(3) $$\left\{\begin{array}{l} \eta Z - \zeta Y = L, \\ \zeta X - \xi Z = M, \\ \xi Y - \eta X = N. \end{array}\right.$$

Si l'on avait à-la-fois

(4) $$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

l'équation (2) serait toujours vérifiée. Mais la formule (1) se trouverait remplacée par la suivante

(5) $$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Dans ce cas, le système donné sera évidemment réductible à deux forces égales et parallèles, mais dirigées en sens contraires de manière à former un couple. En effet, pour obtenir un couple équivalent au système dont il s'agit, il suffira de choisir ce couple de telle sorte que son moment linéaire ait pour projections algébriques sur les axes les trois quantités

$$L, \quad M, \quad N.$$

Pour y parvenir, on tracera un demi-axe qui forme avec eux des coordonnées positives des angles dont les cosinus soient respectivement

$$\frac{L}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}, \quad \frac{M}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}, \quad \frac{N}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}};$$

on mènera par un point quelconque de l'espace un plan perpendiculaire à ce demi-axe, et par deux points pris arbitrairement dans ce plan deux parallèles quelconques; enfin on divisera le radical

$$\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}$$

par la distance des deux parallèles, puis l'on portera sur elles, dans des sens opposés, deux forces égales représentées par le quotient, et dirigées de manière que chacune tende à faire tourner le plan de droite à gauche, soit autour du demi-axe primitivement

construit, soit autour d'un demi-axe parallèle dont l'origine coïnciderait avec le point d'application de l'autre force. Il résulte de ces observations qu'après avoir obtenu un couple équivalent au système donné, on pourra, sans changer l'effet de ce couple relativement à l'équilibre, transporter son plan parallèlement à lui-même partout où l'on voudra, et faire varier arbitrairement dans ce plan non-seulement les points d'application des deux forces, mais encore les droites suivant lesquelles elles agissent. Ces droites étant supposées connues, on en déduira immédiatement l'intensité de chaque force. Il est bien entendu que les points d'application des deux forces du couple sont censés liés invariablement l'un à l'autre et à tous les points que l'on considère.

Si, pour le système de forces donné, l'équation (2) cessait d'être vérifiée, on pourrait substituer à ce système la réunion de deux autres qui donneraient pour les sommes des projections algébriques des forces et de leurs moments linéaires, le premier les six quantités

$$X,\ Y,\ Z,\ 0,\ 0,\ 0,$$

et le second les six quantités

$$0,\ 0,\ 0,\ L,\ M,\ N.$$

Le premier des deux nouveaux systèmes pourrait être remplacé par la force principale appliquée à l'origine des coordonnées, et le second par un couple. Par suite, cette force et ce couple réunis seraient équivalents au système donné. De plus, il serait permis de faire passer le plan du couple par l'origine, et même d'appliquer à cette origine une des forces du couple, en la supposant dirigée suivant une droite quelconque. Ajoutons que l'origine des coordonnées peut être transportée en un point quelconque de l'espace, d'où il suit que le système donné, quelles que soient les valeurs de X, Y, Z, L, M, N, pourra toujours être remplacé par la force principale appliquée à un point quelconque de l'espace et par un couple. On arriverait aux mêmes conclusions, en considérant ce système comme formé par la réunion de deux autres, pour lesquels les sommes des projections algébriques des forces et de leurs moments linéaires seraient respectivement de la forme

$$X,\ Y,\ Z,\quad y_0 Z - z_0 Y,\qquad z_0 X - x_0 Z,\qquad x_0 Y - y_0 Y,$$

$$0,\ 0,\ 0,\ L - y_0 Z + z_0 Y,\ M - z_0 X + x_0 Z,\ N - x_0 Y + y_0 X.$$

Le couple qui, joint à la force principale, peut remplacer un système donné, est ce que nous nommerons le couple principal de ce système. D'après ce qu'on vient de dire, ce couple principal dépend du point d'application de la force principale, et son moment linéaire est égal et parallèle au moment linéaire principal, quand on prend le point dont il s'agit pour centre des moments.

Comme, dans le cas où l'on applique au même point la force principale et une force

du couple principal, rien n'empêche de composer ensuite ces deux forces entre elles, il est clair qu'on pourra, si l'on veut, substituer au système donné, au lieu d'une force et d'un couple, un système composé de deux forces seulement.

Nous terminerons cet article en faisant observer que l'équation (2) est satisfaite dans deux cas dignes de remarque, savoir, 1.° quand les forces données sont parallèles à une même droite, par exemple, à l'axe des z, puisqu'on a dans cette hypothèse $X=0$, $Y=0$, $N=0$; 2.° quand elles sont comprises dans un même plan, par exemple, dans le plan des x,y, puisqu'on a dans ce cas $L=0$, $M=0$, $Z=0$. On en conclut que, dans l'une et l'autre hypothèses, le système donné peut être réduit soit à une force unique, soit à un couple de deux forces parallèles à l'axe des z, ou comprises dans le plan des x,y. Ajoutons que, les quantités

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N,$$

ayant des valeurs quelconques, on pourra toujours décomposer le système qui leur correspond en deux autres tellement choisis que ces mêmes quantités deviennent respectivement pour le premier système

$$0,\ 0,\ Z,\ L,\ M,\ 0,$$

et pour le second

$$X,\ Y,\ 0,\ 0,\ 0,\ N;$$

par conséquent en deux systèmes, dont l'un renferme seulement des forces parallèles à l'axe des z, et l'autre des forces comprises dans le plan des x,y.



USAGE DES MOMENTS LINÉAIRES

DANS LA RECHERCHE DES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME INVARIABLE,

ASSUJETTI A CERTAINES CONDITIONS.

Dans l'article précédent, nous avons fait voir qu'un système de forces appliquées à des points liés invariablement les uns aux autres pouvait toujours être remplacé par la force principale appliquée à un point quelconque de l'espace, et par un couple; qu'en outre il était permis de supposer l'une des forces du couple appliquée au même point que la force principale, et dirigée suivant une droite quelconque menée arbitrairement par ce point. En partant de ces principes, on trouve facilement les conditions d'équilibre d'un système invariable retenu par un ou deux points fixes.

Concevons d'abord que le système invariable soit retenu par un point fixe, et prenons ce point fixe pour origine des coordonnées. Soient, à l'ordinaire,

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

les sommes des projections algébriques des forces données, et des projections algébriques de leurs moments linéaires, l'origine étant prise pour centre des moments. Le système de ces mêmes forces pourra être remplacé par la force principale

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \tag{1}$$

appliquée à l'origine, et par un couple de deux forces Q, qui agiront en sens contraires suivant deux droites parallèles séparées l'une de l'autre par la distance D, l'intensité Q de chaque force étant liée à la distance D par l'équation

$$QD = \sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}. \tag{2}$$

Ajoutons qu'il sera permis d'appliquer la première force du couple, aussi bien que la force R, au point fixe pris pour origine des coordonnées. Alors ces deux forces se trouveront immédiatement détruites par la résistance du point fixe, et la seconde force

du couple pourra seule produire un mouvement de rotation autour de ce point. Pour que toute espèce de tendance à un semblable mouvement disparaisse, ou, en d'autres termes, pour que l'équilibre subsiste, il sera nécessaire, et il suffira que la seconde force du couple s'évanouisse ou passe par l'origine, c'est-à-dire, que l'un des facteurs, Q et D, du produit QD, s'évanouisse. Par suite, il sera nécessaire et il suffira que ce produit lui-même se réduise à zéro; ce qui donnera l'équation

$$L^2 + M^2 + N^2 = 0,$$

à laquelle on pourra substituer les trois suivantes

$$(3) \qquad L = 0, \; M = 0, \; N = 0.$$

En conséquence des six équations d'équilibre qui se rapportent à un système invariable libre dans l'espace, les trois dernières subsistent seules, lorsque ce système est assujetti à tourner autour d'un point fixe, et que ce point fixe est pris pour origine des coordonnées. Ces trois dernières équations expriment que pour le système des forces données, le moment linéaire principal relatif à l'origine s'évanouit.

Si le système des forces données était composé simplement de deux forces P, P', son moment linéaire principal ne pourrait être nul qu'autant que les moments linéaires des deux forces seraient égaux et directement opposés, ou, ce qui revient au même, qu'autant que les deux forces seraient comprises dans un même plan passant par l'origine, et auraient dans ce plan des moments égaux. On arriverait aux mêmes conclusions, en partant des équations (3), qui, dans le cas présent, prendraient la forme

$$Pp\cos\lambda + P'p'\cos\lambda' = 0,$$

$$Pp\cos\mu + P'p'\cos\mu' = 0,$$

$$Pp\cos\nu + P'p'\cos\nu' = 0.$$

L'équilibre que nous considérons ici est évidemment celui d'un levier coudé qui a pour point d'appui l'origine des coordonnées, et pour bras les droites invariables menées de cette origine aux points d'application des forces P, P'. Les deux forces, devant avoir des moments égaux dans le cas d'équilibre, seront alors en raison inverse des perpendiculaires abaissées de l'origine sur leurs directions. Si le levier est droit, et que les deux forces soient parallèles, on pourra substituer à la raison inverse des perpendiculaires la raison inverse des deux bras de levier.

Passons maintenant à l'équilibre d'un système invariable autour de deux points fixes,

ou, ce qui revient au même, autour d'un axe fixe; et prenons cet axe pour axe des z. En conservant les mêmes notations que ci-dessus, on pourra toujours remplacer le système des forces données par la force principale

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$$

appliquée à l'origine, et par deux forces Q formant un couple dont le moment QD sera déterminé par l'équation

$$QD = \sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}.$$

L'origine se trouvant située sur l'axe fixe, et par suite étant elle-même fixe, si on lui applique, ce qui est permis, la première force du couple aussi bien que la force R, la seconde force du couple pourra seule produire un mouvement de rotation du système invariable autour de l'axe fixe. Pour que ce mouvement devienne impossible, il sera nécessaire et il suffira que la seconde force du couple agisse suivant une droite qui coupe l'axe des z, ou, en d'autres termes, que le plan du couple passe par l'axe des z. Cette condition sera remplie si le moment linéaire du couple est perpendiculaire à l'axe des z, auquel cas sa projection algébrique sur cet axe, c'est-à-dire, la quantité N, devra se réduire à zéro. Donc, pour le système invariable assujetti à tourner autour de l'axe des z, une seule équation d'équilibre subsiste, savoir, l'équation

(4) $$N = 0.$$

On prouverait de même que l'équation

$$M = 0$$

exprime la condition unique d'équilibre dans le cas où l'on fixe l'axe des y, et l'équation

$$L = 0,$$

dans le cas où l'on fixe l'axe des x.

Si le système invariable pouvait, non-seulement tourner autour de l'axe des z, mais encore glisser parallèlement à cet axe, il faudrait à l'équation d'équilibre

(4) $$N = 0$$

joindre la suivante

(5) $$Z = 0.$$

En effet, les forces du couple pouvant être censées agir suivant deux droites parallèles

entre elles, mais perpendiculaires à l'axe; pour qu'il n'y eût pas, dans l'hypothèse admise, de mouvement dans ce sens de l'axe, il serait nécessaire, et il suffirait que la force principale R devînt elle-même perpendiculaire à l'axe. Or, cette condition se trouve exprimée par la formule (5).

Si plusieurs points du système invariable étaient assujettis à demeurer dans un plan fixe donné de position, par exemple, dans le plan des x, y, on décomposerait le système de forces qui correspond aux six quantités

$$X, Y, Z, L, M, N$$

en deux autres tellement choisis, que ces six quantités devinssent respectivement

$$o, o, Z, L, M, o$$

pour le premier, et

$$X, Y, o, o, o, N$$

pour le second. Le premier des nouveaux systèmes de forces serait réductible ou à une force unique parallèle à l'axe des z, ou à un couple de deux forces qui, se trouvant comprises dans un plan parallèle à l'axe, pourraient être censées dirigées dans ce plan suivant deux droites parallèles à ce même axe; et, comme, dans l'hypothèse admise, les forces parallèles à l'axe des z ou perpendiculaires au plan des x, y ne sauraient produire aucun effet, il est clair que les forces du second système seraient les seules qui pussent troubler l'équilibre. Or, ce second système peut évidemment se réduire soit à une force unique comprise dans le plan des x, y, soit à un couple de deux forces renfermées dans ce même plan, à moins que les trois quantités

$$X, Y, N$$

ne s'évanouissent, c'est-à-dire, à moins que l'on n'ait à-la-fois

(6) $$X = o, \quad Y = o, \quad N = o.$$

Si ces trois équations ne sont pas vérifiées, la force ou le couple équivalent au second système tendra certainement à produire un mouvement de translation ou de rotation des points situés dans le plan des x, y, et l'équilibre ne pourra subsister. Au contraire, si les conditions (6) sont remplies, les forces comprises dans le plan des x, y pourront être remplacées par une résultante nulle, d'où il suit qu'elles se feront mutuellement équilibre. Par conséquent, dans l'hypothèse admise, les conditions d'équilibre se réduisent aux équations (6).

Il est bon de remarquer que l'espèce d'équilibre dont nous venons de nous occuper en ce moment, comprend, comme cas particulier, l'équilibre de plusieurs forces situées dans le plan des x, y, et appliquées dans ce plan à un système de points invariable, que l'on suppose entièrement libre.

De même, l'équilibre d'un système invariable assujetti à tourner autour de l'axe des z, comprend, comme cas particulier, l'équilibre de plusieurs forces situées dans le plan des x, y, et appliquées dans ce plan à un système invariable de points, assujetti à tourner autour de l'origine.

Il suffit, au reste, de comparer cet article et l'article précédent au chapitre II de la statique de M. Poinsot, pour reconnaître l'analogie et la liaison qui existent entre la théorie des moments linéaires et la théorie des couples.

SUR UN THÉORÈME D'ANALYSE.

(*Extrait du Bulletin de la Société philomathique.*)

Théorème. *Soient*

$$(1)\qquad f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)\ldots = kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q,$$

et

$$(2)\qquad F(x) = K(x-A)(x-B)(x-C)\ldots = Kx^n + Lx^{n-1} + \ldots + Px + Q,$$

deux polynomes en x, *le premier du degré* m, *le second du degré* n; *soit d'ailleurs* R *une quantité constante. On pourra toujours former deux autres polynomes* u, v, *le premier du degré* $n-1$, *le second du degré* $m-1$, *et qui seront propres à vérifier l'équation*

$$(3)\qquad u\,f(x) + v\,F(x) = R.$$

Démonstration. En vertu de la formule d'interpolation de Lagrange, la somme des produits de la forme

$$R\,\frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-A)(x-B)(x-C)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots(a-A)(a-B)(a-C)\ldots} = R\,\frac{\frac{f(x)}{x-a}F(x)}{f'(a).F(a)},$$

et des produits de la forme

$$R\,\frac{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-B)(x-C)\ldots}{(A-a)(A-b)(A-c)\ldots(A-B)(A-C)\ldots} = R\,\frac{f(x)\frac{F(x)}{x-A}}{f(A).F'(A)},$$

sera équivalente à R. Par conséquent on vérifiera l'équation (3) en prenant

$$(4)\qquad u = R\left\{\frac{\left(\frac{F(x)}{x-A}\right)}{f(A).F'(A)} + \frac{\left(\frac{F(x)}{x-B}\right)}{f(B).F'(B)} + \frac{\left(\frac{F(x)}{x-C}\right)}{f(C).F'(C)} + \text{etc}\ldots\right\}, \quad \text{et}$$

$$(5)\qquad v = R\left\{\frac{\left(\frac{f(x)}{x-a}\right)}{F(a).f'(a)} + \frac{\left(\frac{f(x)}{x-b}\right)}{F(b).f'(b)} + \frac{\left(\frac{f(x)}{x-c}\right)}{F(c).f'(c)} + \text{etc}\ldots\right\}.$$

Donc, etc.

Nota. Si l'on voulait déterminer directement les polynomes u et x de manière à vérifier l'équation (8), et, en réduisant leurs degrés aux plus petits nombres possibles, il suffirait d'observer qu'en vertu de cette équation l'on doit avoir,

$$\text{pour} \quad x=A,\ u=\frac{R}{\mathrm{f}(A)}; \qquad \text{pour} \quad x=B,\ u=\frac{R}{\mathrm{f}(B)};\ \text{etc.}\ldots$$

$$\text{pour} \quad x=a,\ v=\frac{R}{\mathrm{F}(a)}; \qquad \text{pour} \quad x=b,\ v=\frac{R}{\mathrm{F}(b)};\ \text{etc.}\ldots$$

On connaît donc n valeurs différentes de u, et m valeurs différentes de v. Cela posé, les polynomes les plus simples que l'on puisse prendre pour u et v devront être en général le premier du degré $n-1$, le second du degré $m-1$; et si on les détermine, par la formule de Lagrange, à l'aide des valeurs particulières que nous venons d'obtenir, on retrouvera précisément les équations (4) et (5).

Corollaire 1.er Supposons que l'on prenne

$$(6)\ R=k^mK^n(a-A)(a-B)(a-C)..(b-A)(b-B)(b-C)..(c-A)(c-B)(c-C)..,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(7) \qquad R=k^m\mathrm{F}(a).F(b).\mathrm{F}(c)\ldots=(-1)^{mn}K^n\mathrm{f}(A).\mathrm{f}(B).\mathrm{f}(C)\ldots$$

Le premier des deux produits

$$\mathrm{F}(a).\mathrm{F}(b).\mathrm{F}(c)\ldots.,\quad \mathrm{f}(A).\mathrm{f}(B).\mathrm{f}(C)\ldots.$$

sera évidemment une fonction entière et symétrique des racines de l'équation $\mathrm{f}(x)=0$, et par conséquent une fonction entière des quantités

$$K, L\ldots, P, Q;\ \frac{l}{k}\ldots\ldots, \frac{p}{k}, \frac{q}{k};$$

tandis que le second sera une fonction entière des quantités

$$k,\ l\ldots, p, q;\ \frac{L}{K}\ldots\ldots, \frac{P}{K}, \frac{Q}{K}.$$

Ces conditions ne peuvent être remplies simultanément qu'autant que la valeur de R, déterminée par la formule (7) est une fonction entière des quantités $k, l\ldots, p, q$; $K, L\ldots, P, Q$. Ajoutons que, si l'on adopte cette valeur de R, les équations (4) et (5) se réduiront à

$$(8)\quad u=(-1)^{mn}K^n\frac{f(B).f(C).f(D)\ldots(B-C)(B-D)\ldots(C-D)\ldots(x-B)(x-C)(x-D)\ldots+\text{etc.}}{(A-B)(A-C)(A-D)\ldots(B-C)(B-D)\ldots(C-D)\ldots},$$

$$(9)\quad v=k^m\frac{F(b).F(c).F(d)\ldots(b-c)(b-d)\ldots(c-d)\ldots(x-b)(x-c)(x-d)\ldots+\text{etc.}}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(b-c)(b-d)\ldots(c-d)\ldots}.$$

Or, les deux termes de la fraction que renferme l'équation (8) sont des fonctions *alternées* des quantités $A, B, C, D\ldots$, c'est-à-dire, des fonctions qui obtiennent des valeurs alternativement positives et négatives, mais toutes égales, au signe près, lorsqu'on échange ces quantités entre elles. De plus, la fonction alternée qui représente le dénominateur, étant la plus simple de son espèce, divisera celle qui forme le numérateur [voyez la première partie du *Cours de l'École polytechnique*, page 75]. Il en résulte que le rapport $\frac{u}{K^n}$ sera une fonction symétrique et entière des racines de l'équation $F(x)=0$. Donc par suite u sera une fonction entière des quantités

$$k, l\ldots, p, q;\ K, \frac{L}{K}\ldots\ldots, \frac{P}{Q}, \frac{Q}{R},$$

et de la variable x. Par la même raison v vera une fonction entière des quantités

$$K, L\ldots P, Q;\ k, \frac{l}{k}\ldots\ldots, \frac{p}{k}, \frac{q}{k},$$

et de la variable x. On doit en conclure que u et v seront équivalents ou à deux fonctions entières des quantités $x, k, l\ldots, p, q;\ K, L\ldots, P, Q;$ ou à deux semblables fonctions divisées, la première par une puissance de K, la seconde par une puissance de k. Or, R désignant déjà une fonction entière des quantités $k, l\ldots, p, q;\ K, L\ldots, P, Q,$ et les quantités u, v devant satisfaire à l'équation (3), la seconde supposition ne saurait être admise. Donc, si l'on attribue à R la valeur fournie par l'équation (6) ou (7), R, u et v seront des fonctions entières des quantités $k, l\ldots, p, q;\ K, L\ldots, P, Q,$ et de la variable x, qui entrera seulement dans u et v. De plus, il est aisé de voir que, dans ces fonctions entières, les coëfficients numériques seront toujours des nombres entiers.

Corollaire 2.° Dans le cas où l'on suppose $k=1$, $K=1$, les équations (6) et (7) se réduisent aux suivantes :

$$(10)\quad R=(a-A)(a-B)(a-C)\ldots(b-A)(b-B)(b-C)\ldots(c-A)(c-B)(c-C)\ldots$$

$$(11)\qquad R=F(a).F(b).F(c)\ldots=(-1)^{mn}f(A).f(B).f(C)\ldots$$

Ce cas particulier, auquel on ramène facilement tous les autres, est celui que nous avons considéré dans le Mémoire présenté à l'Institut le 22 février 1824.

Corollaire 3.ᵉ Pour que les deux polynomes $f(x)$, $F(x)$ se changent en deux fonctions entières de x et y, la première du degré m, la seconde du degré n, il est nécessaire et il suffit que les quantités $k, l, \ldots, p, q$ et $K, L, \ldots, P, Q$ deviennent des fonctions entières de y, des degrés représentés par les nombres $0, 1, \ldots m-1, m$, et par les nombres $0, 1, \ldots n-1, n$. Alors, les rapports

$$\frac{l}{y} \ldots, \frac{p}{y^{m-1}}, \frac{q}{y^m}; \frac{L}{y} \ldots, \frac{P}{y^{n-1}}, \frac{Q}{y^n}$$

se réduisant à des quantités finies pour des valeurs infinies de y, on pourra en dire autant des valeurs de x propres à vérifier les deux équations

$$kx^m + \frac{l}{y}x^{m-1} + \ldots + \frac{p}{y^{m-1}}x + \frac{q}{y^m} = 0, \quad \text{et} \quad Kx^n + \frac{L}{y}x^{n-1} + \ldots + \frac{P}{y^{n-1}}x + \frac{Q}{y^n} = 0,$$

c'est-à-dire des rapports

$$\frac{a}{y}, \frac{b}{y}, \frac{c}{y} \ldots \ldots \frac{A}{y}, \frac{B}{y}, \frac{C}{y} \ldots,$$

et du suivant

$$\frac{R}{y^{mn}} = \left(\frac{a}{y}-\frac{A}{y}\right)\left(\frac{a}{y}-\frac{B}{y}\right)\left(\frac{a}{y}-\frac{C}{y}\right)\ldots\left(\frac{b}{y}-\frac{A}{y}\right)\left(\frac{b}{y}-\frac{B}{y}\right)\left(\frac{b}{y}-\frac{C}{y}\right)\ldots\left(\frac{c}{y}-\frac{A}{y}\right)\left(\frac{c}{y}-\frac{B}{y}\right)\left(\frac{c}{y}-\frac{C}{y}\right)\ldots$$

Cela posé, la valeur de R, fournie par l'équation (6) ou (7), sera évidemment une fonction entière de y, d'un degré inférieur ou tout au plus égal au produit mn. De plus, si, dans cette hypothèse, on écrit $f(x, y)$, $F(x, y)$, au lieu de $f(x)$ et de $F(x)$, la formule (3) deviendra

(12) $$uf(x, y) + vF(x, y) = R,$$

et il est clair que toutes les valeurs de y, qui permettront de vérifier simultanément les équations

(13) $$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0,$$

devront satisfaire à l'équation

(14) $$R = 0.$$

Corollaire 4.ᵉ Il suit du corollaire précédent, qu'étant données deux équations al-

gébriques en x et y, l'une du degré m, l'autre du degré n, on pourra toujours en déduire, par l'élimination de x, une équation en y, dont le degré sera tout au plus égal au produit mn. De plus, on formera aisément le premier membre de l'équation en y, par la méthode fondée sur la considération des fonctions symétriques.

Corollaire 5.° Lorsque les quantités $k, l, \ldots, p, q$; $K, L, \ldots, P, Q$, c'est-à-dire, les coëfficients des deux polynomes $f(x)$ et $F(x)$ se réduisent, aux signes près, à des nombres entiers, on peut en dire autant des coëfficients des fonctions u et v déterminées par les formules (8) et (9); et la valeur numérique de la quantité R, donnée par l'équation (6) ou (7), est pareillement un nombre entier. Dans ce cas, si une même valeur entière de x rend les polynomes $f(x)$ et $F(x)$ divisibles par un certain nombre p, on conclura de la formule (3) que p est un *diviseur entier* de R. En d'autres termes, si l'on adopte la notation de M. Gauss, les formules

$$(15) \qquad f(x) \equiv 0 \pmod{p} \qquad \text{et} \qquad F(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

entraîneront la suivante

$$(16) \qquad R \equiv 0 \pmod{p}.$$

A l'aide de cette dernière formule, on déterminera facilement tous les nombres entiers qui pourront être *communs diviseurs* des deux polynomes $f(x)$ et $F(x)$. Le plus grand de ces nombres entiers, ou *le plus grand commun diviseur entier* des deux polynomes, sera précisément la valeur numérique de R. Si cette valeur numérique se réduit à l'unité, les deux polynomes n'auront jamais de communs diviseurs; ils en auront une infinité, si elle se réduit à zéro.

Corollaire 6.° A l'aide des principes ci-dessus établis, on prouverait aisément que, si l'on donne plusieurs polynomes ou fonctions entières de $x, y, z \ldots$ dont le nombre surpasse d'une unité celui des variables qu'ils renferment, et dont les coëfficients soient entiers, on pourra former un nombre entier qui sera divisible par les diviseurs communs de tous ces polynomes. Si l'on considère en particulier trois polynomes de la forme

$$(17) \qquad F(x, y), \quad f(x) \quad \text{et} \quad f(y),$$

on trouvera que le plus grand nombre entier qui puisse les diviser simultanément est égal, au signe près, à la valeur de R déterminée par l'équation

$$(18) \quad R = K^{m(m+1)} F(a,a) F(a,b) F(a,c) \ldots F(b,a) F(b,b) F(b,c) \ldots F(c,a) F(c,b) F(c,c) \ldots,$$

$a, b, c \ldots$ désignant les racines de l'équation $f(x) = 0$.

Corollaire 7.° Tout nombre premier p, divisant nécessairement le binome

(19) $$x^p - x = x\left(x - \cos\frac{2\pi}{p-1} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{p-1}\right)\left(x - \cos\frac{4\pi}{p-1} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{p-1}\right)\ldots(x-1),$$

quelle que soit la valeur entière de x, il suit du corollaire 5, que tout diviseur premier p d'un polynome $F(x)$ divisera le produit

(20) $$R = F(0)F\left(\cos\frac{2\pi}{p-1} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{p-1}\right)F\left(\cos\frac{4\pi}{p-1} + \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{p-1}\right)\ldots F(1),$$

qui peut être présenté sous la forme

(21) $$R = \pm ABC\ldots.(A^{p-1}-1)(B^{p-1}-1)(C^{p-1}-1)\ldots,$$

lorsque, le coëfficient du premier terme de $F(x)$ se réduisant à l'unité, l'on désigne par A, B, $C\ldots$ les racines de l'équation $F(x)=0$. Si l'on suppose en particulier

$$F(x) = \frac{x^n+1}{x+1},$$

[n étant un nombre premier quelconque], on trouvera

$$R = 0, \qquad \text{ou} \qquad R = \pm 2,$$

suivant que p sera ou ne sera pas de la forme de $nx+1$. Donc les nombres premiers impairs de cette forme sont les seuls qui puissent diviser le binome x^n+1, sans diviser $x+1$. Cette proposition était déjà connue.

Corollaire 8.° Tout nombre premier p, divisant les deux binomes $x^p - x$, et $y^p - y$, quelles que soient les valeurs entières de x et y, ne pourra diviser le polynome $F(x, y)$, sans diviser le nombre qui représente, au signe près, le second membre de l'équation (18), dans le cas où l'on prend pour a, b, $c\ldots$ les racines de l'équation $x^p - x = 0$.

On pourrait étendre considérablement les applications du théorême ci-dessus démontré [page 160]; mais nous nous bornerons pour le moment à celles que nous venons d'indiquer.

Post-scriptum. Le théorême qui fait l'objet de cet article, peut être facilement déduit du calcul des résidus. En effet, si, dans la formule (59) de la page 112. on pose

$$f(x) = \frac{R}{\mathrm{f}(x)\,.\,\mathrm{F}(x)},$$

R désignant une quantité constante, et $\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{F}(x)$ deux fonctions entières de x, on trouvera

$$\frac{R}{\mathrm{f}(x)\,.\,\mathrm{F}(x)} = \mathcal{E}\,\frac{R}{x-z}\,\frac{1}{((\mathrm{f}(z)\,.\,\mathrm{F}(z)))} = \mathcal{E}\,\frac{R}{(x-z)\,\mathrm{f}(z)}\,\frac{1}{((\mathrm{F}(z)))} + \mathcal{E}\,\frac{R}{(x-z)\,\mathrm{F}(z)}\,\frac{1}{((\mathrm{f}(z)))},$$

et par suite

(22) $$R = \mathrm{f}(x)\,\mathcal{E}\,\frac{R\,\mathrm{F}(x)}{(x-z)\,\mathrm{f}(z)}\,\frac{1}{((\mathrm{F}(z)))} + \mathrm{F}(x)\,\mathcal{E}\,\frac{R\,\mathrm{f}(x)}{(x-z)\,\mathrm{F}(z)}\,\frac{1}{((\mathrm{f}(z)))}.$$

On aura donc

(3) $$u\,\mathrm{f}(x) + v\,\mathrm{F}(x) = R,$$

pourvu que l'on suppose

(23) $$u = \mathcal{E}\,\frac{R\,\mathrm{F}(x)}{(x-z)\,\mathrm{f}(z)}\,\frac{1}{((\mathrm{F}(z)))}, \quad v = \mathcal{E}\,\frac{R\,\mathrm{f}(x)}{(x-z)\,\mathrm{F}(z)}\,\frac{1}{((\mathrm{f}(z)))}.$$

Or, les valeurs de u et v, déterminées par les équations (23), se réduisent évidemment à des fonctions entières de x, dont les degrés sont inférieurs d'une unité aux degrés des fonctions proposées $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{f}(x)$.

SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS APPLICABLES

AUX RÉSIDUS DES FONCTIONS,

ET SUR LE CHANGEMENT DE VARIABLE INDÉPENDANTE DANS LE CALCUL DES RÉSIDUS.

Nous avons déjà remarqué [page 134] que l'on peut, dans un grand nombre de cas, substituer au résidu intégral d'une fonction donnée un résidu relatif à une valeur nulle de la variable. Des substitutions du même genre peuvent encore être effectuées à l'aide de quelques autres formules que nous allons faire connaître.

Considérons d'abord une fonction $f(z)$ qui devienne infinie par $z=z_1$; et supposons que l'on puisse assigner au nombre entier m une valeur telle que le produit

$$(z-z_1)^m f(z) \tag{1}$$

s'évanouisse; ce qui arrivera nécessairement, si la fonction $f(z)$ est développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières, mais positives ou négatives, de la variable z. Je dis que le résidu de la fonction donnée $f(z)$, relatif à la valeur $z=z_1$ s'évanouira, en sorte qu'on aura

$$\mathcal{E}\frac{(z-z_1)f'(z)}{((z-z_1))}=0. \tag{2}$$

Effectivement, si l'on représente par $\mathrm{f}(z)$ le produit (1), ou, en d'autres termes, si l'on pose

$$f(z)=\frac{\mathrm{f}(z)}{(z-z_1)^m}, \tag{3}$$

on trouvera

$$f'(z)=\frac{\mathrm{f}'(z)}{(z-z_1)^m}-m\frac{\mathrm{f}(z)}{(z-z_1)^{m+1}}, \tag{4}$$

et par suite

$$\mathcal{E}\frac{(z-z_1)f'(z)}{((z-z_1))}=\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}'(z)}{(((z-z_1)^m))}-m\,\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)}{(((z-z_1)^{m+1}))}=\frac{\mathrm{f}^{(m)}(z_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}-m\frac{\mathrm{f}^{(m)}(z_1)}{1.2.3\ldots m}=0.$$

On pourrait encore démontrer la formule (1) de la manière suivante. Si l'on développe la fonction (3) en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $z - z_1$, on trouvera

$$(5)\qquad f(z) = \frac{f(z_1)}{(z-z_1)^m} + \frac{1}{1}\frac{f'(z_1)}{(z-z_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(z_1)}{z-z_1}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots m} f^{(m)}(z_1) + \frac{1}{1.2.3\ldots m(m+1)}(z-z_1) f^{(m+1)}(z_1) + \text{etc}\ldots,$$

et par conséquent

$$(6)\qquad f'(z) = -m\frac{f(z_1)}{(z-z_1)^{m+1}} - \frac{m-1}{1}\frac{f'(z_1)}{(z-z_1)^m} - \ldots - \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(z_1)}{(z-z_1)^2}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots m(m+1)} f^{(m+1)}(z_1) + \text{etc}\ldots.$$

Or, le second membre de la formule (6) ne renfermant point de terme proportionnel à la première puissance de $\frac{1}{z-z_1}$, on en conclut immédiatement que le résidu de la fonction dérivée $f'(z)$, relatif à la valeur z_1 de la variable z, se réduit à zéro.

Concevons maintenant que l'équation

$$(7)\qquad \frac{1}{f(z)} = 0$$

admette plusieurs racines réelles ou imaginaires $z_1, z_2, z_3, \ldots$, et désignons par ζ l'une quelconque d'entre elles. ζ sera encore une racine de l'équation

$$(8)\qquad \frac{1}{f'(z)} = 0.$$

Car, si l'on représente par i une quantité infiniment petite, la fonction

$$(9)\qquad \frac{1}{f(\zeta+i)}$$

s'évanouira pour $i=0$; et, en vertu du théorème (5) de la page 149, le rapport de cette fonction à sa dérivée, c'est-à-dire, la fraction

$$(10)\qquad \frac{\frac{1}{f(\zeta+i)}}{-\frac{f'(\zeta+i)}{[f(\zeta+i)]^2}} = -\frac{f(\zeta+i)}{f'(\zeta+i)}$$

s'évanouira de même avec i; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la fonction $f'(z)$ deviendra infinie, avec $f(z)$, pour $z = \zeta$. On peut ajouter que, si la fonction $f'(z)$ devient infinie, et fournit un résidu différent de zéro, pour une valeur donnée s de la variable z, s sera nécessairement une racine de l'équation (7). En effet, soit A le résidu dont il s'agit, et

$$(11)\qquad f'(z) = \frac{A_r}{(z-s)^r} + \frac{A_{r-1}}{(z-s)^{r-1}} + \ldots + \frac{A}{z-s} + A_0 + A'(z-s) + \text{etc.}\ldots,$$

le développement de $f'(z)$ suivant les puissances ascendantes de $z - s$. On trouvera, en intégrant les deux membres de la formule (11),

$$(12)\quad f(z) = -\frac{1}{r-1}\frac{A_r}{(z-s)^{r-1}} - \frac{1}{r-2}\frac{A_{r-1}}{(z-s)^{r-2}} - \ldots + A\,l(z-s) + A_0(z-s) + \text{etc.} + \text{const.};$$

et, puisqu'en vertu de l'hypothèse admise, le premier au moins des coëfficients $A, A_2, \ldots, A_{r-1}, A_r$ obtiendra une valeur différente de zéro, il est clair que la fonction $f(z)$ deviendra infinie pour $z = s$. Cela posé, si, pour chaque valeur ζ de z, propre à vérifier l'équation (7), on peut choisir le nombre entier m, de manière que la valeur du produit

$$(13)\qquad (z-\zeta)^m f(z),$$

correspondante à $z = \zeta$, soit finie et différente de zéro, on aura évidemment, en vertu de la formule (2),

$$(14)\qquad \mathcal{E}((f'(z))) = 0.$$

De même, en désignant par x_0, X, y_0, Y des quantités quelconques, on trouvera

$$(15)\qquad {}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f'(z))) = 0;$$

si la condition que nous venons d'énoncer se trouve remplie au moins pour les racines de l'équation (7), dans lesquelles la partie réelle est comprise entre les limites x_0, X, et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y.

Supposons maintenant

$$(16)\qquad f(z) = \varphi(z).\chi(z).$$

On aura

(17) $$f'(z) = \varphi(z)\chi'(z) + \varphi'(z)\chi(z).$$

Par conséquent les équations (14) et (15) donneront

(18) $$\mathcal{E}((\varphi(z).\chi'(z))) = -\mathcal{E}((\varphi'(z).\chi(z))),$$

et

(19) $${}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((\varphi(z).\chi'(z))) = -{}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((\varphi'(z).\chi(z))).$$

La formule (18) ou (19) subsiste, lorsque les racines des deux équations

(20) $$\frac{1}{\varphi(z)} = 0, \qquad (21) \qquad \frac{1}{\chi(z)} = 0$$

vérifient les conditions auxquelles nous supposions précédemment assujetties les racines de l'équation (7). Si ces conditions étaient seulement vérifiées pour les racines de l'équation (20), il faudrait à la formule (18) ou (19) substituer l'une des suivantes

(22) $$\mathcal{E}((\varphi(z))).\chi'(z) = -\mathcal{E}((\varphi'(z))).\chi(z),$$

(23) $${}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((\varphi(z))).\chi'(z) = -{}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((\varphi'(z))).\chi(z).$$

Les formules (18), (19), (21) et (22), peuvent être appliquées avec succès au développement des fonctions en séries. Leur emploi, dans le calcul des résidus, offre des avantages semblables à ceux que l'on retire, dans le calcul infinitésimal, de l'intégration par parties.

Nous terminerons cet article en établissant les formules à l'aide desquelles on peut opérer, dans le calcul des résidus, un changement de variable indépendante.

Soit z_1 une valeur de z propre à vérifier l'équation (7). Soit de plus t_1 une valeur correspondante de la variable t liée à la variable z par l'équation

(24) $$z = \psi(t);$$

et concevons que l'on veuille transformer le résidu

(25) $$\mathcal{E}\frac{(z-z_1).f(z)}{((z-z_1))},$$

de manière que le signe $\mathcal{E}$ se rapporte, non plus à la variable z, mais à la variable t considérée comme indépendante. Si l'équation (7) n'a qu'une seule racine égale à z_1, le produit

$$(26)\qquad (z - z_1) f(z) = [\psi(t) - \psi(t_1)] f[\psi(t)]$$

obtiendra une valeur finie pour $z = z_1$, ou, ce qui revient au même, pour $t = t_1$, et cette valeur sera précisément celle du résidu (25). D'ailleurs on a généralement, pour $t = t_1$,

$$(27)\qquad \frac{\psi(t) - \psi(t_1)}{t - t_1} = \psi'(t),$$

et par suite

$$(28)\qquad [\psi(t) - \psi(t_1)] f[\psi(t)] = (t - t_1) f[\psi(t)] \frac{\psi(t) - \psi(t_1)}{t - t_1} = (t - t_1) f[\psi(t)].\psi'(t),$$

à moins que la fonction dérivée $\psi'(t)$ ne prenne une valeur nulle ou infinie pour $t = t_1$. Donc, si l'on excepte ce dernier cas, le résidu (25) coïncidera nécessairement avec la valeur du produit

$$(29)\qquad (t - t_1) f[\psi(t)] \psi'(t),$$

correspondante à $t = t_1$, et par conséquent avec le résidu de la fonction

$$f[\psi(t)].\psi'(t)$$

relatif à la valeur t_1 de la variable t. On aura donc alors

$$(30)\qquad \mathcal{E} \frac{(z - z_1) f(z)}{((z - z_1))} = \mathcal{E} \frac{(t - t_1).f[\psi(t)].\psi'(t)}{((t - t_1))}.$$

Concevons maintenant que l'équation (7) admette m racines égales à z_1, m étant un nombre entier quelconque. Alors, si l'on représente par $\mathrm{f}(z)$ le produit

$$(1)\qquad (z - z_1)^m f(z),$$

on trouvera

$$(31)\qquad f(z) = \frac{\mathrm{f}(z_1)}{(z - z_1)^m} + \frac{1}{1} \frac{\mathrm{f}'(z_1)}{(z - z_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(m-2)} \frac{\mathrm{f}^{(m-2)}(z_1)}{(z - z_1)^2} + \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(z_1)}{z - z_1}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots m} \mathrm{f}^{(m)}(z_1) + \frac{z - z_1}{1.2.3\ldots m(m+1)} \mathrm{f}^{(m+1)}(z_1) + \text{etc}\ldots,$$

et par suite

$$(32)\qquad f(z)=\mathcal{F}'(z)+\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{f^{(m-1)}(z_1)}{z-z_1},$$

pourvu que l'on suppose

$$(33)\quad \mathcal{F}(z)=-\frac{f(z_1)}{(m-1)(z-z_1)^{m-1}}-\frac{1}{1}\,\frac{f'(z_1)}{(m-2)(z-z_1)^{m-2}}-\ldots-\frac{1}{1.2.3\ldots(m-2)}\,\frac{f^{(m-2)}(z_1)}{z-z_1}$$

$$+\frac{z-z_1}{1.2.3\ldots m}f^{(m)}(z_1)+\frac{1}{2}\,\frac{(z-z_1)^2}{1.2.3\ldots m(m+1)}f^{(m+1)}(z_1)+\text{etc.}\ldots$$

Or, on tirera de l'équation (32), en y remplaçant z par $\psi(t)$,

$$(34)\qquad f[\psi(t)]=\mathcal{F}'[\psi(t)]+\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{f^{(m-1)}(z_1)}{\psi(t)-\psi(t_1)};$$

et l'on en conclura

$$(35)\qquad \mathcal{E}\frac{(t-t_1)f[\psi(t)].\psi'(t)}{((t-t_1))}=$$

$$\mathcal{E}\frac{(t-t_1)\dfrac{d\mathcal{F}[\psi(t)]}{dt}}{((t-t_1))}+\frac{f^{(m-1)}(z_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\mathcal{E}\frac{(t-t_1)\psi'(t)}{((t-t_1))[\psi(t)-\psi(t_1)]}.$$

D'ailleurs, $\mathcal{F}(z)$ étant une fonction de z développable suivant les puissances ascendantes de $z-z_1$, $\mathcal{F}[\psi(t)]$ sera en général une fonction développable suivant les puissances ascendantes, non-seulement de la différence $\psi(t)-\psi(t_1)$, mais encore de $t-t_1$. On aura donc, en vertu de l'équation (2),

$$(36)\qquad \mathcal{E}\frac{(t-t_1)\dfrac{d\mathcal{F}[\psi(t)]}{dt}}{((t-t_1))}=0,$$

et par conséquent la formule (35) donnera

$$(37)\qquad \mathcal{E}\frac{(t-t_1)f[\psi(t)]\psi'(t)}{((t-t_1))}=\frac{f^{(m-1)}(z_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\mathcal{E}\frac{(t-t_1)\psi'(t)}{((t-t_1))[\psi(t)-\psi(t_1)]}.$$

De plus, si la fonction $\psi'(t)$ prend une valeur finie et différente de zéro pour $t=t_1$, on pourra en dire autant du rapport

$$(38)\qquad \frac{\psi(t)-\psi(t_1)}{t-t_1},$$

dont les logarithmes réels ou imaginaires seront en général des fonctions de t développables suivant les puissances ascendantes de $t - t_1$: et, comme, en désignant par $\varpi(t)$ un de ces logarithmes pris dans le système dont la base est e, on trouvera

(39) $$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(t_1)} - \frac{1}{t-t_1} = \varpi'(t), \quad \text{ou} \quad \frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(t_1)} = \varpi'(t) + \frac{1}{t-t_1},$$

on aura, [en vertu de l'équation (2)],

(40) $$\mathcal{E}\frac{(t-t_1)\psi'(t)}{((t-t_1))[\psi(t)-\psi(t_1)]} = \mathcal{E}\frac{(t-t_1)\varpi'(t)}{((t-t_1))} + \mathcal{E}\frac{1}{((t-t_1))} = \mathcal{E}\frac{1}{((t-t_1))} = 1.$$

Cela posé, la formule (37) se réduira évidemment à

(41) $$\mathcal{E}\frac{(t-t_1)f[\psi(t)]\psi'(t)}{((t-t_1))} = \frac{f^{(m-1)}(z_1)}{1.2.3\ldots(m-1)} = \mathcal{E}\frac{(z-z_1)f(z)}{((z-z_1))},$$

c'est-à-dire à l'équation (30).

Si la fonction $\psi(t)$ obtenait, pour $t = t_1$, une valeur nulle ou infinie, on pourrait en dire autant de la fraction (38) ; et l'équation (30) cesserait d'avoir lieu. Concevons que, dans cette même hypothèse, la fraction

(42) $$\frac{\psi(t)-\psi(t_1)}{(t-t_1)^\mu},$$

dans laquelle μ désigne un nombre quelconque, obtienne une valeur finie différente de zéro. On trouvera, en désignant par $\varpi(t)$ l'un des logarithmes Népériens réels ou imaginaires de la fraction (42), et en ayant égard à la formule (2),

(43) $$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(t_1)} - \frac{\mu}{t-t_1} = \varpi'(t), \quad \text{ou} \quad \frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(t_1)} = \varpi'(t) + \frac{\mu}{t-t_1};$$

(44) $$\mathcal{E}\frac{(t-t_1)\psi'(t)}{((t-t_1))[\psi(t)-\psi(t_1)]} = \mathcal{E}\frac{(t-t_1)\varpi'(t)}{((t-t_1))} + \mu\,\mathcal{E}\frac{1}{((t-t_1))} = \mu.$$

Par suite, la formule (37) donnera

(45) $$\mathcal{E}\frac{(t-t_1)f[\psi(t)]\psi'(t)}{((t-t_1))} = \mu\,\mathcal{E}\frac{(z-z_1)f(z)}{((z-z))}.$$

Telle est l'équation qui, dans l'hypothèse admise, devra remplacer la formule (30).

Supposons à présent que, l'équation (7) ayant plusieurs racines réelles ou imaginaires z_1, z_2, z_3....., on propose de transformer le résidu intégral

$$(46)\qquad \mathcal{E}((f(z))),$$

en un résidu dans lequel le signe $\mathcal{E}$ se rapporte à la variable t. Si l'équation (24) fournit pour chaque valeur de z une seule valeur de la variable t, on aura évidemment, en vertu de la formule (30),

$$(47)\qquad \mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{E}((f[\psi(t)].\psi'(t))).$$

Si, au contraire, m désignant un nombre entier quelconque, l'équation (24) fournit, pour chaque valeur de z, m valeurs de la variable t, on aura, toujours en vertu de la formule (30),

$$(48)\qquad \mathcal{E}((f(z))) = m\,\mathcal{E}((f[\psi(t)].\psi'(t))).$$

Il résulte d'ailleurs de la formule (45) que l'équation (48) s'étend au cas même où plusieurs des valeurs de t, tirées de l'équation (24), deviendraient égales entre elles pour une valeur ζ de z propre à vérifier la formule (7), c'est-à-dire, au cas où l'équation

$$(49)\qquad \psi(t) - \zeta = 0,$$

résolue par rapport à t, aurait des racines égales.

Si, la fonction $f(z)$ étant donnée par l'équation (16), on voulait remplacer la variable z par la variable t, non dans l'expression (46), mais dans la suivante

$$(50)\qquad \mathcal{E}((\varphi(z)))\chi(z),$$

il faudrait évidemment substituer à l'équation (30) ou (48) l'une des deux formules

$$(51)\qquad \mathcal{E}((\varphi(z)))\chi(z) = \mathcal{E}((\varphi[\psi(t)].\psi'(t)))\chi[\psi(t)],$$

$$(52)\qquad \mathcal{E}((\varphi(z)))\chi(z) = m\,\mathcal{E}((\varphi[\psi(t)].\psi'(t)))\chi[\psi(t)].$$

Il est bon d'observer que, dans les formules (30), (45), (47), etc...., la fonction dérivée $\psi'(t)$ n'est autre chose que la valeur de $\frac{dz}{dt}$, tirée de l'équation (24).

Pour montrer une application des formules obtenues dans cet article, supposons que l'on ait

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}f\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right), \tag{53}$$

et que, $z=z_1$ désignant une racine de l'équation (7), on propose de transformer le résidu

$$\mathcal{E}\frac{(z-z_1)f(z)}{((z-z_1))}, \tag{25}$$

en substituant à la variable imaginaire z une autre variable imaginaire t liée à la première par l'équation de condition

$$\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}=t, \tag{54}$$

que l'on peut écrire comme il suit

$$z=\frac{1-t}{1+t}\sqrt{-1}. \tag{55}$$

Il est clair que, dans cette hypothèse, à la valeur z_1 de la variable z correspondra une seule valeur t_1 de la variable t. On devra donc recourir, pour la transformation du résidu (25), à la formule (30). D'ailleurs, on tirera de l'équation (54)

$$\frac{dt}{t}=\frac{d(1+z\sqrt{-1})}{1+z\sqrt{-1}}-\frac{d(1-z\sqrt{-1})}{1-z\sqrt{-1}}=\frac{2\sqrt{-1}\,dz}{1+z^2}, \tag{56}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2t\sqrt{-1}}. \tag{57}$$

Cela posé, on conclura de la formule (30), en y remplaçant $\psi'(t)$ par $\frac{dz}{dt}$,

$$\mathcal{E}\frac{z-z_1}{((z-z_1))}\frac{1}{1+z^2}f\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\mathcal{E}\frac{t-t_1}{((t-t_1))}\frac{f(t)}{t}. \tag{58}$$

L'équation (58), combinée avec l'équation (33) de la page (104), conduit, comme nous le montrerons plus tard, à des résultats dignes de remarque.

On pourrait encore, à l'aide des principes ci-dessus établis, opérer un changement de variable indépendante dans un résidu pris entre des limites données. Seulement les limites placées à droite et à gauche du signe $\mathcal{E}$ dans le nouveau résidu, ne seraient plus celles de la nouvelle variable t, et du coëfficient de $\sqrt{-1}$ dans la même variable. C'est au reste ce que nous expliquerons avec plus de détail dans un autre article.



SUR LES DIVERS ORDRES DE CONTACT

DES LIGNES ET DES SURFACES.

L'illustre auteur de la mécanique analytique a établi sur de nouvelles bases la théorie du contact des lignes et des surfaces. Il a fait voir que, si deux courbes planes, représentées par deux équations entre des coordonnées rectangulaires x, y, renferment un même point (P), pour lequel les dérivées de l'ordonnée y prises par rapport à x, depuis la dérivée du premier ordre jusqu'à la dérivée de l'ordre n, ne changent pas de valeurs, quand on substitue la seconde courbe à la première, une troisième courbe ne pourra passer entre les deux autres, à moins que les quantités $y', y'' \ldots y^{(n)}$, relatives à la troisième courbe, ne reprennent, pour le point (P), les valeurs déjà calculées. Donc, si cette condition n'est pas remplie, les deux premières courbes seront plus rapprochées l'une de l'autre que la troisième. Telles sont les considérations que Lagrange emploie pour donner une idée de ce rapprochement des courbes que l'on nomme communément contact ou osculation, et que la manière ordinaire de concevoir le calcul différentiel faisait regarder comme une coïncidence plus ou moins rigoureuse, plus ou moins étendue, quoique, à proprement parler, comme l'observe cet auteur, la coïncidence de deux courbes tangentes ne s'étende pas au-delà du point de contact. Dans la théorie de Lagrange, l'ordre de contact des deux courbes planes n'est autre chose que le nombre n, c'est-à-dire, le nombre des termes successifs de la série

$$(1) \qquad y', y'', y''' \ldots,$$

qui conservent les mêmes valeurs relatives au point de contact, lorsqu'on substitue la seconde courbe à la première. Ajoutons que l'auteur étend cette théorie non-seulement aux courbes à double courbure, mais encore aux surfaces courbes. Il mesure l'ordre de contact de deux courbes à double courbure, représentées comme par deux équations entre trois coordonnées rectangulaires x, y, z, à l'aide du nombre des termes successifs qui, dans chacune des séries

$$(1) \qquad y', y'', y''' \ldots,$$

$$(2) \qquad z', z'', z''' \ldots,$$

conservent les mêmes valeurs, relatives au point de contact, lorsqu'on substitue la seconde courbe à la première; et il en conclut que, si deux courbes tracées dans l'espace ont entre elles un contact de l'ordre n, une troisième ne pourra passer entre elles, sans avoir avec ces mêmes courbes un contact de l'ordre n ou d'un ordre plus élevé. Pareillement, il mesure l'ordre de contact de deux surfaces courbes dont chacune est représentée par une seule équation entre trois coordonnées rectangulaires x, y, z, à l'aide du nombre équivalent à l'ordre des dérivées partielles de z qui forment les derniers termes de la suite

$$(3) \qquad \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}; \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}; \frac{d^3z}{dx^3}, \frac{d^3z}{dx^2dy}, \frac{d^3z}{dxdy^2}, \frac{d^3z}{dy^3}; \text{etc.} \ldots$$

en supposant que l'on arrête cette suite à l'instant même où l'on rencontre un ordre de dérivées qui ne conservent pas toutes les mêmes valeurs, relatives au point de contact, quand on substitue l'une des surfaces à l'autre; puis il attribue au contact de l'ordre n, entre deux surfaces données, ce principal caractère qu'une troisième surface ne peut passer entre les deux premières, sans avoir avec elles un contact du même ordre, ou d'un ordre plus élevé.

Quoique la théorie que nous venons de rappeler ait l'avantage de présenter généralement une idée assez nette du contact de deux courbes planes, elle paraît laisser encore, sous le rapport de la rigueur et de la précision, quelque chose à désirer. D'abord elle fait entrer, dans la définition de l'ordre de contact de deux courbes ou surfaces courbes, l'indication du système de coordonnées que l'on emploie, tandis qu'en réalité cet ordre dépend uniquement de la nature des deux courbes ou des deux surfaces. Lorsqu'on adopte cette même théorie, le rapprochement plus ou moins considérable de deux courbes qui se touchent est mesuré par l'intervalle qui sépare deux points situés sur ces deux courbes dans le voisinage du point de contact, mais à des distances de ce point inégales entre elles, et dont le rapport varie avec la direction des axes coordonnés. De plus, quand il s'agit de courbes à double courbure, on ne voit pas bien clairement ce qu'on doit entendre par une courbe qui passe ou ne passe pas entre deux autres. Une difficulté du même genre existe à l'égard des surfaces courbes. Pour la faire mieux comprendre, considérons les deux surfaces du troisième degré représentées par les deux équations

$$(4) \qquad z = -x^4 - y^4, \qquad\qquad (5) \qquad z = x^4 + y^4.$$

Ces deux surfaces qui se touchent à l'origine, où elles ont entre elles un contact du troisième ordre, en offriront un du premier ordre seulement avec la surface cylindrique représentée par l'équation

(6) $$z = x^2.$$

Donc, en vertu des principes ci-dessus mentionnés, la surface cylindrique ne saurait passer entre les deux autres. C'est pourtant ce qui arrivera, du moins pour la portion de la surface cylindrique qui sera très-voisine de l'axe des y, et, en particulier, pour les points situés sur cet axe. Car ces points seront compris entre les courbes suivant lesquelles les surfaces (4) et (5) se trouvent coupées par le plan des y, z, c'est-à-dire, entre les deux courbes renfermées dans le plan des y, z et déterminées par les équations

(7) $$z = -y^4,$$ (8) $$z = y^4.$$

Enfin, la comparaison des valeurs que fournissent deux courbes ou deux surfaces tangentes l'une à l'autre pour les différents termes des séries (1), (2) ou (3), ne suffit plus à la détermination de l'ordre du contact, lorsque l'angle formé par la tangente commune aux deux courbes avec l'axe des x, ou par le plan tangent commun aux deux surfaces avec le plan des x, y, est précisément un angle droit. Concevons, par exemple, que l'on veuille comparer deux à deux les trois courbes représentées par les équations

(9) $$x = y^2,$$ (10) $$x = y^4,$$ (11) $$x = y^6.$$

Ces trois courbes qui se touchent, et dont la tangente commune coïncide avec l'axe des y, fourniront, pour les dérivées successives de l'ordonnée y, des valeurs qui deviendront toutes infinies quand on supposera $x = 0$. Cependant le contact de la première courbe avec chacune des deux autres sera seulement du premier ordre, et le contact des deux dernières sera seulement du troisième ordre.

Les difficultés que nous venons d'indiquer disparaissent, lorsque, pour établir la théorie du contact des courbes et des surfaces, on a recours aux principes que nous allons exposer.

D'abord on définit aisément la tangente à une courbe, en la considérant comme la droite de laquelle s'approche de plus en plus une sécante, qui coupe la courbe en deux points, tandis que l'un de ces points demeure fixe et que l'autre s'approche indéfiniment du premier. Il est d'ailleurs facile de prouver qu'en général les tangentes menées par un point d'une surface courbe à différentes courbes tracées sur cette surface sont comprises dans un même plan, et l'on établit ainsi l'existence de ce qu'on appelle le plan tangent à une surface courbe. Enfin, on dit que deux courbes ou deux surfaces courbes se touchent en un point donné, quand elles ont en ce point la même tangente ou le même plan tangent.

Cela posé, considérons deux courbes planes ou à double courbure qui se touchent en un certain point. Si de ce point comme centre, et avec un rayon infiniment petit désigné par i, on décrit une sphère, la surface de la sphère coupera les deux courbes en deux nouveaux points très-voisins l'un de l'autre, et le rapprochement plus ou moins considérable des deux courbes, à la distance i du point de contact, aura évidemment pour mesure la longueur infiniment petite comprise entre les deux points dont il s'agit, ou, ce qui revient au même, la corde de l'arc de grand cercle renfermé entre les deux courbes. Ajoutons que les rayons menés aux extrémités de cet arc seront dirigés suivant des droites qui formeront des angles très-petits avec la tangente commune aux deux courbes; d'où il résulte que l'angle compris entre ces rayons sera lui-même une quantité très-petite. Soit ω ce dernier angle. L'arc de grand cercle compris entre les deux courbes aura pour mesure le produit

$$(12) \qquad i\omega,$$

et la corde de cet arc sera équivalente à

$$(13) \qquad 2i\sin\frac{\omega}{2}.$$

Si les deux courbes changent de forme de telle manière que, se touchant toujours au point donné, elles se rapprochent davantage l'une de l'autre dans le voisinage de ce point, les valeurs de l'expression (13), correspondantes à de très-petites valeurs de i, diminueront nécessairement; ce qui suppose que la fonction de i représentée par ω diminuera elle-même. Si, au contraire, en vertu du changement de forme, le rapprochement des deux courbes devient moindre, les valeurs de ω correspondantes à de très-petites valeurs de i croîtront nécessairement. On peut donc affirmer que, dans le voisinage du point de contact, *le rapprochement des deux courbes sera plus ou moins considérable, et leur contact plus ou moins intime, suivant que les valeurs de* ω, *correspondantes à de très-petites valeurs de* i, *seront plus ou moins grandes.* De ce principe joint au théorème 1.er de la page 146, on déduira immédiatement la proposition suivante.

1.er Théorème. *Si deux courbes se touchent en un point donné* (P), *et que l'on marque sur ces deux courbes deux points* (Q), (R) *situés à la distance infiniment petite* i *du point de contact, le rapprochement entre les deux courbes, dans le voisinage de ce point, sera d'autant plus considérable, que l'ordre de la quantité infiniment petite* ω, *destinée à représenter l'angle compris entre les rayons vecteurs* $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, *sera plus élevé.*

Démonstration. En effet, si la forme des deux courbes ou de l'une d'entre elles vient à changer, de manière que l'ordre de la quantité infiniment petite ω s'élève,

la valeur numérique de ω, dans le voisinage du point de contact diminuera, en vertu du théorème 1.er de la page 146, et par suite le rapprochement entre les deux courbes deviendra plus grand qu'il n'étoit d'abord.

Le théorême 1.er étant démontré, il est naturel de prendre l'ordre de la quantité infiniment petite ω, considérée comme fonction de la base i, pour indiquer ce qu'on peut appeler l'ordre de contact des deux courbes proposées. Soit a cet ordre. Puisque le rapport

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$$

a l'unité pour limite, le produit

$$\omega\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}=2\sin\frac{\omega}{2}$$

sera encore une quantité infiniment petite de l'ordre a, tandis que les expressions (12) et (13) seront, en vertu du théorême 3 de la page 148, des quantités infiniment petites de l'ordre $a+1$. On peut donc énoncer la proposition suivante.

2.e Théorême. *Lorsque deux courbes se touchent en un point donné* (P), *l'ordre du contact est inférieur d'une unité à l'ordre de la quantité infiniment petite qui représente la distance entre deux points* (Q), (R) *situés sur les deux courbes, également éloignés du point de contact, et dont la distance à ce point est un infiniment petit du premier ordre.*

Il importe d'observer que la droite $\overline{QR}$ menée du point (Q) au point (R), étant la base d'un triangle isocèle, et opposée, dans ce triangle, au très-petit angle ω, sera sensiblement perpendiculaire aux rayons vecteurs $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, et par suite à la tangente commune aux deux courbes. Ajoutons que la surface du triangle PQR sera, d'après un théorême connu de trigonométrie, équivalente au produit des côtés égaux $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ par le sinus de l'angle compris entre eux, c'est-à-dire, à l'expression

$$\frac{1}{2}i^2\sin\omega, \tag{14}$$

et par conséquent à une quantité infiniment petite, dont l'ordre $a+2$ surpassera de deux unités l'ordre du contact des deux courbes.

Considérons à présent le cas particulier où les courbes données se réduisent à deux courbes planes comprises dans le plan des x, y; et concevons que, par les points (Q), (R), situés sur ces deux courbes à des distances égales, et infiniment petites, du

point de contact, on mène deux droites parallèles dont chacune forme avec la tangente commune un angle fini δ. De ces deux parallèles, l'une se trouvera plus rapprochée que l'autre du point de contact. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit la droite menée par le point (Q) pris sur la première courbe, et que cette droite coupe la seconde courbe en (S). Dans le triangle QRS, le côté $\overline{RS}$, sensiblement parallèle à la tangente commune, puisqu'il représentera une corde dont les extrémités situées sur la seconde courbe seront très-voisines du point de contact, formera évidemment avec les côtés $\overline{QR}$, $\overline{QS}$, des angles finis, dont le premier différera très-peu d'un angle droit, et le second de l'angle δ. On aura donc, en désignant par I et J des quantités infiniment petites,

$$(15)\qquad \overline{QS}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+I\right)}{\sin(\delta+J)}\,\overline{QR}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+I\right)}{\sin(\delta+J)}\cdot 2i\sin\frac{\omega}{2}.$$

De plus, comme le rapport entre la perpendiculaire abaissée du point (P) sur la droite $\overline{QS}$, ou sur son prolongement, et le rayon vecteur $\overline{PQ}=i$ sera sensiblement égal à $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)=\sin\delta$, cette perpendiculaire pourra être représentée par un produit de la forme

$$(16)\qquad i(\sin\delta\pm\varepsilon),$$

$\pm\varepsilon$ désignant encore une quantité infiniment petite. Cela posé, admettons que, les deux courbes ayant entre elles un contact de l'ordre a, l'on considère le rayon vecteur i comme infiniment petit du premier ordre. Il est clair que l'expression (16) sera encore un infiniment petit du premier ordre, tandis que l'expression (15) sera de l'ordre $a+1$. Ajoutons que l'ordre de cette dernière ne variera pas [voyez le 3.e corollaire du théorème 4 de la page 148] si l'on prend pour base l'expression (16), ou une quantité telle que l'expression (16) reste infiniment petite du premier ordre. Ces remarques suffisent pour établir un nouveau théorème que nous allons énoncer.

3.e Théorème. *L'ordre de contact de deux courbes planes qui se touchent en un point donné (P) est inférieur d'une unité à l'ordre de la distance infiniment petite comprise entre les points (Q), (S), où les deux courbes sont rencontrées par une sécante qui forme un angle fini et sensiblement différent de zéro avec la tangente commune, dans tout système où la distance du point de contact à la sécante dont il s'agit est un infiniment petit du premier ordre.*

Si les deux courbes sont représentées par deux équations entre des coordonnées rectangulaires x, y, et si la tangente commune n'est pas parallèle à l'axe des y, alors,

en supposant la sécante parallèle à ce même axe, on déduira du théorème 3 la proposition suivante :

4.° Théorème. *Pour obtenir l'ordre de contact de deux courbes planes qui se touchent en un point où la tangente commune n'est pas parallèle à l'axe des* y, *il suffit de mener une ordonnée très-voisine du point de contact, et de chercher le nombre qui représente l'ordre de la portion infiniment petite d'ordonnée comprise entre les deux courbes, dans le cas où l'on considère la distance du point de contact à l'ordonnée comme infiniment petite du premier ordre. Ce nombre, diminué d'une unité, indique l'ordre de contact.*

Corollaire 1.er Soient

$$y = f(x), \qquad y = F(x) \tag{17}$$

les équations des deux courbes planes. Elles auront un point correspondant à une valeur donnée de x, et en ce point une tangente commune, non parallèle à l'axe des y, si, pour la valeur donnée de x, les équations des deux courbes fournissent des valeurs égales et finies, non-seulement de l'ordonnée y, mais encore de sa dérivée y', en sorte que les équations

$$f(x) = F(x) \tag{18}$$

et

$$f'(x) = F'(x) \tag{19}$$

soient vérifiées, et que les deux membres de chacune d'elles conservent des valeurs finies. Dans cette hypothèse, la différence

$$F(x) - f(x), \tag{20}$$

qui s'évanouira pour la valeur de x relative au point commun, deviendra infiniment petite quand x recevra un accroissement infiniment petit ; et, si l'on considère cet accroissement comme étant du premier ordre, l'ordre de la quantité infiniment petite qui représentera la nouvelle valeur de $F(x) - f(x)$, surpassera d'une unité l'ordre de contact des deux courbes.

Corollaire 2.e Si les deux courbes se touchent en un point de l'axe des y, mais sans avoir cet axe pour tangente commune, il suffira, d'après ce qu'on vient de dire, pour déterminer l'ordre du contact, de chercher le nombre qui indiquera l'ordre de la différence

$$F(x) - f(x),$$

en considérant l'abscisse x comme une quantité infiniment petite du premier ordre, et de diminuer ce nombre d'une unité. En opérant ainsi, on reconnaîtra que les paraboles

$$(21) \qquad y = x^2, \quad y = x^3,$$

ont à l'origine des coordonnées un contact du premier ordre, tandis qu'au même point les deux courbes

$$(22) \qquad y = x^{n+1}, \quad y = x^{n+2},$$

auront un contact de l'ordre n, et les deux courbes

$$(23) \qquad y = x^{\frac{4}{5}}, \quad y = x^{\frac{5}{4}}$$

un contact de l'ordre $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$.

Corollaire 3.e Supposons que les courbes (17) aient un point commun correspondant à l'abscisse x, et en ce point une tangente, commune non parallèle à l'axe des y, avec un contact de l'ordre a. Soit d'ailleurs n le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à a. La différence

$$(20) \qquad F(x) - f(x)$$

sera nulle; et, si l'on désigne par i un accroissement infiniment petit du premier ordre, attribué à l'abscisse x, l'expression

$$(24) \qquad F(x+i) - f(x+i)$$

sera [en vertu du corollaire 1.er] un infiniment petit de l'ordre $a+1$. Or, les dérivées de cette expression par rapport à i étant respectivement

$$F'(x+i) - f'(x+i), \quad F''(x+i) - f''(x+i), \text{ etc.} \ldots,$$

il résulte de ce qui a été dit ci-dessus [pages 145 et 146] que

$$F^{(n+1)}(x+i) - f^{(n+1)}(x+i)$$

sera la première des expressions

$$F(x+i) - f(x+i), \; F'(x+i) - f'(x+i), \; F''(x+i) - f''(x+i), \text{ etc.} \ldots,$$

qui cessera de s'évanouir avec i. En d'autres termes,

$$F^{(n+1)} - f^{(n+1)}(x)$$

sera la première des différences

$$F(x) - f(x), \quad F'(x) - f'(x), \quad F''(x) - f''(x), \text{ etc....},$$

qui obtiendra une valeur différente de zéro. On aura donc pour le point commun

$$(25) \quad F(x) = f(x), \; F'(x) = f'(x), \; F''(x) = f''(x), \ldots \; F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x).$$

Par conséquent, lorsque deux courbes planes se touchent en un point où la tangente commune n'est pas parallèle à l'axe des y, non-seulement pour le point dont il s'agit l'ordonnée y et sa dérivée y' ne changent pas de valeurs dans le passage de la première courbe à la seconde, mais il en est encore de même des dérivées successives $y'', y''', \ldots$, jusqu'à celle dont l'ordre coïncide avec le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à l'ordre du contact.

Corollaire 4.e Si, les deux courbes ayant un contact de l'ordre a, la tangente commune devenait parallèle à l'axe des y, alors, en attribuant à l'abscisse du point de contact un accroissement infiniment petit du premier ordre, on ne trouverait pas généralement pour la valeur correspondante de la différence $F(x) - f(x)$ un infiniment petit de l'ordre $a + 1$. Néanmoins on pourrait encore déterminer l'ordre du contact par la méthode dont nous avons fait usage, pourvu que l'on substituât la variable y à la variable x, et réciproquement, Ainsi, par exemple, pour montrer que les deux courbes

$$(26) \qquad y = x^{\frac{3}{5}}, \qquad y = x^{\frac{3}{4}},$$

qui touchent à l'origine de l'axe des y, ont en ce point un contact de l'ordre $\frac{1}{3}$, il suffira d'observer que leurs équations, résolues par rapport à x, prennent les formes

$$x = y^{\frac{5}{3}}, \qquad x = y^{\frac{4}{3}},$$

et que la différence $y^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{5}{3}}$ est un infiniment petit de l'ordre

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3},$$

quand on considère y comme un infiniment petit du premier ordre. Quant à la différence $F(x) - f(x)$, elle se réduit, dans cet exemple, à

$$x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{3}{4}};$$

et lorsque l'on considère x comme un infiniment petit du premier ordre, elle est une quantité infiniment petite, non plus de l'ordre $\frac{4}{3}$, mais de l'ordre $\frac{3}{5}$ seulement.

Corollaire 5.° Lorsque la tangente commune n'est pas parallèle à l'axe des y, et que l'ordre de contact est un nombre entier, il suffit, pour déterminer cet ordre, de chercher quelle est la dernière des équations

$$(27) \qquad f(x) = F(x), \quad f'(x) = F'(x), \quad f''(x) = F''(x), \text{ etc.} \ldots,$$

qui se trouve vérifiée par l'abscisse du point de contact. L'ordre des dérivées comprises dans cette dernière équation sera précisément le nombre demandé.

Passons maintenant au cas général où l'on considère deux courbes à double courbure qui se touchent en un point (P). Soient toujours (Q), (R) deux points situés sur ces courbes à des distances égales et infiniment petites du point de contact. Soient encore i la valeur commune de ces distances, ω l'angle très-petit qu'elles forment entre elles; et supposons que l'on projette les deux courbes, avec le triangle PQR, sur un plan qui ne soit pas sensiblement perpendiculaire au plan de ce triangle. Les deux courbes projetées auront évidemment la même tangente, ou, en d'autres termes, seront tangentes l'une à l'autre. Désignons par (p), (q), (r) les projections des trois points (P), (Q), (R) par δ l'angle compris entre les plans des triangles PQR, pqr, et par φ, χ, ψ les angles que les droites $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{QR}$ forment respectivement avec leurs projections $\overline{pq}$, $\overline{pr}$, $\overline{qr}$. On aura

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{pq} = \overline{PQ} \cos\varphi = i \cos\varphi, \quad \overline{pr} = \overline{PR} \cos\chi = i \cos\chi, \\ \overline{qr} = \overline{QR} \cos\psi = 2 i \sin \frac{\omega}{2} . \cos\psi . \end{array} \right.$$

D'ailleurs, on prouve facilement que *la projection de la surface d'un triangle sur un plan quelconque est équivalente à cette surface multipliée par le cosinus de l'angle aigu compris entre le plan du triangle et le plan sur lequel on projette, ou, ce qui revient au même, par le cosinus de l'angle aigu compris entre des droites perpendiculaires aux deux plans dont il s'agit.* Donc la surface du triangle pqr aura pour mesure le produit

$$(29) \qquad \frac{1}{2} i^2 \sin\omega . \cos\delta = i^2 \sin \frac{1}{2}\omega . \cos\frac{1}{2}\omega . \cos\delta,$$

et le sinus de l'angle $\overline{pqr}$ sera équivalent au quotient qu'on obtient en divisant le double de cette surface par le produit $\overline{pq}\times\overline{qr}$, c'est-à-dire, à la fraction

$$(30)\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}\omega.\cos\delta}{\cos\varphi.\cos\psi}.$$

Donc le produit de ce cosinus par la droite $\overline{pq}$, ou la perpendiculaire abaissée du point (p) sur la droite $\overline{qr}$, sera représenté par

$$(31)\qquad i\frac{\cos\frac{1}{2}\omega.\cos\delta}{\cos\psi}.$$

Or, la valeur de l'angle ω étant très-petite, et celles des angles φ, χ, ψ étant sensiblement différentes de $\frac{\pi}{2}$, les quantités

$$\cos\frac{1}{2}\omega,\quad \cos\delta,\quad \cos\varphi,\quad \cos\chi,\quad \cos\psi$$

auront des valeurs sensibles. Cela posé, il suffira de jeter les yeux sur les formules (28) et sur l'expression (31) pour reconnaître, 1.° que la distance $\overline{qr}$ est, dans l'hypothèse admise, une quantité infiniment petite de l'ordre $a+1$, et qu'elle forme avec la distance $\overline{pq}$ un angle pqr sensiblement différent de zéro; 2.° que la distance $\overline{qr}$ est un infiniment petit du premier ordre. Observons encore que la tangente commune aux deux courbes projetées, se confondant à très-peu près avec la droite $\overline{pq}$, formera elle-même avec la sécante $\overline{qr}$ un angle fini et sensible. Donc [en vertu du théorème 3.°] *les courbes projetées auront entre elles, ainsi que les courbes proposées, un contact de l'ordre* a.

Si le plan du triangle pqr devenait sensiblement perpendiculaire au plan du triangle PQR, mais en continuant de former un angle sensible avec les côtés $\overline{PQ}, \overline{PR}$, et par conséquent avec la tangente commune aux deux courbes données, le contact entre les deux courbes projetées ne pourrait être que d'un ordre égal ou supérieur au nombre a. Alors, en effet, les distances $\overline{pq}, \overline{pr}$ seraient encore des quantités infiniment petites du premier ordre, tandis que la distance $\overline{qr}$ serait infiniment petite de l'ordre $a+1$, ou d'un ordre supérieur. Or, imaginons que, dans cette nouvelle hypothèse, une sphère soit décrite du point (p) comme centre avec un rayon égal à $\overline{pq}$, et que cette sphère coupe la seconde des deux courbes projetées en (s).

Si l'on joint le point (s) avec les points (q) et (r), la droite $\overline{rs}$ sera sensiblement parallèle à la tangente commune aux deux courbes projetées, puisque ses extrémités seront situées sur l'une de ces courbes à des distances infiniment petites du point (p). Au contraire, la droite $\overline{qr}$, ou, en d'autres termes, la base du triangle isocèle pqs, sera sensiblement perpendiculaire à la même tangente. Donc le triangle qrs sera sensiblement rectangle en (s), et par suite la longueur $\overline{qs}$, sensiblement égale au produit $\overline{qs}\cos(rqs)$, sera, ainsi que la longueur $\overline{qr}$, un infiniment petit de l'ordre $a+1$, ou d'un ordre supérieur. Donc, en vertu du théorème 2, *l'ordre de contact des deux courbes projetées sera nécessairement égal ou supérieur au nombre a.*

Concevons à présent que, tous les points de l'espace étant rapportés à trois axes coordonnés des x, y et z, on projette successivement les deux courbes données sur le plan des x, y, et sur le plan des x, z. Supposons d'ailleurs que l'angle compris entre l'axe des x et la tangente commune aux deux courbes diffère sensiblement d'un angle droit. Cette tangente ne pourra être sensiblement perpendiculaire ni au plan des x, y, ni au plan des x, z, attendu que l'un et l'autre passent par l'axe des x. De plus, ces derniers plans ne pourront être, tous les deux à-la-fois, sensiblement perpendiculaires au plan du triangle PQR. Car, dans ce cas, leur ligne d'intersection, c'est-à-dire l'axe des x, formerait nécessairement un angle très-peu différent de $\frac{\pi}{2}$ avec les droites $\overline{PQ}, \overline{PR}$ comprises dans le plan PQR, et par conséquent avec la tangente commune aux deux courbes. Cela posé, il résulte des principes ci-dessus établis que, dans l'hypothèse admise, le contact des deux courbes projetées, 1.° sur le plan des x, y; 2.° sur le plan des x, z, sera toujours de l'ordre a, ou d'un ordre supérieur, et sur l'un des deux plans au moins, de l'ordre a seulement. On peut donc énoncer la proposition suivante.

Théorème 5. *Pour obtenir l'ordre de contact de deux courbes qui se touchent en un point où la tangente commune ne forme pas un angle droit avec l'axe des x, il suffit de chercher les nombres qui indiquent les ordres de contact des projections des deux courbes sur le plan des x, y, et sur le plan des x, z. Chacun de ces nombres, s'ils sont égaux, ou, le plus petit d'entre eux, s'ils sont inégaux, indiquera l'ordre de contact des courbes proposées.*

Corollaire 1.er Le théorème qui précède subsiste également, dans le cas où les variables x, y, z désignent des coordonnées rectangulaires, et dans le cas où ces variables représentent des coordonnées obliques.

Corollaire 2.e Lorsque deux courbes à double courbure se touchent en un point où

la tangente ne forme pas un angle droit avec l'axe des x, la détermination de l'ordre du contact se trouve réduite par le 5.e théorême à la recherche de l'ordre de contact de deux courbes planes, c'est-à-dire, à un problême déjà résolu.

Corollaire 3.e Supposons que deux courbes, représentées chacune par deux équations entre les coordonnées rectangulaires ou obliques x, y, z, aient entre elles un point commun correspondant à l'abscisse x, et en ce point une tangente commune non perpendiculaire à l'axe des x, avec un contact de l'ordre a. Soit d'ailleurs n le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à a. Enfin, admettons que l'on prenne l'abscisse x pour variable indépendante, et que l'on désigne par y', y'', y'''... z', z'', z'''... les dérivées successives des variables y et z considérées comme fonctions de x. En vertu du 5.e théorême, les quantités

$$(32) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y, \; y', \; y'', \; \ldots. \; y^{(n)}, \ldots \\ y, \; z', \; z'', \; \ldots. \; z^{(n)} \end{array} \right.$$

conserveront les mêmes valeurs, pour le point dont il s'agit, dans le passage de la première courbe à la seconde, tandis que chacune des quantités

$$(33) \qquad y^{(n+1)}, \quad z^{(n+1)},$$

ou au moins l'une des deux changera de valeur.

Corollaire 4.e Lorsque la tangente commune aux deux courbes ne forme pas un angle droit avec l'axe des x, et que l'ordre de contact est un nombre entier, il suffit, pour déterminer cet ordre, de chercher la plus grande valeur qu'on puisse attribuer au nombre entier n, en choisissant ce nombre de manière que les quantités (32) demeurent toutes invariables pour le point de contact dans le passage d'une courbe à l'autre. Cette valeur de n indique précisément l'ordre demandé.

Corollaire 5.e Si la tangente commune aux deux courbes formait un angle droit avec l'axe des x, elle ne pourrait être à-la-fois perpendiculaire au plan des x, y et au plan des x, z. Par suite elle formerait un angle différent de $\frac{\pi}{2}$ avec l'axe des y, et avec l'axe des z, ou au moins avec l'un de ces deux axes. Donc, pour déterminer, dans cette hypothèse, l'ordre de contact des deux courbes à l'aide du 5.e théorême, il suffirait de substituer à l'axe des x l'axe des y ou l'axe des z, et de remplacer en même temps le plan des x, z, ou des x, y, par le plan des y, z.

Le 5.e théorême, à l'aide duquel on fixe aisément l'ordre de contact des deux courbes à double courbure, peut être remplacé par un autre théorême qui n'est sujet à aucune restriction, et que nous allons établir en peu de mots.

Soit toujours (P) le point commun à deux courbes qui se touchent. Soient encore (Q), (R) deux autres points situés sur la première et sur la seconde courbe, également éloignés du point de contact, et dont les distances à ce point se réduisent à une longueur infiniment petite, désignée par i. Enfin, concevons qu'à partir du point (P) on porte sur la seconde courbe un arc PS, qui ait la même longueur que l'arc PQ, qui soit dirigé dans le même sens, et qui aboutisse au point (S). La sécante $\overline{QS}$, en vertu du théorème 1.er de la page 142, sera sensiblement perpendiculaire, ainsi que la sécante $\overline{PR}$, à la tangente commune. De plus, la corde $\overline{RS}$, étant comprise entre deux points de la seconde courbe très-rapprochés du point de contact, sera sensiblement parallèle à cette tangente. Par conséquent, dans le triangle rectiligne QRS, les côtés $\overline{QR}$ et $\overline{QS}$ formeront avec le troisième côté $\overline{RS}$ des angles dont chacun diffèrera très-peu d'un angle droit. Donc le rapport entre les deux premiers côtés, ou, ce qui revient au même, le rapport entre les sinus des angles opposés diffèrera très-peu de l'unité; et l'on aura, en désignant par I une quantité infiniment petite,

$$(34) \qquad \overline{QS}=\overline{QR}(1+I)=(1+I)\,2i\sin\frac{\omega}{2}.$$

D'autre part, comme le rapport entre l'arc $\overline{PQ}$ et la corde $\overline{PQ}=i$ aura pour limite l'unité, on trouvera encore, en désignant par J une quantité infiniment petite,

$$(35) \qquad \operatorname{arc} PQ=(1+J)\,i.$$

Cela posé, admettons que, les deux courbes ayant entre elles un contact de l'ordre a, l'on considère le rayon vecteur i comme infiniment petit du premier ordre. Il est clair que l'arc PQ sera encore un infiniment petit du premier ordre, tandis que la distance $\overline{QS}$ sera de l'ordre $a+1$. Ajoutons que l'ordre de cette distance ne variera pas [voyez le 3.e corollaire du théorème 4 de la page 148], si l'on prend pour base l'arc PQ ou une quantité telle que l'arc PQ reste infiniment petit du premier ordre. Ces remarques suffisent pour établir le nouveau théorème que nous allons énoncer.

Théorème 6.e *Pour obtenir l'ordre de contact de deux courbes qui se touchent en un point donné, il suffit de chercher le nombre qui représente l'ordre de la distance infiniment petite comprise entre les extrémités de deux longueurs égales portées sur les deux courbes à partir du point de contact, dans le cas où ces mêmes longueurs deviennent infiniment petites du premier ordre. Le nombre dont il s'agit, diminué d'une unité, indique toujours l'ordre du contact.*

Corollaire 1.er Soit i la quantité infiniment petite qui représente chacune des deux longueurs mentionnées dans le 6.e théorême. Désignons en outre par x, y, z et par ξ, η, ζ les coordonnées des points auxquels ces longueurs aboutissent sur la première et la seconde courbe. Enfin, soit

$$(36) \qquad \varepsilon = \sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]}$$

la longueur de la droite menée du point (ξ, η, ζ) au point (x, y, z). Si l'on considère i comme un infiniment petit du premier ordre, et si l'on appelle a l'ordre de contact des deux courbes, la distance ε sera [en vertu du 6.e théorême] un infiniment petit de l'ordre $a+1$. Par suite, le carré de cette distance, ou la somme

$$(37) \qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

sera un infiniment petit de l'ordre $2a+2$; ce qui exige que des trois différences

$$(38) \qquad x-\xi, \quad y-\eta, \quad z-\zeta,$$

l'une au moins soit de l'ordre $a+1$, les deux autres étant du même ordre ou d'un ordre plus élevé. On arriverait à la même conclusion, en observant que les valeurs numériques des expressions (38) représentent les projections de la distance ε sur les axes des x, y et z. En effet, il est aisé de reconnaître qu'*une distance infiniment petite et sa projection sur un axe quelconque sont en général des quantités de même ordre. Seulement l'ordre de la projection peut surpasser l'ordre de la distance, dans le cas où celle-ci devient perpendiculaire à l'axe.* Mais il est clair que cette dernière condition ne saurait être remplie à-la-fois pour les trois axes des x, des y et des z.

Corollaire 2.e Conservons les mêmes notations que dans le corollaire précédent. Soit toujours a l'ordre de contact des deux courbes données, et désignons par n le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à a. Puisque, la quantité i étant regardée comme infiniment petite du premier ordre, l'une des trois différences

$$(39) \qquad x-\xi, \quad y-\eta, \quad z-\zeta$$

devra être de l'ordre $a+1$, les deux autres étant du même ordre ou d'un ordre plus élevé; il résulte de ce qui a été dit [page 146] que, si l'on prend i pour variable indépendante,

$$(40)\quad \begin{cases} x-\xi,\ \dfrac{d(x-\xi)}{di},\ \dfrac{d^2(x-\xi)}{di^2},\ldots\ldots \dfrac{d^n(x-\xi)}{di^n}, \\ y-\eta,\ \dfrac{d(y-\eta)}{di},\ \dfrac{d^2(y-\eta)}{di^2},\ldots\ldots \dfrac{d^n(y-\eta)}{di^n}, \\ z-\zeta,\ \dfrac{d(z-\zeta)}{di},\ \dfrac{d^2(z-\zeta)}{di^2},\ldots\ldots \dfrac{d^n(z-\zeta)}{di^n}, \end{cases}$$

s'évanouiront avec i, tandis que chacune des dérivées

$$(41)\quad \frac{d^{n+1}(x-\xi)}{di^{n+1}},\ \frac{d^{n+1}(y-\eta)}{di^{n+1}},\ \frac{d^{n+1}(z-\zeta)}{di^{n+1}},$$

ou du moins l'une d'entre elles cessera de s'évanouir pour $i=0$. Soient d'ailleurs s et ς les arcs renfermés, 1.° entre un point fixe de la première des courbes données et le point mobile (x, y, z); 2.° entre un point de la seconde courbe et le point (ξ, η, ζ); et admettons que ces nouveaux arcs soient dirigés dans le même sens que l'arc i. Comme les trois variables i, s et ς différeront entre elles de quantités constantes, on aura

$$(42)\quad di=ds=d\varsigma;$$

et l'on pourra prendre pour variable indépendante, quand il s'agira de la première courbe, s au lieu de i; quand il s'agira de la seconde courbe, ς au lieu de i. Cela posé, les expressions (40) et (41) deviendront respectivement

$$(43)\quad \begin{cases} x-\xi,\ \dfrac{dx}{ds}-\dfrac{d\xi}{d\varsigma},\ \dfrac{d^2x}{ds^2}-\dfrac{d^2\xi}{d\varsigma^2},\ldots\ldots \dfrac{d^nx}{ds^n}-\dfrac{d^n\xi}{d\varsigma^n}, \\ y-\eta,\ \dfrac{dy}{ds}-\dfrac{d\eta}{d\varsigma},\ \dfrac{d^2y}{ds^2}-\dfrac{d^2\eta}{d\varsigma^2},\ldots\ldots \dfrac{d^ny}{ds^n}-\dfrac{d^n\eta}{d\varsigma^n}, \\ z-\zeta,\ \dfrac{dz}{ds}-\dfrac{d\zeta}{d\varsigma},\ \dfrac{d^2z}{ds^2}-\dfrac{d^2\zeta}{d\varsigma^2},\ldots\ldots \dfrac{d^nz}{ds^n}-\dfrac{d^n\zeta}{d\varsigma^n}, \end{cases}$$

et

$$(44)\quad \frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}-\frac{d^{n+1}\xi}{d\varsigma^{n+1}},\ \frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}-\frac{d^{n+1}\eta}{d\varsigma^{n+1}},\ \frac{d^{n+1}z}{d\varsigma^{n+1}}-\frac{d^{n+1}\zeta}{d\varsigma^{n+1}},$$

En égalant les quantités (43) à zéro, l'on formera les équations

$$(45)\quad \left\{ \begin{array}{l} x=\xi,\ \dfrac{dx}{ds}=\dfrac{d\xi}{d\varsigma},\ \dfrac{d^2x}{ds^2}=\dfrac{d^2\xi}{d\varsigma^2},\ldots,\dfrac{d^nx}{ds^n}=\dfrac{d^n\xi}{d\varsigma^n}, \\[2ex] y=\eta,\ \dfrac{dy}{ds}=\dfrac{d\eta}{d\varsigma},\ \dfrac{d^2y}{ds^2}=\dfrac{d^2\eta}{d\varsigma^2},\ldots,\dfrac{d^ny}{ds^n}=\dfrac{d^n\eta}{d\varsigma^n}, \\[2ex] z=\zeta,\ \dfrac{dz}{ds}=\dfrac{d\zeta}{d\varsigma},\ \dfrac{d^2z}{ds^2}=\dfrac{d^2\zeta}{d\varsigma^2},\ldots,\dfrac{d^nz}{ds^n}=\dfrac{d^n\zeta}{d\varsigma^n}, \end{array} \right.$$

qui devront toutes se vérifier pour le point de contact des courbes proposées, tandis que, pour le même point, chacune des expressions (44), ou au moins l'une d'entre elles, obtiendra une valeur différente de zéro. Si maintenant on observe qu'on peut sans inconvénient substituer, quand il s'agit de la seconde courbe, les lettres x, y, z et s aux lettres ξ, η, ζ et ς, on arrivera immédiatement au théorême que nous allons énoncer.

7.ᵉ Théorême. *Étant proposées deux courbes qui se touchent en un point, si l'on considère les coordonnées x, y, z de chacune d'elles comme des fonctions de l'arc s pris pour variable indépendante, et si l'on suppose cet arc compté sur chaque courbe de telle manière qu'il se prolonge dans le même sens pour les deux courbes au-delà du point de contact; non-seulement, pour le point dont il s'agit, les variables x, y, z, et leurs dérivées du premier ordre*

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds},$$

ne changeront pas de valeurs dans le passage de la première courbe à la seconde; mais il en sera encore de même des dérivées successives

$$\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^3x}{ds^3},\ldots,\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^3y}{ds^3},\ldots,\ \frac{d^2z}{ds^2},\ \frac{d^3z}{ds^3},\ldots$$

jusqu'à celles dont l'ordre sera indiqué par le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à l'ordre du contact. Celles-ci seront les dernières qui rempliront la condition énoncée, en sorte que les trois suivantes, ou au moins l'une des trois, changeront de valeur, quand on passera d'une courbe à l'autre.

Corollaire 1.ᵉʳ Si les deux courbes ont entre elles un contact de l'ordre n, n désignant un nombre entier, alors, dans le passage de la première courbe à la seconde, chacune des quantités

$$(46)\qquad \left\{\begin{array}{l} x,\ \dfrac{dx}{ds},\ \dfrac{d^2x}{ds^2},\ldots\ldots\dfrac{d^nx}{ds^n}, \\[2ex] y,\ \dfrac{dy}{ds},\ \dfrac{d^2y}{ds^2},\ldots\ldots\dfrac{d^ny}{ds^n}, \\[2ex] z,\ \dfrac{dz}{ds},\ \dfrac{d^2z}{ds^2},\ldots\ldots\dfrac{d^nz}{ds^n}, \end{array}\right.$$

conservera la même valeur pour le point de contact, tandis que chacune des trois dérivées

$$(47)\qquad \frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}},\quad \frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}},\quad \frac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}},$$

ou, au moins l'une des trois, prendra une valeur nouvelle.

On pourrait aisément revenir du théorème 7 aux théorèmes 4 et 5. On pourrait aussi en déduire généralement les conditions auxquelles doivent satisfaire les dérivées des coordonnées de deux courbes quelconques, pour que ces deux courbes aient entre elles un contact d'un certain ordre, dans le cas où l'on prend pour variable indépendante, non plus l'abscisse x ou l'arc s, mais une fonction quelconque des coordonnées x, y, z. Toutefois, comme, pour y parvenir, il suffirait d'avoir recours à un changement de variable indépendante, nous ne nous étendrons pas sur ce sujet, qui ne présente aucune difficulté réelle, et nous passerons immédiatement à l'exposition des principes qui nous paraissent devoir être adoptés dans la théorie des contacts des surfaces courbes.

Considérons deux surfaces qui se touchent en un point donné (P). Si, par le point (P), on mène un plan normal aux deux surfaces, les deux lignes d'intersection seront tangentes l'une à l'autre; et, si l'on fait tourner ce plan autour de la normale, les deux lignes dont il s'agit changeront en général de position et de forme. Quant au nombre qui représentera l'ordre de contact de ces deux lignes, il pourra ou demeurer toujours le même, ou changer de valeur avec la position du plan normal. Or, ce nombre, quand il est invariable, ou sa valeur *minimum*, dans le cas contraire, sert à mesurer ce qu'on appelle l'*ordre de contact* des deux surfaces. Soit a cet ordre; et supposons que, les deux surfaces étant coupées par un plan normal quelconque, c'est-à-dire par un plan qui renferme la normale commune, on nomme (Q), (R) les points où les courbes d'intersection, prolongées dans un certain sens, sont rencontrées par un arc de cercle décrit du point (P) comme centre avec un rayon très-petit désigné par i. Si l'on considère ce rayon comme infiniment petit du premier ordre, la distance $\overline{QR}$, variable avec la position du plan normal, sera elle-même une

quantité infiniment petite, d'un ordre marqué par un nombre constant ou variable dont $a+1$ représentera la valeur unique ou la valeur *minimum*.

Concevons maintenant que, par le point (Q) situé sur la première surface, on mène une sécante parallèle à une droite qui forme avec le plan tangent commun aux deux surfaces un angle δ sensiblement différent de zéro, mais inférieur ou tout au plus égal à $\frac{\pi}{2}$, et que cette sécante coupe la seconde surface en (S). Dans le triangle QRS, le côté $\overline{RS}$, sensiblement parallèle au plan tangent, puisqu'il sera compris entre deux points de la seconde surface très-rapprochés du point de contact, formera évidemment avec les côtés $\overline{QR}$, $\overline{QS}$ des angles finis, dont le premier différera très-peu d'un angle droit, tandis que le second sera égal ou supérieur à δ. Donc, si l'on désigne par I une quantité infiniment petite, et par Δ un angle compris entre les limites δ et $\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\overline{QS}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+I\right)}{\sin\Delta}\overline{QR}.$$

Or, il résulte de cette dernière formule que la distance infiniment petite $\overline{QS}$ sera, pour toutes les positions du plan normal, de même ordre que la distance $\overline{QR}$. De plus, comme le rapport entre la perpendiculaire abaissée du point (P) sur la droite $\overline{QS}$ ou sur son prolongement, et le rayon vecteur $\overline{PQ}=i$, sera équivalent au sinus de l'angle PQS formé par la droite $\overline{QS}$ avec une droite $\overline{PQ}$ sensiblement parallèle au plan tangent, et par conséquent une quantité finie différente de zéro, cette perpendiculaire sera évidemment une quantité infiniment petite du premier ordre. De ces diverses remarques on déduit immédiatement la proposition suivante.

8.[e] Théorème. *L'ordre de contact de deux surfaces qui se touchent en un point donné* (P) *est inférieur d'une unité à la valeur unique ou à la valeur minimum du nombre qui représente l'ordre de la distance infiniment petite comprise entre les points* (Q), (S) *où elles sont rencontrées par une sécante qui forme avec le plan tangent commun à ces deux surfaces un angle sensible, lorsque l'on considère la distance du point de contact à la sécante dont il s'agit comme un infiniment petit du premier ordre.*

Supposons que l'on ait mené par le point (P) un plan quelconque qui forme un angle sensible avec le plan tangent. Ce plan coupera les deux surfaces suivant deux nouvelles courbes. De plus, on pourra concevoir que la sécante ci-dessus mentionnée coïncide avec une droite comprise dans ce même plan; et alors, en comparant le théorème précédent au 3.[e] théorème, on établira sans peine une proposition que nous allons énoncer.

9.° Théorème. *Lorsque deux surfaces ont entre elles en un point donné un contact de l'ordre* a, *tout plan normal ou oblique, qui forme un angle sensible avec le plan tangent commun à ces deux surfaces, les coupe suivant deux courbes qui ont entre elles un contact de l'ordre* a *ou d'un ordre supérieur.*

Il importe d'observer ici, non-seulement que les sections faites dans les deux surfaces, par un plan normal ou oblique qui renferme le point commun, peuvent avoir entre elles un contact d'un ordre beaucoup plus élevé que le nombre a, mais qu'elles peuvent même, dans certains cas, se confondre entièrement l'une avec l'autre. Alors le nombre, qui représente l'ordre de contact des deux sections, prend une valeur infinie. Ajoutons que ces deux sections se réduisent quelquefois à une seule droite. On peut offrir pour exemple la génératrice commune à deux surfaces coniques ou cylindriques qui se touchent en un point donné.

Si les deux surfaces sont représentées par deux équations entre les coordonnées rectilignes x, y, z, et si le plan tangent mené par le point commun n'est pas sensiblement parallèle à l'axe des z, alors, en supposant la sécante $\overline{QS}$ parallèle à ce même axe, on déduira immédiatement du théorème 8 la proposition suivante.

10.° Théorème. *Pour obtenir l'ordre de contact de deux surfaces qui se touchent en un point où le plan tangent n'est pas parallèle à l'axe des* z, *il suffit de mener une ordonnée très-voisine du point de contact, et de chercher la valeur unique ou la valeur minimum du nombre constant ou variable qui représente l'ordre de la portion infiniment petite d'ordonnée comprise entre les deux surfaces, dans le cas où l'on considère la distance du point de contact à l'ordonnée comme infiniment petite du premier ordre. Cette valeur unique, ou cette valeur minimum, diminuée d'une unité, indique l'ordre du contact.*

Corollaire 1.er Soient

$$(48)\qquad z = f(x, y), \qquad\qquad (49)\qquad z = F(x, y)$$

les équations des deux surfaces. Elles auront un point commun correspondant à un système de valeurs données des variables x, y, et en ce point un plan tangent commun, non parallèle à l'axe des z, si, pour les valeurs proposées de x, y, les formules (48) et (49) fournissent des valeurs égales et finies, non-seulement de l'ordonnée z, mais encore de ses dérivées partielles $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$, en sorte que les équations

$$(50)\qquad f(x, y) = F(x, y),$$

et

$$(51) \qquad \frac{df(x,y)}{dx} = \frac{dF(x,y)}{dx}, \quad \frac{df(x,y)}{dy} = \frac{dF(x,y)}{dy},$$

soient vérifiées, et que les deux membres de chacune d'elles conservent des valeurs finies. Dans cette hypothèse, la différence

$$(52) \qquad F(x,y) - f(x,y),$$

qui s'évanouira pour les valeurs de x et de y relatives au point commun, deviendra infiniment petite, quand les variables x, y recevront des accroissements infiniment petits $\Delta x, \Delta y$; et, si l'on considère la distance

$$(53) \qquad \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

comme étant un infiniment petit du premier ordre, l'ordre de la quantité infiniment petite, qui représentera la nouvelle valeur de

$$F(x,y) - f(x,y),$$

surpassera d'une unité l'ordre de contact des deux surfaces. Il importe d'ailleurs d'observer que l'expression (53) sera une quantité infiniment petite du premier ordre, si chacun des accroissements $\Delta x, \Delta y$ est un infiniment petit de cet ordre, ou si l'un d'eux est du premier ordre, l'autre étant nul ou d'un ordre supérieur.

Corollaire 2.e Si les deux surfaces se touchent en un point de l'axe des z, mais de manière que cet axe ne soit pas renfermé dans le plan tangent mené par le point de contact, il suffira, d'après ce qu'on vient de dire, pour déterminer l'ordre du contact, de chercher le nombre qui indiquera l'ordre de la différence $F(x,y) - f(x,y)$, en considérant les deux variables x, y comme des infiniment petits du premier ordre, et de diminuer ce nombre d'une unité. En opérant ainsi, on reconnaîtra que les quatre surfaces représentées par les quatre équations

$$z = x^2 + y^2, \quad z = x^3 + y^3, \quad z = x^2 + y^3, \quad z = x^3 + y^2,$$

ont toutes entre elles, à l'origine des coordonnées, un contact du premier ordre, tandis qu'au même point les deux surfaces

$$z = x^n + y^n, \quad z = x^{n+1} + y^{n+1},$$

ont un contact de l'ordre n, et les deux surfaces

$$z = x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}, \qquad z = x^{\frac{5}{4}} + y^{\frac{5}{4}}$$

un contact de l'ordre $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$.

Corollaire 3.e Supposons que les surfaces (47) et (48) aient un point commun correspondant aux coordonnées x, y, et en ce point un plan tangent commun, non parallèle à l'axe des z, avec un contact de l'ordre a. Soit d'ailleurs n le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à a. La différence

$$(54) \qquad F(x, y) - f(x, y)$$

s'évanouira; et, si l'on désigne par $\Delta x, \Delta y$ des accroissements infiniment petits du premier ordre attribués aux coordonnées x, y, l'expression

$$(55) \qquad F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$$

sera [en vertu du corollaire 1.er] un infiniment petit de l'ordre $a + 1$. D'ailleurs, pour que les accroissements $\Delta x, \Delta y$ soient infiniment petits du premier ordre, il suffira de prendre

$$(56) \qquad \Delta x = \alpha dx, \qquad \Delta x = \alpha dy,$$

en désignant par α une quantité infiniment petite du premier ordre, et en donnant aux différentielles dx, dy, des valeurs finies. Alors l'expression (54) se présentera sous la forme

$$(57) \qquad F(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy) - f(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy).$$

Donc, si l'on considère la variable α comme infiniment petite du premier ordre, l'expression (57) sera, dans l'hypothèse admise, un infiniment petit de l'ordre $a + 1$, quelles que soient d'ailleurs les valeurs finies attribuées aux différentielles dx et dy.

Concevons maintenant que l'on pose, pour abréger,

$$(58) \qquad F(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy) - f(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy) = \psi(\alpha).$$

En vertu de ce qui a été dit [page 146] $\psi^{(n+1)}(\alpha)$ sera la première des fonctions

$$\psi(\alpha), \qquad \psi'(\alpha), \qquad \psi''(\alpha), \text{ etc.....}$$

qui cessera de s'évanouir avec α; en d'autres termes $\psi^{(n+1)}(0)$ sera la première des quantités

$$\psi(0),\quad \psi'(0),\quad \psi''(0),\ \text{etc.}\ldots$$

qui obtiendra une valeur différente de zéro. On aura donc

$$(59)\qquad \psi(0)=0,\quad \psi'(0)=0,\quad \psi''(0)=0,\ldots\quad \psi^{(n)}(0)=0.$$

D'ailleurs, en ayant égard aux principes établis dans la 14.e leçon de calcul infinitésimal, on trouvera

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\psi(0)= F(x,y)-f(x,y),\\
&\psi'(0)=dF(x,y)-df(x,y),\\
&\psi''(0)=d^2f(x,y)-d^2f(x,y),\\
&\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\\
&\psi^{(n)}(0)=d^nF(x,y)-d^nf(x,y).
\end{aligned}\right.$$

Donc, on aura, pour le point commun aux deux surfaces,

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned}
&F(x,y)=f(x,y),\\
&dF(x,y)=df(x,y),\\
&d^2F(x,y)=d^2f(x,y),\\
&\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\\
&d^nF(x,y)=d^nf(x,y);
\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(62)\qquad \left\{\begin{aligned}
&F(x,y)=f(x,y),\\
&\frac{dF(x,y)}{dx}dx+\frac{dF(x,y)}{dy}dy=\frac{f(x,y)}{dx}dx+\frac{df(x,y)}{dy}dy,\\
&\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2F(x,y)}{dxdy}dxdy+\frac{d^2F(x,y)}{dy^2}dy^2\\
&=\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2f(x,y)}{dxdy}dxdy+\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}dy^2,\\
&\text{etc.}\ldots\ldots\\
&\frac{d^nF(x,y)}{dx^n}dx^n+\frac{n}{1}\frac{d^nF(x,y)}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy+\ldots+\frac{d^nF(x,y)}{dy^n}dy^n\\
&=\frac{d^nf(x,y)}{dx^n}dx^n+\frac{n}{1}\frac{d^nf(x,y)}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy+\ldots+\frac{d^nf(x,y)}{dy^n}dy^n.
\end{aligned}\right.$$

Ces dernières formules, devant subsister, quelles que soient les valeurs finies attribuées aux différentielles dx, dy, entraîneront évidemment les équations

$$
(63)\quad \left\{
\begin{array}{l}
F(x,y) = f(x,y), \\[4pt]
\dfrac{dF(x,y)}{dx} = \dfrac{df(x,y)}{dx}, \quad \dfrac{dF(x,y)}{dy} = \dfrac{df(x,y)}{dy}, \\[8pt]
\dfrac{d^2F(x,y)}{dx^2} = \dfrac{d^2f(x,y)}{dx^2}, \quad \dfrac{d^2F(x,y)}{dxdy} = \dfrac{d^2f(x,y)}{dxdy}, \quad \dfrac{d^2F(x,y)}{dy^2} = \dfrac{d^2f(x,y)}{dy^2}, \\[8pt]
\text{etc.....} \\[4pt]
\dfrac{d^nF(x,y)}{dx^n} = \dfrac{d^nf(x,y)}{dx^n}, \quad \dfrac{d^nF(x,y)}{dx^{n-1}dy} = \dfrac{d^nf(x,y)}{dx^{n-1}dy}, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\[8pt]
\ldots\ldots\ldots\ldots \ \dfrac{d^nf(x,y)}{dxdy^{n-1}} = \dfrac{d^nf(x,y)}{dxdy^{n-1}}, \quad \dfrac{d^nF(x,y)}{dy^n} = \dfrac{d^nf(x,y)}{dy^n}.
\end{array}
\right.
$$

Par conséquent, lorsque deux surfaces se touchent en un point où le plan tangent n'est pas parallèle à l'axe des z, non-seulement pour le point dont il s'agit, l'ordonnée z, considérée comme fonction des deux variables indépendantes x, y, et ses dérivées partielles du premier ordre, savoir,

$$
(64)\qquad \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy},
$$

ne changent pas de valeurs, dans le passage de la première surface à la seconde; mais il en est encore de même des dérivées partielles

$$
(65)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d^2z}{dx^2}, \quad \dfrac{d^2z}{dxdy}, \quad \dfrac{d^2z}{dy^2}, \\[8pt]
\dfrac{d^3z}{dx^3}, \quad \dfrac{d^3z}{dx^2dy}, \quad \dfrac{d^3z}{dxdy^2}, \quad \dfrac{d^3z}{dy^3}, \\[8pt]
\text{etc..........}
\end{array}
\right.
$$

jusqu'à celles dont l'ordre coïncide avec le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à l'ordre du contact : en d'autres termes, si l'on désigne par n ce nombre entier, l'ordonnée z et ses différentielles totales des divers ordres jusqu'à celle de l'ordre n, c'est-à-dire les quantités

$$
(66)\qquad z, \quad dz, \quad d^2z, \ldots\ldots \ d^{n-1}z, \quad d^nz,
$$

conserveront les mêmes valeurs dans le passage de la première surface à la seconde, quelles que soient les valeurs assignées aux différentielles dx, dy des variables indépendantes.

Corollaire 4.° Si, les deux surfaces ayant un contact de l'ordre a, le plan tangent commun devenait parallèle à l'axe des z, alors, en attribuant aux valeurs des coordonnées x, y, qui se rapportent au point de contact, des accroissements infiniment petits du premier ordre, on ne trouverait pas généralement pour les valeurs correspondantes de la différence

$$F(x, y) - f(x, y)$$

un infiniment petit de l'ordre $a + 1$. Néanmoins, on pourrait encore déterminer l'ordre du contact par la méthode dont nous avons fait usage, en substituant l'une des variables x, y à la variable z. Ainsi, par exemple, pour montrer que les deux surfaces

$$z = x^{\frac{1}{3}}(1 - y^2)^{\frac{1}{3}}, \qquad z = x^{\frac{1}{4}}(1 - y^3)^{\frac{1}{4}},$$

qui touchent à l'origine le plan des y, z, ont en ce point un contact du second ordre, il suffira d'observer que leurs équations résolues par rapport à x prennent les formes

$$x = \frac{z^3}{1 - y^2}, \qquad x = \frac{z^4}{1 - y^3},$$

et que la différence

$$\frac{z^4}{1 - y^3} - \frac{z^3}{1 - y^2}$$

est un infiniment petit du troisième ordre, quand l'on considère y et z comme des infiniment petits du premier ordre. Quant à la différence $F(x, y) - f(x, y)$, elle se réduit dans cet exemple à

$$x^{\frac{1}{4}}(1 - y^3)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{3}}(1 - y^2)^{\frac{1}{3}},$$

et lorsque l'on considère x et y comme des infiniment petits du premier ordre, elle est une quantité infiniment petite, non plus du troisième ordre, mais de l'ordre $\frac{1}{4}$ seulement.

Corollaire 5.° Lorsque le plan tangent commun aux deux surfaces n'est pas parallèle à l'axe des z, et que l'ordre du contact est un nombre entier, il suffit, pour déterminer cet ordre, de chercher quelle est la dernière des équations

(67) $$F(x, y) = f(x, y),\ dF(x, y) = df(x, y),\ d^2F(x, y) = d^2f(x, y),\ \text{etc.},$$

qui se trouve vérifiée pour le point de contact, indépendamment des valeurs attribuées aux différentielles dx, dy des variables indépendantes. L'ordre des différentielles totales comprises dans cette dernière équation sera précisément l'ordre demandé.

APPLICATION DU CALCUL DES RÉSIDUS

A L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS.

Concevons d'abord qu'il s'agisse d'intégrer l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ désignant des coëfficients constants; et faisons, pour abréger

$$(2) \qquad F(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n.$$

Il est clair que, pour vérifier l'équation (1), il suffira de prendre

$$(3) \qquad y = \mathcal{E} \frac{\varphi(r) . e^{rx}}{((F(r)))},$$

$\varphi(r)$ désignant une fonction arbitraire de r qui ne devienne pas infinie pour des valeurs de r propres à vérifier la formule

$$(4) \qquad F(r) = 0.$$

Effectivement, si l'on substitue la valeur précédente de y dans le premier membre de l'équation (1), ce premier membre se trouvera réduit à

$$(5) \qquad \mathcal{E} \frac{F(r) . \varphi(r) . e^{rx}}{((F(r)))} = 0.$$

D'ailleurs, les valeurs de $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$, etc...., qui correspondent aux diverses racines égales ou inégales de l'équation (4), pouvant être choisies arbitrairement, il est aisé de reconnaître que la valeur de y, fournie par l'équation (3), renfermera un nombre n de constantes arbitraires. Donc, l'équation (3) sera l'intégrale générale de l'équation (1).

Considérons maintenant l'équation différentielle

(6) $$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x).$$

On posera

(7) $$y = \mathcal{E} \frac{\psi(r,x) \cdot e^{rx}}{((F(r)))}.$$

Pour que les dérivées de cette dernière valeur de y, depuis la dérivée du premier ordre jusqu'à celle de l'ordre $n-1$, conservent la forme qu'elles prendraient si l'on remplaçait $\psi(r,x)$ par $\varphi(r)$, il suffira d'admettre que l'on a, pour toutes les valeurs entières de m inférieures à $n-1$,

(8) $$\mathcal{E}\, e^{rx} \frac{d\psi(r,x)}{dx} \frac{r^m}{((F(r)))} = 0.$$

Ajoutons que, si cette condition est remplie, on tirera de l'équation (6), en y substituant la valeur de y donnée par la formule (7),

(9) $$\mathcal{E}\, e^{rx} \frac{d\psi(r,x)}{dx} \frac{r^{n-1}}{((F(r)))} = f(x).$$

Toute la question se réduit donc à déterminer la fonction $\psi(r,x)$ de manière qu'elle vérifie les équations (8) et (9). Or, comme on aura généralement [en vertu de la formule (63) de la page 23], et en prenant $m < n-1$,

(10) $$\mathcal{E} \frac{r^m}{((F(r)))} = 0,$$

(11) $$\mathcal{E} \frac{r^{n-1}}{((F(r)))} = 1,$$

il est clair que les conditions (8) et (9) seront remplies, si l'on suppose

(12) $$e^{rx} \frac{d\psi(r,x)}{dx} = f(x),$$

(13) $$\psi(r,x) = \int_{x_0}^{x} e^{-rz} f(z)\, dz + \varphi(r),$$

x_0 désignant une valeur particulière de x, et $\varphi(r)$ une fonction arbitraire de r. Par suite, l'équation (7) donnera

$$(14)\qquad y = \mathcal{E}\,\frac{\psi(r).e^{rx}}{((F(r)))} + \mathcal{E}\,\frac{\int_{x_0}^{x} e^{r(x-z)} f(z)\,dz}{((F(r)))}.$$

Cette dernière formule est précisément l'intégrale générale de l'équation (6).

Exemple. Si l'équation (6) se réduit à

$$(15)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = f(x)\,,$$

on trouvera $F(r) = (r-1)^2$, et la formule (14) donnera

$$(16)\qquad y = \mathcal{E}\,\frac{\varphi(r).e^{rx}}{(((r-1)^2))} + \mathcal{E}\,\frac{\int_{x_0}^{x} e^{r(x-z)} f(z)\,dz}{(((r-1)^2))}$$

$$= e^x[\varphi'(1) + x\varphi(1)] + \int_{x_0}^{x} (x-z)\,e^{x-z} f(z)\,dz.$$

On aura donc, en désignant par $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ les constantes arbitraires $\varphi(1)$, $\varphi'(1)$,

$$(17)\qquad y = (\mathcal{C}' + \mathcal{C}x)\,e^x + \int_{x_0}^{x} (x-z)\,e^{x-z} f(z)\,dz.$$

On voit par cet exemple avec quelle facilité le calcul des résidus s'applique à l'intégration des équations (1) et (6), lors même que l'équation (4) a des racines égales.

Nous montrerons, dans un autre article, les avantages que présentent les formules (3) et (14), relativement à la détermination des constantes arbitraires.



SUR LES LIMITES

PLACÉES A DROITE ET A GAUCHE DU SIGNE $\mathcal{E}$

DANS LE CALCUL DES RÉSIDUS.

Soient x, y deux variables réelles. Soient de plus

(1) $$z = x + y\sqrt{-1}$$

une variable imaginaire, et $f(z)$ une fonction quelconque de z. En vertu des conventions adoptées [page 15], la notation

(2) $$\underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(z)))$$

représentera le résidu de la fonction $f(z)$ pris entre les limites $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$, c'est-à-dire la somme des résidus de $f(z)$ relatifs aux racines de l'équation

(3) $$\frac{1}{f(z)} = 0,$$

dans lesquelles la partie réelle demeure comprise entre les limites x_0, X, et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y.

Concevons maintenant que, $\varphi(x,y)$ et $\chi(x,y)$ désignant deux fonctions réelles des variables x, y, on veuille indiquer la somme des résidus de $f(z)$ correspondants à celles des racines de l'équation (3) que l'on peut déduire de la formule

(4) $$z = \varphi(x,y) + \sqrt{-1}\,\chi(x,y),$$

en attribuant à la variable x des valeurs comprises entre les limites x_0, X, et à la variable y des valeurs comprises entre les limites y_0, Y. Alors nous ferons usage de la notation

(5) $$\underset{x=x_0}{\overset{x=X}{}}\mathcal{E}_{y=y_0}^{y=Y}((f(z))),$$ ou (6) $$\underset{y=y_0}{\overset{y=Y}{}}\mathcal{E}_{x=x_0}^{x=X}((f(z))).$$

à la suite de laquelle nous placerons entre deux crochets l'équation (4), que nous nommerons l'*équation caractéristique*, parce qu'elle caractérise la relation établie entre la variable imaginaire z et les variables réelles x, y qui ne doivent pas dépasser les limites exprimées dans la notation (5) ou (6). Ainsi, par exemple, la notation

$$(7)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{x=x_0}^{x=X}\mathop{\vphantom{\mathcal{E}}}_{y=y_0}^{y=Y}((f(z))),\qquad [z=e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)]$$

indiquera la somme des résidus de $f(z)$ relatifs à celles des racines de l'équation (3), que l'on déduit de la formule

$$(8)\qquad z=e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$$

en attribuant à x des valeurs intermédiaires entre les quantités x_0, X, et à y des valeurs intermédiaires entre les quantités y_0, Y. Ajoutons que les variables réelles et la variable imaginaire pourront être représentées indifféremment soit par les lettres x, y, z, soit par d'autres lettres arbitrairement choisies. Par conséquent, on pourra employer la notation

$$(9)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{r=r_0}^{r=R}\mathop{\vphantom{\mathcal{E}}}_{p=p_0}^{p=P}((f(z))),\qquad [z=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)]$$

pour exprimer la somme des résidus de $f(z)$ relatifs à celles des racines de l'équation (3) que l'on déduit de la formule

$$(10)\qquad z=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p),$$

en attribuant à la variable r supposée réelle des valeurs comprises entre les limites r_0, R, et à la variable p supposée réelle des valeurs comprises entre les limites p_0, P.

Il est bon d'observer que, dans les notations (7), (9), etc...., on peut échanger entre elles, comme on l'a fait en passant de la notation (5) à la notation (6), les lettres placées à droite et à gauche du signe $\mathcal{E}$, et destinées à indiquer les variables réelles ainsi que leurs limites.

Lorsque l'équation caractéristique se réduira simplement à la formule (1), nous remplacerons, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, la notation (5) ou (6) par la notation (2), dans laquelle les limites placées à gauche du signe $\mathcal{E}$ indiqueront toujours les valeurs extrêmes de la partie réelle de la variable z.

Lorsque l'équation caractéristique se réduit à la formule (10), et que la variable r

demeure positive entre les limites r_0, R, cette variable est précisément le module de l'expression imaginaire désignée par la lettre z. Dans ce cas particulier, auquel se rapportent des formules dignes de remarque, et qui mérite une attention spéciale, nous remplacerons, pour abréger, la notation (9) par la suivante

$$(11) \qquad {}_{(r_0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(p_0)}^{(P)}((f(z))),$$

dans laquelle les limites placées entre parenthèses à la gauche du signe $\mathcal{E}$ indiqueront toujours les valeurs extrêmes du module de la variable imaginaire z. Comme, pour obtenir toutes les valeurs possibles de cette même variable, il suffit de faire varier, dans la formule (10), le module r entre les limites $r=0$, $r=\infty$, et l'angle p entre deux limites de la forme $p=p_0$, $p=P=p_0+2\pi$, il est clair que le résidu intégral de $f(z)$ pourra être désigné par la notation

$$(12) \qquad {}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{(p_0)}^{(p_0+2\pi)}((f(z))),$$

qui se réduit, lorsqu'on prend $p_0=-\pi$, à la suivante

$$(13) \qquad {}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z))).$$

On aura en conséquence

$$(14) \qquad \mathcal{E}((f(z)))={}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{-\infty}^{\infty}((f(z)))={}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z))).$$

On trouverait de la même manière

$$(15) \qquad {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{-\infty}^{0}((f(z)))={}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(0)}((f(z))),$$

$$(16) \qquad {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((f(z)))={}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{(0)}^{(\pi)}((f(z))),$$

$$(17) \qquad {}_{-\infty}^{0}\mathcal{E}_{-\infty}^{\infty}((f(z)))={}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{2}\right)}((f(z))),$$

$$(18)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{0\ \ -\infty}^{\infty\ \ \infty}((f(z))) = \mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{(\infty)\ \left(\frac{\pi}{2}\right)}((f(z))).$$

Admettons encore que l'on veuille indiquer la somme des résidus de $f(z)$ correspondants à celles des racines de l'équation (3) que l'on peut déduire de la formule (4), dans le cas où l'on prend pour x et y des coordonnées rectilignes de points situés dans le plan des x, y entre deux courbes et deux droites représentées par les quatre équations

$$(19)\quad y = \mathrm{f}(x), \qquad (20)\quad y = \mathrm{F}(x), \qquad (21)\quad x = x_0, \qquad (22)\quad x = X.$$

Alors à la notation (5) ou (6) nous substituerons l'une ou l'autre des deux suivantes

$$(23)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{x=x_0\ \ y=\mathrm{f}(x)}^{x=X\ \ y=\mathrm{F}(x)}((f(z))), \qquad [z = \varphi(x,y) + \sqrt{-1}\,\chi(x,y)],$$

$$(24)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{y=\mathrm{f}(x)\ \ x=x_0}^{y=\mathrm{F}(x)\ \ x=X}((f(z))), \qquad [z = \varphi(x,y) + \sqrt{-1}\,\chi(x,y)].$$

Ces dernières se présenteront elles-mêmes sous les formes

$$(25)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{x=x_0\ \ y=y_0}^{x=X\ \ y=Y}((f(z))), \qquad [z = \varphi(x,y) + \sqrt{-1}\,\chi(x,y)],$$

ou

$$(26)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{y=y_0\ \ x=x_0}^{y=Y\ \ x=X}((f(z))), \qquad [z = \varphi(x,y) + \sqrt{-1}\,\chi(x,y)],$$

si l'on pose, pour abréger, $\mathrm{f}(x) = y_0$, $\mathrm{F}(x) = Y$. Par conséquent, les notations (5) et (6) peuvent être étendues à des cas dans lesquels y_0 et Y désignent des fonctions de la variable x, tandis que x_0 et X continuent de représenter des quantités constantes. Si l'on supposait, au contraire, que x_0, X désignent deux fonctions $\mathrm{f}(y)$, $\mathrm{F}(y)$ de la variable y, et y_0, Y deux quantités constantes, chacune des notations

$$(27)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{x=\mathrm{f}(y)\ \ y=y_0}^{x=\mathrm{F}(y)\ \ y=Y}((f(z))), \qquad [z = \varphi(x,y) + \sqrt{-1}\,\chi(x,y)],$$

$$(28)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{y=y_0}^{y=Y}\,\mathop{}_{x=f(y)}^{x=F(y)}((f(z))), \qquad [z=\varphi(x,y)+\sqrt{-1}\,\chi(x,y)],$$

exprimeroit la somme des résidus de $f(z)$, correspondants à celles des racines de l'équation (3) que l'on peut déduire de la formule (4), dans le cas où l'on prend pour x et y des coordonnées relatives à des points situés dans le plan des x, y, entre deux courbes et deux droites représentées par les quatre équations

$$(29)\quad x=f(y), \qquad (30)\quad x=F(y), \qquad (31)\quad y=y_0, \qquad (32)\quad y=Y.$$

D'après les conventions que nous venons d'adopter, il est facile de voir ce qu'exprimeraient les notations (23) ou (24), et (25) ou (26), etc....., si l'on considérait les variables réelles x, y ou r, p, etc...., comme représentant, non plus des coordonnées rectilignes, mais des coordonnées d'un autre genre. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par r et p des coordonnées polaires, c'est-à-dire, le rayon vecteur mené d'un point fixe à un point mobile, et l'angle formé par ce rayon vecteur avec un axe fixe, on reconnaîtra sans peine que la notation

$$(33)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{r=f(p)}^{r=F(p)}\,\mathop{}_{p=p_0}^{p=P}((f(z))), \qquad [z=\varphi(p,r)+\sqrt{-1}\,\chi(p,r)]$$

exprime la somme des résidus de $f(z)$ relatifs à celles des racines de l'équation (3) que l'on peut déduire de la formule

$$(34)\qquad z=\varphi(p,r)+\sqrt{-1}\,\chi(p,r),$$

dans le cas où l'on prend pour r et p les coordonnées polaires de points situés dans un plan fixe entre deux courbes et deux droites représentées par les quatre équations

$$(35)\quad r=f(p), \qquad (36)\quad r=F(p), \qquad (37)\quad p=p_0, \qquad (38)\quad p=P.$$

Au contraire, la notation

$$(39)\qquad \mathop{\mathcal{E}}_{r=r_0}^{r=R}\,\mathop{}_{p=f(r)}^{p=F(r)}((f(z))), \qquad [z=\varphi(p,r)+\sqrt{-1}\,\chi(p,r)]$$

exprimerait la somme des résidus de $f(z)$ relatifs à celles des racines de l'équation (3) que l'on peut déduire de la formule (34), en prenant pour r et p les coordonnées polaires de points situés dans un plan fixe entre deux cercles et deux courbes représentés par les quatre équations

$$(40)\quad p=p_0, \qquad (41)\quad p=P, \qquad (42)\quad r=f(p), \qquad (43)\quad r=F(p).$$

Lorsque l'équation (4) se réduira simplement à la formule (1), nous remplacerons, pour abréger, les notations (23) et (27) par les suivantes

(44) $$ {}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{f(x)}^{F(x)}((f(z))), \qquad (45) \quad {}_{f(y)}^{F(y)}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(z))), $$

dans lesquelles nous placerons toujours, à la gauche du signe $\mathcal{E}$, les limites de la partie réelle de la variable z.

De même, lorsque l'équation (34) se réduira simplement à la formule (10), nous remplacerons les notations (33) et (39) par les suivantes

(46) $$ {}_{[f(p)]}^{[F(p)]}\mathcal{E}_{(p_0)}^{(P)}((f(z))), \qquad (47) \quad {}_{(r_0)}^{(R)}\mathcal{E}_{[F(r)]}^{[f(r)]}((f(z))), $$

dans lesquelles nous placerons toujours, à la gauche du signe $\mathcal{E}$, les limites du module de la variable z.

Les principes que nous venons d'exposer sont immédiatement applicables à la transformation des résidus pris entre des limites données, dans le cas où l'on opère un changement de variable indépendante. Ainsi, par exemple, si l'on suppose que les variables imaginaires z et t soient liées entre elles par l'équation

(48) $$ z = \psi(t), $$

et qu'à chaque valeur de z corresponde une valeur de t, on aura, en vertu des mêmes principes, et de ceux que nous avons précédemment établis [page 170 et suiv.],

(49) $$ {}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(z))) = {}_{x=x_0}^{x=X}\mathcal{E}_{y=y_0}^{y=Y}((f[\psi(t)] . \psi'(t))), $$

l'équation caractéristique, relative aux variables x, y, t, étant

(50) $$ x + y\sqrt{-1} = \psi(t). $$

Concevons en particulier que $\psi(t)$ représente une des valeurs de z propres à vérifier la formule

(51) $$ t = e^z, $$

et soit en outre

(52) $$f(z) = e^z f(e^z).$$

On aura

(53) $$\psi'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{t};$$

et la formule (49) donnera

(54) $$\underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((e^z f(e^z))) = \underset{x=x_0}{\overset{x=X}{}}\mathcal{E}_{y=y_0}^{y=Y}((f(t))), \qquad \left[t = e^{x+y\sqrt{-1}}\right],$$

puis, en posant, pour plus de commodité,

(55) $$e^x = r, \qquad e^{x_0} = r_0, \qquad e^X = R, \qquad y = p, \qquad y_0 = p_0, \qquad Y = P,$$

on trouvera

(56) $$\underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((e^z f(e^z))) = \underset{r=r_0}{\overset{r=R}{}}\mathcal{E}_{p=p_0}^{p=P}((f(t))), \quad [t = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)],$$

ou, ce qui revient au même,

(57) $$\underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((e^z f(e^z))) = \underset{(r_0)}{\overset{(R)}{}}\mathcal{E}_{(p_0)}^{(P)}((f(t))).$$

A l'aide de l'équation (57), on déduira sans peine de la formule (11) [page 98] de nouveaux résultats dignes de remarque. En effet, si, dans la formule dont il s'agit, on pose $f(z) = e^z f(e^z)$, on en tirera

(58) $$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left\{e^X f\left(e^{X+y\sqrt{-1}}\right) - e^{x_0} f\left(e^{x_0+y\sqrt{-1}}\right)\right\} e^{y\sqrt{-1}}\,dy \\ &-\int_{x_0}^{X}\left\{e^{Y\sqrt{-1}} f\left(e^{x+Y\sqrt{-1}}\right) - e^{y_0\sqrt{-1}} f\left(e^{x+y_0\sqrt{-1}}\right)\right\} e^x\,dx = 2\pi\sqrt{-1}\,\underset{x_0}{\overset{X}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}\left(\left(e^z f(e^z)\right)\right); \end{aligned}\right.$$

puis, en ayant égard aux équations (55) et (57), on trouvera

(59) $$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{-1}\int_{p_0}^{P}\left\{R f\left(R e^{p\sqrt{-1}}\right) - r_0 f\left(r_0 e^{p\sqrt{-1}}\right)\right\} e^{p\sqrt{-1}}\,dp \\ &-\int_{r_0}^{R}\left\{e^{P\sqrt{-1}} f\left(r e^{P\sqrt{-1}}\right) - e^{p_0\sqrt{-1}} f\left(r e^{p_0\sqrt{-1}}\right)\right\} dr = 2\pi\sqrt{-1}\,\underset{(r_0)}{\overset{(R)}{}}\mathcal{E}_{(p_0)}^{(P)}((f(t))). \end{aligned}\right.$$

La formule (59) suppose évidemment que la fonction

$$(60) \qquad f\left(re^{p\sqrt{-1}}\right) = f[r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)]$$

conserve une valeur unique et déterminée, tant qu'elle ne devient pas infinie, au moins pour toutes les valeurs réelles des variables r, p, comprises entre les limites $r = r_0$, $r = R$, $p = p_0$, $p = P$. Si l'on pose dans la même formule

$$r_0 = 0, \qquad R = 1, \qquad p = 0, \qquad P = \pi,$$

on obtiendra la suivante

$$(61) \quad \sqrt{-1}\int_0^\pi e^{p\sqrt{-1}} f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right) dp + \int_0^1 [f(r) - f(-r)]\,dr = 2\pi\sqrt{-1} \mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ (0)}^{(1)\ (\pi)} ((f(t))),$$

que l'on peut encore écrire comme il suit

$$(62) \qquad \int_0^\pi e^{p\sqrt{-1}} f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right) dp = \sqrt{-1}\int_{+1}^{1} f(r)\,dr + 2\pi \mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ (0)}^{(1)\ (\pi)} ((f(t))).$$

Si l'on posait, au contraire $P = p_0 + 2\pi$, on aurait

$$e^{P\sqrt{-1}} = e^{p_0\sqrt{-1}},$$

et la formule (59) donnerait

$$(63) \int_{p_0}^{p_0+2\pi} \left\{ Rf\left(Re^{p\sqrt{-1}}\right) - r_0 f\left(r_0 e^{p\sqrt{-1}}\right) \right\} e^{p\sqrt{-1}}\,dp = 2\pi \mathop{\mathcal{E}}_{(r_0)\ (p_0)}^{(R)\ (p_0+2\pi)} ((f(t))).$$

Cette dernière, dont les deux membres ont des valeurs indépendantes de l'angle désigné par p_0, se réduira simplement à

$$(64) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ Rf\left(Re^{p\sqrt{-1}}\right) - r_0 f\left(r_0 e^{p\sqrt{-1}}\right) \right\} e^{p\sqrt{-1}}\,dp = 2\pi \mathop{\mathcal{E}}_{(r_0)\ (-\pi)}^{(R)\ (\pi)} ((f(t))),$$

si l'on prend $p_0 = \pi$. Enfin, si l'on prend $r_0 = 0$, $R = 1$; et, si l'on admet que le produit $tf(t)$ s'évanouisse pour $t = 0$, on tirera de l'équation (62)

(65) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{p\sqrt{-1}} f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right) dp = 2\pi \mathop{\mathcal{E}}_{(0)}^{(1)}\,{}_{(-\pi)}^{(\pi)} ((f(t))).$$

Les formules (59), (61) et (65) coïncident avec des équations que j'ai données dans le Bulletin de la société philomatique de 1822, dans le 19.ᵉ cahier du Journal de l'école royale polytechnique, et dans le mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Il est essentiel d'observer qu'en évaluant l'expression

(66) $$\mathop{\mathcal{E}}_{(r_0)}^{(R)}\,{}_{(p_0)}^{(P)} ((f(t)))$$

comprise dans le second membre de l'équation (59), on devra, si r_0 n'est pas nulle, réduire à moitié chacun des résidus relatifs aux valeurs de la variable t, qui, étant propres à vérifier l'équation

(67) $$\frac{1}{f(t)} = 0,$$

auraient pour module l'une des quantités positives r_0, R, ou correspondraient à l'un des arcs p_0, P. C'est une convention que l'on est forcé d'admettre, si l'on veut que les formules

(68) $$\mathop{\mathcal{E}}_{(r_0)}^{(R)}\,{}_{(p_0)}^{(P)} ((f(t))) = \mathop{\mathcal{E}}_{(r_0)}^{(\rho)}\,{}_{(p_0)}^{(P)} ((f(t))) + \mathop{\mathcal{E}}_{(\rho)}^{(R)}\,{}_{(p_0)}^{(P)} ((f(t))),$$

(69) $$\mathop{\mathcal{E}}_{(r_0)}^{(R)}\,{}_{(p_0)}^{(P)} ((f(t))) = \mathop{\mathcal{E}}_{(r_0)}^{(R)}\,{}_{(p_0)}^{(\varpi)} ((f(t))) + \mathop{\mathcal{E}}_{(r_0)}^{(R)}\,{}_{(\varpi)}^{(P)} ((f(t)))$$

s'étendent au cas même où quelques-unes des racines de l'équation (67) correspondraient soit au module ρ, soit à l'arc ϖ. De plus, pour que ces formules subsistent, dans le cas où la valeur numérique de la différence $P - p_0$ devient égale ou supérieure à π, il faut évidemment supposer que la notation (66) représente alors la somme des résidus relatifs aux divers systèmes de valeurs de r et de p, qui rendent l'expression imaginaire

(70) $$t = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p),$$

propre à vérifier l'équation (67); d'où il suit que, dans cette somme, le résidu relatif à chaque racine devra être multiplié par le nombre m, s'il existe entre les

limites p_0, P, m arcs différents correspondants à cette racine. Si un ou deux de ces arcs se réduisaient à l'une des limites p_0, P, il faudrait remplacer le coëfficient m, par $m - \frac{1}{2}$ dans le premier cas, par $m - 1$ dans le second. Ainsi, par exemple, dans la somme représentée par la notation

$$(71) \qquad {}_{(r_0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(t))),$$

un résidu relatif à une racine négative de l'équation (67) prendrait pour coëfficient l'unité, quoique cette racine répondît à-la-fois aux deux arcs $p = -\pi$, $p = +\pi$. Ajoutons que, pour étendre la formule (56) à toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les valeurs des racines de l'équation (67), il est à propos d'exclure toujours de la somme représentée par la notation

$$(72) \qquad {}_{(0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(p_0)}^{(P)}((f(t)))$$

le résidu correspondant à une valeur nulle de $t = e^z$, ou, ce qui revient au même, à une valeur infinie et négative de la variable z. Ces diverses conventions étant admises, on reconnaîtra sans peine que la formule (59) continue de subsister, 1.° lorsque la valeur numérique de la différence $P - p_0$ devient supérieure à 2π; 2.° lorsque la limite r_0 s'évanouit.

La formule (65) fait dépendre l'évaluation de l'intégrale

$$(73) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} e^{p\sqrt{-1}} f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right) dp$$

de la recherche des résidus de la fonction $f(t)$ correspondants à celles des racines de l'équation

$$(67) \qquad \frac{1}{f(t)} = 0,$$

qui présentent une valeur numérique ou un module inférieur à l'unité. Elle fournit, comme la formule (33) de la page 104, les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies, et peut se déduire directement de la même formule, ainsi qu'on va le faire voir.

Si, dans la formule (33) de la page 104, on pose

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} f\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right),$$

$$(75)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)\frac{dz}{1+z^2} = 2\pi\sqrt{-1}\;{}_{-\infty}^{\;\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{1+z^2}f\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)\right)\right).$$

Si l'on substitue maintenant à la variable imaginaire z un autre variable imaginaire t, qui soit liée à z par l'équation

$$(76)\qquad \frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = t, \qquad \text{ou} \qquad (77)\qquad z = \frac{1-t}{1+t}\sqrt{-1},$$

et aux variables réelles p, r par la suivante

$$(78)\qquad t = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p),$$

r étant positif, on trouvera

$$(79)\qquad \frac{1-r\cos p - r\sin p.\sqrt{-1}}{1+r\cos p + r\sin p.\sqrt{-1}}\sqrt{-1} = \frac{2r\sin p}{(1+r\cos p)^2+(r\sin p)^2} + \frac{1-r^2}{(1+r\cos p)^2+(r\sin p)^2}\sqrt{-1}$$

$$(80)\qquad \frac{1}{1+z^2}\,\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2t\sqrt{-1}}.$$

Or, il résulte évidemment de l'équation (79) que les diverses valeurs de z, dans lesquelles le coëfficient de $\sqrt{-1}$ reste positif, correspondent aux diverses valeurs de t, qui présentent un module r inférieur à l'unité. Par conséquent, on tirera des équations (49) et (74)

$$(81)\qquad {}_{-\infty}^{\;\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{1+z^2}f\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\;{}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right),$$

et la formule (75) pourra être réduite à

$$(82)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)\frac{dz}{1+z^2} = \pi\;{}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right).$$

Si l'on fait dans cette dernière

$$(83)\qquad z = \tang\frac{1}{2}p,$$

on aura

$$(84)\qquad \frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = \frac{\cos\frac{p}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{p}{2}}{\cos\frac{p}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{p}{2}} = e^{p\sqrt{-1}}, \qquad \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\,dp,$$

et l'on conclura de la formule (82)

$$(85)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right).dp = 2\pi \;{}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right);$$

puis, en remplaçant la fonction $f(t)$ par le produit $tf(t)$, on retrouvera la formule (65).

L'équation (85) peut encore s'écrire comme il suit

$$(86)\qquad \int_{0}^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp = \pi \;{}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right):$$

Il est essentiel d'observer qu'en évaluant l'expression

$$(87)\qquad {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right),$$

on devra réduire à moitié chacun des résidus relatifs aux valeurs de la variable t, qui auront l'unité pour module ou pour valeur numérique. Ajoutons que les formules (81), (85), (86), doivent être restreintes au cas où le résidu partiel

$$(88)\qquad \mathcal{E}\,\frac{f(t)}{((t))} = 2\sqrt{-1}\;\mathcal{E}\,\frac{1}{(1-z\sqrt{-1})\,((1+z\sqrt{-1}))}\,f\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)$$

s'évanouit. Si ce même résidu acquerrait une valeur différente de zéro, alors, en excluant de la somme représentée par la notation (87) le résidu correspondant à une valeur nulle de t, on obtiendrait, à la place des formules (81), (85), (86), de nouvelles équations, savoir,

$$(89)\qquad {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{1+z^2}\,f\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\mathcal{E}\,\frac{f(t)}{((t))} + {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right)\right\}.$$

$$(90)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)dp = 2\pi\left\{\mathcal{E}\,\frac{f(t)}{((t))} + {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right)\right\},$$

(91) $$\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp=\pi\left\{ \mathcal{E}\,\frac{f(t)}{((t))} + {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right)\right\}.$$

Enfin, si la fonction $f(t)$ prend une valeur finie pour $t=0$, les formules (90) et (91) pourront être réduites à

(92) $$\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)dp=2\pi\left\{ f(0) + {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right)\right\}.$$

(93) $$\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp=\pi\left\{ f(0) + {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right)\right\}.$$

Nous terminerons cet article, en montrant quelques applications des formules (85) et (92).

Faisons d'abord successivement

(94) $$f(t)=\mathrm{f}(s+t),$$ (95) $$f(t)=\frac{\mathrm{f}(s+t)}{t^n},$$

s désignant une constante réelle ou imaginaire, et $\mathrm{f}(t)$ une nouvelle fonction de t qui conserve une valeur finie, pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de t, dont les modules sont inférieurs à l'unité. Les formules (85) et (92) donneront

(96) $$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}\left(s+e^{-p\sqrt{-1}}\right)dp=2\pi\,\mathrm{f}(s),$$

(97) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}\left(s+e^{-p\sqrt{-1}}\right)dp=\frac{2\pi}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^n\mathrm{f}(s)}{ds^n}.$$

Si l'on fait en particulier $\mathrm{f}(s)=e^{sx}$, on tirera de la formule (97)

(98) $$x^n=\frac{1.2.3\ldots n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\,e^{xe^{p\sqrt{-1}}}\,dp;$$

et par suite, en supposant $\Delta x=h$,

$$(99)\qquad \Delta^m x^n = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{he^{p\sqrt{-1}}}-1\right)^m e^{-np\sqrt{-1}+xe^{p\sqrt{-1}}}\,dp.$$

Si, dans la formule (96), on réduit la constante s à zéro, on aura simplement

$$(100)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)dp = 2\pi\,\mathrm{f}(0),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(101)\qquad \int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp = \pi\,\mathrm{f}(0).$$

Concevons maintenant que l'on fasse successivement

$$(102)\qquad f(t) = \frac{\mathrm{f}(t)}{1-st},\qquad\qquad (103)\qquad f(t) = \frac{\mathrm{f}(t)}{1-\frac{s}{t}},$$

s désignant toujours une constante réelle ou imaginaire, et la fonction $\mathrm{f}(t)$ étant assujettie à la condition que nous avons indiquée. On tirera de la formule (92), 1.° en supposant la valeur numérique ou le module de s inférieur à l'unité,

$$(104)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{1-se^{p\sqrt{-1}}}\,dp = 2\pi\,\mathrm{f}(0),$$

$$(105)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{1-se^{-p\sqrt{-1}}}\,dp = 2\pi\,\mathrm{f}(s);$$

2.° en supposant la valeur numérique ou le module de s plus grand que l'unité,

$$(106)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{1-se^{p\sqrt{-1}}}\,dp = 2\pi\left\{\mathrm{f}(0)-\mathrm{f}\left(\frac{1}{s}\right)\right\},$$

$$(107)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{1-se^{-p\sqrt{-1}}}\,dp = 0.$$

Si la valeur numérique ou le module de s devenait égal à l'unité, alors, en réduisant

chacune des intégrales prises entre les limites $-\pi$, $+\pi$ à sa valeur principale, on tirerait des formules (85) et (92)

(108) $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{1-se^{p\sqrt{-1}}}\,dp = 2\pi\left\{f(0)-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{s}\right)\right\},$$

(109) $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{1-se^{-p\sqrt{-1}}}\,dp = \pi f(s).$$

Si l'on combine, par voie d'addition et de soustraction, les formules précédentes, on en déduira immédiatement, quel que soit s, les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\pi} \frac{1-s\cos p}{1-s\cos p+s^2}\,\frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{1-se^{p\sqrt{-1}}}+\frac{1}{1-se^{-p\sqrt{-1}}}\right)f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)dp,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{s\sin p}{1-2s\cos p+s^2}\,\frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\,dp =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{1-se^{-p\sqrt{-1}}}-\frac{1}{1-se^{p\sqrt{-1}}}\right)f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)dp;$$

et par suite, en ayant égard à l'équation (101), les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,\frac{dp}{1-s\cos p+s^2},$$

$$\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,\frac{\cos p\,dp}{1-2s\cos p+s^2},\quad \int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{\sin p\,dp}{1-2s\cos p+s^2}.$$

On trouvera de cette manière, 1.° en supposant la valeur numérique ou le module de s inférieur à l'unité

(110) $$\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,\frac{dp}{1-2s\cos p+s^2} = \pi\,\frac{f(s)}{1-s^2},$$

$$(111)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\frac{\cos p\,dp}{1-2s\cos p+s^2}=\frac{\pi}{2s}\left[\frac{1+s^2}{1-s^2}f(s)-f(0)\right],\\ &\int_0^\pi \frac{f(e^{p\sqrt{-1}})-f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,\frac{\sin p\,dp}{1-2s\cos p+s^2}=\frac{\pi}{2s}\left[f(s)-f(0)\right]; \end{aligned}\right.$$

2.° en supposant la valeur numérique ou le module de s supérieur à l'unité,

$$(112)\quad \int_0^\pi \frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\frac{dp}{1-2s\cos p+s^2}=\pi\,\frac{f\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2-1},$$

$$(113)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\frac{\cos p\,dp}{1-2s\cos p+s^2}=\frac{\pi}{2s}\left[\frac{s^2+1}{s^2-1}f\left(\frac{1}{s}\right)-f(0)\right],\\ &\int_0^\pi \frac{f(e^{p\sqrt{-1}})-f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,\frac{\sin p\,dp}{1-2s\cos p+s^2}=\frac{\pi}{2s}\left[f\left(\frac{1}{s}\right)-f(0)\right]; \end{aligned}\right.$$

3.° en supposant la valeur numérique ou le module de s égal à l'unité, et chaque intégrale réduite à sa valeur principale

$$(114)\quad \int_0^\pi \frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\frac{dp}{1-2s\cos p+s^2}=\frac{\pi}{2(1-s^2)}\left[f(s)-f\left(\frac{1}{s}\right)\right],$$

$$(115)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{f(e^{p\sqrt{-1}})+f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,\frac{\cos p\,dp}{1-2s\cos p+s^2}=\frac{\pi}{4s}\,\frac{1+s^2}{1-s^2}\left[f(s)-f\left(\frac{1}{s}\right)\right]-\frac{\pi}{2s}f(0),\\ &\int_0^\pi \frac{f(e^{p\sqrt{-1}})-f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,\frac{\sin p\,dp}{1-2s\cos p+s^2}=\frac{\pi}{4s}\left[f(s)+f\left(\frac{1}{s}\right)-2f(0)\right]. \end{aligned}\right.$$

Il est bon d'observer que, pour tirer les formules (112) et (113) des formules (110) et (111), il suffit de remplacer s par $\frac{1}{s}$. De plus, si l'on pose $s=\pm 1$ dans la seconde des formules (115), on trouvera

$$(116)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \cot\frac{p}{2}\,\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})-f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,dp=\pi[f(1)-f(0)],\\ &\int_0^\pi \tang\frac{p}{2}\,\frac{f(e^{p\sqrt{-1}})-f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,dp=\pi[f(0)-f(-1)]. \end{aligned}\right.$$

Ajoutons que l'on pourrait déduire directement les équations (110) (111) et suivantes de la formule (86) ou (91), en posant successivement

$$f(t)=\frac{\mathrm{f}(t)}{(1-st)\left(1-\frac{s}{t}\right)},\quad f(t)=\frac{\left(t\pm\frac{1}{t}\right)\mathrm{f}(t)}{(1-st)\left(1-\frac{s}{t}\right)},\quad f(t)=\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)\mathrm{f}(t)}{2\pm\left(t-\frac{1}{t}\right)},$$

si l'on posait au contraire

$$f(t)=\left(t\pm\frac{1}{t}\right)^n\mathrm{f}(t),\quad f(t)=\frac{\left(t\pm\frac{1}{t}\right)^n}{(1-st)\left(1-\frac{s}{t}\right)}\mathrm{f}(t),$$

n désignant un nombre entier quelconque, la formule (91) déterminerait immédiatement quatre des six intégrales

(117) $$\int_0^\pi \cos^n p.\frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp,$$

(118) $$\int_0^\pi \frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,\frac{\cos^n p.dp}{1-2s\cos p+s^2};$$

(119) $$\int_0^\pi \sin^n p.\frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp,$$

(120) $$\int_0^\pi \frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,\frac{\sin^n p.dp}{1-2s\cos p+s^2};$$

(121) $$\int_0^\pi \sin^n p.\frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\,dp,$$

(122) $$\int_0^\pi \frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{\sin^n p.dp}{1-2s\cos p+s^2},$$

savoir, les quatre premières, pour des valeurs paires du nombre n, et les deux premières avec les deux dernières pour des valeurs impaires du même nombre.

Si, après avoir remplacé, dans les formules (104), (105), etc., s par $\pm s\sqrt{-1}$,

on combine ces formules entre elles, de manière à faire disparaître les imaginaires, on en déduira sans peine les valeurs des intégrales

$$(123)\quad \int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\left(\frac{1}{1-2s\sin p+s^2}+\frac{1}{1+2s\sin p+s^2}\right)dp,$$

$$(124)\quad \int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{1-2s\sin p+s^2}-\frac{1}{1+2s\sin p+s^2}\right)dp,$$

$$(125)\quad \int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\left(\frac{1}{1-2s\sin p+s^2}+\frac{1}{1+2s\sin p+s^2}\right)\cos p\,dp,$$

$$(126)\quad \int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{1-2s\sin p+s^2}-\frac{1}{1+2s\sin p+s^2}\right)\cos p\,dp,$$

et de plusieurs autres.

On peut déterminer immédiatement, à l'aide des principes que nous venons d'exposer, les valeurs des six intégrales définies

$$(127)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\cos p.\,dp=\frac{\pi}{2}f'(0),\\ &\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\sin p.\,dp=\frac{\pi}{2}f'(0),\end{aligned}\right.$$

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\sec p.\,dp=\pi\,\frac{f(\sqrt{-1})-f(-\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},\\ &\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\operatorname{cosec} p\,dp=\pi\,\frac{f(1)-f(-1)}{2},\end{aligned}\right.$$

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\operatorname{tang} p\,dp=\pi\left\{\frac{f(\sqrt{-1})+f(-\sqrt{-1})}{2}-f(0)\right\},\\ &\int_0^{\pi} \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)-f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\cot p.\,dp=\pi\left\{\frac{f(1)+f(-1)}{2}-f(0)\right\}.\end{aligned}\right.$$

En effet, on déduira les formules (127) des équations (111), en posant $s=0$, et la seconde des formules (128) ou (129) des équations (116) combinées entre elles par voie d'addition ou de soustraction. Ajoutons que, pour obtenir la première des intégrales (128) et la première des intégrales (129), il suffira de réduire la constante s à l'unité dans les intégrales (125) et (126). Au reste, on parviendra directement aux équations (127), (128) et (129), si, dans la formule (86) ou (91), on remplace la fonction $f(t)$ par l'une des suivantes

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)f(t),\quad \left(t-\frac{1}{t}\right)f(t),\quad \frac{f(t)}{t+\frac{1}{t}},\quad \frac{f(t)}{t-\frac{1}{t}},\quad \frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}f(t),\quad \frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}f(t).$$

Les diverses équations que nous venons d'établir, à l'aide des formules (85) et (92), peuvent se tirer, pour la plupart, du théorême de M. Parseval. Plusieurs de ces équations étaient déjà connues, et s'accordent avec celles qui ont été données par M. Frullani, dans un Mémoire publié en 1819, par M. Guillaume Libri, dans le tome XXVIII.e des Mémoires de l'Académie de Turin, enfin par M. Poisson et moi, dans le Bulletin de la Société philomathique de 1822, et dans le XIX.e cahier du Journal de l'École polytechnique. Si, pour fixer les idées, on réduit la fonction $f(t)$ à l'une des suivantes

$$\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^a,\qquad l\left(\frac{1-t}{2}\right),\qquad l\left(\frac{1+t}{2}\right),\qquad l\left(\frac{1-t}{1+t}\right);$$

et, si l'on remplace, 1.° la lettre s par la lettre r; 2.° la variable p par $2p$, on déduira des formules (105), (106), (107), etc....., les résultats contenus dans la page 39 du Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.

Lorsque, dans la formule (93), on remplace p par $2p$, elle donne

$$(130)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(e^{2p\sqrt{-1}}\right)-f\left(e^{-2p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp=\frac{\pi}{2}\left\{f(0)+\mathop{\mathcal{E}}_{(0)}^{(1)}\mathop{\vphantom{\mathcal{E}}}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{((f(t)))}{t}\right\}.$$

Cela posé, concevons que, $\mathrm{f}(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ désignant deux fonctions réelles et entières de la variable x, et a une constante dont la valeur numérique ou le module soit inférieur à l'unité, on substitue à la fonction $f(t)$, ou le rapport

$$(131)\qquad \frac{\mathrm{f}\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right\}}{\mathrm{F}\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right\}},$$

ou l'un des produits auxquels on parvient en multipliant ce même rapport par l'une des expressions

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^a,\quad \left(\frac{1-t}{2}\right)^a,\quad \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^a,\qquad 1\left(\frac{1+t}{2}\right),\quad 1\left(\frac{1-t}{2}\right),\quad 1\left(\frac{1-t}{1+t}\right),$$

$$\frac{1}{t-\frac{1}{t}}\left(\frac{1+t}{2}\right)^a,\quad \frac{1}{\left(t-\frac{1}{t}\right)}1\left(\frac{1+t}{2}\right),\quad \frac{1}{1\left(\frac{1+t}{2}\right)},\quad \frac{1-t}{(1+t)1\left(\frac{1+t}{2}\right)},\ \text{etc.}\ldots$$

On tirera successivement des formules (93) et (130)

$$(132)\qquad \int_0^{\pi} \frac{f(\cos p)}{F(\cos p)}\,dp = \pi\left\{\frac{f(0)}{F(0)} + {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{f\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{t\left(\left(F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)}\right\}$$

$$(133)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)}\cos^a p\cos ap\,dp = \frac{\pi}{2^{a+1}}\left\{\frac{f(0)}{F(0)} + {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{(1+t)^a f\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{t\left(\left(F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)}\right\},$$

$$(134)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)}\sin^a p\cos a\left(\frac{\pi}{2}-p\right)dp =$$

$$\frac{\pi}{2^{a+1}}\left\{\frac{f(0)}{F(0)} + {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{(1-t)^a f\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{t\left(\left(F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)}\right\},$$

$$(135)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)}\,\text{tang}^a p\,dp =$$

$$\frac{\pi}{2\cos\frac{a\pi}{2}}\left\{\frac{f(0)}{F(0)} + {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{(1-t)^a f\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{t\left(\left(\left(1+t\right)^a F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)}\right\},$$

$$(136)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)}\,1\cos p\,dp = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{f(0)}{F(0)}1\left(\frac{1}{2}\right) + {}_{(0)}^{(1)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{1\left(\frac{1+t}{2}\right)F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{t\left(\left(F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)}\right\},$$

$$(137)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)} \, l \sin p \, dp = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{f(0)}{F(0)} \, l\left(\tfrac{1}{2}\right) + \mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ (-\pi)}^{(1)\ (\pi)} \frac{l\left(\frac{1-t}{2}\right) f\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{t\left(\left(F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)} \right\},$$

$$(138)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)} \, l \operatorname{tang} p \, dp = \frac{\pi}{2} \mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ (-\pi)}^{(1)\ (\pi)} \frac{l\left(\frac{1-t}{1+t}\right) f\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{t\left(\left(F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)},$$

$$(139)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)} \cos^{a-1} p \, \frac{\sin ap}{\sin p} \, dp = \frac{\pi}{2^{a-1}} \mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ (-\pi)}^{(1)\ (\pi)} \frac{(1+t)^a f\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{\left(\left(\left(t^2-1\right) F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)},$$

$$(140)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)} \frac{p \, dp}{\sin 2p} = \pi \mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ (-\pi)}^{(1)\ (\pi)} \frac{l\left(\frac{1+t}{2}\right) f\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{\left(\left(\left(t^2-1\right) F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)},$$

$$(141)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)} \frac{l \cos p}{p^2+(l \cos p)^2} \, dp =$$

$$\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{f(0)}{F(0)} \frac{1}{l\left(\frac{1}{2}\right)} + \mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ (-\pi)}^{(1)\ (\pi)} \frac{f\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{\left(\left(l\left(\frac{1+t}{2}\right) F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)} \right\},$$

$$(142)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)} \frac{p \operatorname{tang} p}{p^2+(l \cos p)^2} \, dp =$$

$$-\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{f(0)}{F(0)} \frac{1}{l\left(\frac{1}{2}\right)} + \mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ (-\pi)}^{(1)\ (\pi)} \frac{(1-t) f\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]}{(1+t) \, l\left(\frac{1+t}{2}\right) \left(\left(F\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right)\right)} \right\}.$$

etc.....

Il est essentiel d'observer que les formules (133), (134) et (139) peuvent être étendues à des valeurs positives quelconques de la constante a.

Lorsque, dans les équations précédentes, on réduit les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ à l'unité, on en conclut

(143) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a p \cos ap\, dp = \frac{\pi}{2^{a+1}},$$

(144) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a p \cos a\left(\frac{\pi}{2} - p\right) dp = \frac{\pi}{2^{a+1}},$$

(145) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang}^a p\, dp = \frac{\pi}{2\cos\frac{a\pi}{2}},$$

(146) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}\cos p\, dp = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$ (147) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}\sin p\, dp = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{2}\right),$$

(148) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}\operatorname{tang} p\, dp = 0,$$

(149) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} \frac{\sin^a p}{\sin p}\, dp = \frac{\pi}{2^{a-1}} \mathop{\mathcal{E}}_{(0)}^{(1)} \mathop{}_{(-\pi)}^{(\pi)} \frac{(1+t)^{a-1}}{((t-1))} = \frac{\pi}{2},$$

(150) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p\, dp}{\sin 2p} = \infty,$$

(151) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{l}\cos p}{p^2 + (\mathrm{l}\cos p)^2}\, dp = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{\mathrm{l}\left(\frac{1}{2}\right)} + \mathop{\mathcal{E}}_{(0)}^{(1)} \mathop{}_{(-\pi)}^{(\pi)} \frac{1}{\left(\left(\mathrm{l}\left(\frac{1+t}{2}\right)\right)\right)}\right\} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{l}(2)}\right),$$

(152) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p \operatorname{tang} p}{p^2 + (\mathrm{l}\cos p)^2}\, dp = \frac{\pi}{2\,\mathrm{l}(2)}.$$

Si l'on posait, dans l'équation (145) $\operatorname{tang} p = x$, et si l'on y remplaçait a par $a - 1$, on retrouverait une formule d'Euler, savoir, l'équation (50) de la page 109. On doit au même géomètre la formule (147), de laquelle on déduit sans peine les équations (146), (148); et à M. Poisson, les formules (143), (151), (152). Ajoutons qu'on peut tirer la formule (144) de l'équation (143), et que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p\,dp}{\sin 2p}$$

a évidemment, comme l'indique la formule (150), une valeur infinie. Quant à l'équation (149), qu'il est facile de vérifier directement toutes les fois que la constante a se réduit à un nombre entier, elle offre cela de remarquable, qu'on peut y faire varier arbitrairement la constante dont il s'agit, sans que le premier membre change de valeur.

L'intégrale (140) est l'une de celles dont j'ai appris à déterminer les valeurs dans un Mémoire approuvé par l'Institut, sur un rapport de M. Legendre, daté du 7 novembre 1814. Si l'on remplace $f(x)$ par $(1-x^2)f(x)$, cette même intégrale se transformera dans la suivante

$$(153) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos 2p)}{F(\cos 2p)}\, p \sin 2p\, dp,$$

Les équations (132), (133) et suivantes supposent, comme les formules (93) et (130), que l'expression (131) conserve une valeur finie pour une valeur nulle de t; ce qui arrivera nécessairement, si, dans la fraction rationnelle,

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

le degré du numérateur est inférieur ou égal au degré du dénominateur. Si le contraire avait lieu, les intégrales comprises dans les équations (132), (133) et suivantes pourraient facilement se déduire non plus de la formule (93), mais de la formule (91). Ainsi, par exemple, si l'on prenait

$$f(x) = x^m, \qquad \text{et} \qquad F(x) = 1,$$

m étant un nombre entier quelconque, le premier membre de la formule (132) se réduirait à l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \cos^m p\, dp$$

et, pour déterminer cette intégrale, il suffirait de poser, dans la formule (91)

$$f(t) = \left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^m.$$

On trouverait ainsi

(154) $$\int_0^\pi \cos^m p\, dp = \frac{\pi}{2^m} \mathcal{E} \frac{(1+t)^{2m}}{((t^{m+1}))}.$$

D'ailleurs, le coëfficient de $\frac{1}{t}$, dans le développement de

$$\frac{(1+t^2)^m}{t^{m+1}} = \frac{1}{t^{m+1}} + \frac{m}{1}\frac{1}{t^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2.}\frac{1}{t^{m-3}} + \text{etc.....},$$

est évidemment égal à zéro, lorsque m désigne un nombre impair, et à

$$\frac{m(m-1)\ldots.\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots.\frac{m}{2}} = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{\left(1.2\ldots\frac{m}{2}\right)\left(1.2\ldots\frac{m}{2}\right)}$$

dans le cas contraire. On aura donc, pour des valeurs impaires de m,

(155) $$\int_0^\pi \cos^m p\, dp = 0,$$

et, pour des valeurs paires de m,

(156) $$\int_0^\pi \cos^m p\, dp = \frac{\pi}{2^m}\frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{\left(1.2\ldots\frac{m}{2}\right)\left(1.2\ldots\frac{m}{2}\right)} = \pi\frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m};$$

ce qui est exact.

Supposons encore

$$f(x) = 1 - x^2, \qquad F(x) = 1.$$

L'intégrale (141) deviendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cot p\, dp,$$

et sa valeur, déduite de la formule (91), sera

(157) $$\int_0^\pi p \cot p\, dp = \frac{\pi}{2} \overset{(1)}{\underset{(0)}{}} \overset{(\pi)}{\underset{(-\pi)}{\mathcal{E}}} \frac{(1+t)\,l\left(\frac{1+t}{2}\right)}{((t(t-1)))} = \frac{\pi}{2}\, l(2).$$

Concevons maintenant que l'on prenne successivement

(158) $$f(t)=\frac{t\,\mathrm{f}(t)}{e^{st}-1},$$ (159) $$f(t)=\frac{t\,\mathrm{f}(t)}{e^{st\sqrt{-1}}-1},$$

s désignant une quantité positive, et $\mathrm{f}(t)$ une fonction qui conserve une valeur finie pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de t, dont les modules sont renfermés entre les limites 0, 1. On tirera de la formule (92), 1.° en supposant $s<2\pi$,

(160) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{p\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{e^{s(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)}-1}\,dp=\frac{2\pi}{s}\,\mathrm{f}(0),$$

(161) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{p\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{e^{-s(\sin p-\sqrt{-1}\cos p)}-1}\,dp=\frac{2\pi}{s\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(0);$$

2.° en supposant $s=2\pi$,

(162) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{p\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{e^{2\pi(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)}-1}\,dp=\mathrm{f}(0)+\frac{\mathrm{f}(\sqrt{-1})+\mathrm{f}(-\sqrt{-1})}{2},$$

(163) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{p\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{e^{-2\pi(\sin p-\sqrt{-1}\cos p)}-1}\,dp=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left\{\mathrm{f}(0)+\frac{\mathrm{f}(1)+\mathrm{f}(-1)}{2}\right\};$$

3.° en supposant s compris entre les limites 2π, 4π,

(164) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{p\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{e^{s(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)}-1}\,dp=\frac{2\pi}{s}\left\{\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}\left(\frac{2\pi}{s}\sqrt{-1}\right)+\mathrm{f}\left(-\frac{2\pi}{s}\sqrt{-1}\right)\right\},$$

(165) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{p\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{e^{-s(\sin p-\sqrt{-1}\cos p)}-1}\,dp=\frac{2\pi}{s\sqrt{-1}}\left\{\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}\left(\frac{2\pi}{s}\right)+\mathrm{f}\left(-\frac{2\pi}{s}\right)\right\}.$$

En général, si l'on suppose $s=2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque, on trouvera

(166) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{p\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{e^{2n\pi(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)}-1}\,dp=$$
$$\frac{1}{n}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}\left(\frac{1}{n}\sqrt{-1}\right)+\mathrm{f}\left(\frac{2}{n}\sqrt{-1}\right)+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{2}\,\mathrm{f}(\sqrt{-1})\\ \qquad+\mathrm{f}\left(-\frac{1}{n}\sqrt{-1}\right)+\mathrm{f}\left(-\frac{2}{n}\sqrt{-1}\right)+\dots+\frac{1}{2}\,\mathrm{f}(-\sqrt{-1})\end{array}\right\},$$

(167)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{p\sqrt{-1}}\, \mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{e^{-2n\pi(\sin p + \sqrt{-1}\cos p)} - 1}\, dp =$$

$$\frac{1}{n\sqrt{-1}} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{f}(0) + \mathrm{f}\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{f}\left(\frac{1}{n}\right) + \dots\dots\dots + \frac{1}{2}\mathrm{f}(1) \\ \qquad + \mathrm{f}\left(-\frac{1}{n}\right) + \mathrm{f}\left(-\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{2}\mathrm{f}(-1) \end{array} \right\}.$$

Si, au contraire, on suppose la quantité s renfermée entre les limites $2n\pi$, $2(n+1)\pi$, on aura

(168)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{p\sqrt{-1}}\, \mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{e^{s(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)} - 1}\, dp =$$

$$\frac{2\pi}{s} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{f}(0) + \mathrm{f}\left(\frac{2\pi}{s}\sqrt{-1}\right) + \mathrm{f}\left(\frac{4\pi}{s}\sqrt{-1}\right) + \dots\dots\dots + \mathrm{f}\left(\frac{2n\pi}{s}\sqrt{-1}\right) \\ \qquad + \mathrm{f}\left(-\frac{2\pi}{s}\sqrt{-1}\right) + \mathrm{f}\left(-\frac{4\pi}{s}\sqrt{-1}\right) + \dots + \mathrm{f}\left(-\frac{2n\pi}{s}\sqrt{-1}\right) \end{array} \right\}.$$

(169)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{p\sqrt{-1}}\, \mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{e^{-s(\sin p - \sqrt{-1}\cos p)} - 1}\, dp =$$

$$\frac{2\pi}{s\sqrt{-1}} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{f}(0) + \mathrm{f}\left(\frac{2\pi}{s}\right) + \mathrm{f}\left(\frac{4\pi}{s}\right) + \dots\dots\dots + \mathrm{f}\left(\frac{2n\pi}{s}\right) \\ \qquad + \mathrm{f}\left(-\frac{2\pi}{s}\right) + \mathrm{f}\left(-\frac{4\pi}{s}\right) + \dots + \mathrm{f}\left(-\frac{2n\pi}{s}\right) \end{array} \right\}.$$

Si, dans l'équation (169), on remplace s par $\frac{2\pi}{s}$, et $\mathrm{f}(t)$ par $\mathrm{f}\left(\frac{t}{s}\right)$ on obtiendra la formule

(170)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{p\sqrt{-1}}\, \mathrm{f}\left(\frac{1}{s}e^{p\sqrt{-1}}\right)}{e^{-\frac{2\pi}{s}(\sin p - \sqrt{-1}\cos p)} - 1}\, dp = \frac{s}{\sqrt{-1}} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(1) + \mathrm{f}(2) + \dots\dots + \mathrm{f}(n) \\ \qquad + \mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}(-2) + \dots + \mathrm{f}(-n) \end{array} \right\},$$

qui subsiste pour toutes les valeurs de s renfermées entre les limites $s = \frac{1}{n}$, $s = \frac{1}{n+1}$. On aura donc par suite

(171) $\mathrm{f}(-n)+\mathrm{f}(-n+1)+\ldots+\mathrm{f}(-1)+\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}(1)+\ldots+\mathrm{f}(n-1)+\mathrm{f}(n)$

$$=\frac{\sqrt{-1}}{s}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{p\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}\left(\frac{1}{s}e^{p\sqrt{-1}}\right)}{e^{-\frac{2\pi}{s}(\sin p-\sqrt{-1}\cos p)}-1}\,dp\,,$$

et l'on en conclura, si la fonction $\mathrm{f}(t)$ est réelle,

(172) $\mathrm{f}(-n)+\mathrm{f}(-n+1)+\ldots+\mathrm{f}(-1)+\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}(1)+\ldots+\mathrm{f}(n-1)+\mathrm{f}(n)$

$$=\frac{1}{s}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\frac{2\pi}{s}\sin p}\sin p-\sin\left(p-\frac{2\pi}{s}\cos p\right)}{e^{\frac{2\pi}{s}\sin p}-2\cos\left(\frac{2\pi}{s}\cos p\right)+e^{-\frac{2\pi}{s}\sin p}}\;\frac{\mathrm{f}\left(\frac{1}{s}e^{p\sqrt{-1}}\right)+\mathrm{f}\left(\frac{1}{s}e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp$$

$$+\frac{1}{s}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\frac{2\pi}{s}\sin p}\cos p-\cos\left(p-\frac{2\pi}{s}\cos p\right)}{e^{\frac{2\pi}{s}\sin p}-2\cos\left(\frac{2\pi}{s}\cos p\right)+e^{-\frac{2\pi}{s}\sin p}}\;\frac{\mathrm{f}\left(\frac{1}{s}e^{p\sqrt{-1}}\right)-\mathrm{f}\left(\frac{1}{s}e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\,dp.$$

Les formules (171) et (172) supposent, l'une et l'autre, la valeur de s comprise entre les deux nombres $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$. Le premier membre de chacune d'elles se réduit à la somme

(173) $$\frac{1}{2}\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}(1)+\mathrm{f}(2)+\ldots\mathrm{f}(n)\,,$$

dans le cas particulier où l'on a

(174) $$\mathrm{f}(t)=\mathrm{f}(-t).$$

Si, pour fixer les idées, on pose dans la dernière de ces formules

$$\mathrm{f}(t)=t^{2m},\qquad\text{ou}\qquad \mathrm{f}(t)=e^{at^2},$$

m étant un nombre entier quelconque, et a une constante arbitraire, on trouvera successivement

(175) $$1+2^{2m}+3^{2m}+\ldots\ldots n^{2m}$$

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{2m-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\frac{2\pi}{s}\sin p}\sin(2m+1)p-\sin\left\{(2m+1)p-\frac{2\pi}{s}\cos p\right\}}{e^{\frac{2\pi}{s}\sin p}-2\cos\left(\frac{2\pi}{s}\cos p\right)+e^{-\frac{2\pi}{s}\sin p}}\,dp\,,$$

et

(176) $$\frac{1}{2}+e^{a}+e^{4a}+e^{9a}+\ldots\ldots+e^{n^2a}=$$

$$\frac{1}{s}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\frac{2\pi}{s}\sin p}\sin\left(p+\frac{a}{s^2}\sin 2p\right)-\sin\left(p+\frac{a}{s^2}\sin 2p-\frac{2\pi}{s}\cos p\right)}{e^{\frac{2\pi}{s}\sin p}-2\cos\left(\frac{2\pi}{s}\cos p\right)+e^{-\frac{2\pi}{s}\sin p}}\,e^{\frac{a\cos 2p}{s^2}}\,dp.$$

Supposons encore que l'on prenne successivement

(177) $$f(t)=\frac{\mathrm{f}(t)}{\left(e^{st}+e^{-st}\right)\left(e^{\frac{s}{t}}+e^{-\frac{s}{t}}\right)},$$

(178) $$f(t)=\frac{\mathrm{f}(t)}{\left(e^{st}-e^{-st}\right)\left(e^{\frac{s}{t}}-e^{-\frac{s}{t}}\right)},$$

$\mathrm{f}(t)$ désignant une fonction qui conserve une valeur finie pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de t, différentes de zéro, et dont les modules sont renfermés entre les limites 0 et 1. Alors l'équation (91) fournira immédiatement les valeurs des deux intégrales

(179) $$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\;\frac{dp}{e^{2s\cos p}+2\cos(2s\sin p)+e^{-2s\cos p}},$$

(180) $$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+\mathrm{f}\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\;\frac{dp}{e^{2s\sin p}-2\cos(2s\sin p)+e^{-2s\sin p}}.$$

Ces dernières intégrales comprennent, comme cas particuliers, celles que M. Poisson a déterminées à la page 494 du 19.e cahier du Journal de l'École royale polytechnique.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur les applications des formules (85), (91), (92), etc..... Nous en avons dit assez pour faire voir les avantages qu'elles présentent dans la détermination des intégrales définies.



SUR LA RÉSOLUTION

DE QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES

EN NOMBRES ENTIERS.

§ 1.er *Résolution en nombres entiers des équations homogènes entre deux variables.*

Soit

$$F(x,y)$$

une fonction homogène des deux variables x, y. L'équation indéterminée

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

pourra être facilement résolue en nombres entiers. En effet, si l'on pose $y=px$, cette équation deviendra

$$F(1,p)=0, \tag{2}$$

et il ne restera plus qu'à résoudre cette dernière par rapport à p. Si l'équation (2) a des racines réelles et rationnelles, et si l'on désigne par

$$\frac{M}{N}$$

une quelconque de ces racines réduite à sa plus simple expression, on vérifiera l'équation (1) en posant

$$\frac{y}{x}=\frac{M}{N}, \tag{3}$$

et par suite

$$x=kM, \qquad y=kN, \tag{4}$$

k désignant un nombre entier choisi arbitrairement.

Exemple. Supposons que, les quantités réelles A, B, C ayant pour valeurs numériques des nombres entiers, on propose de résoudre l'équation indéterminée

(5) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 :$$

on en tirera

(6) $$A + Bp + Cp^2 = 0 ,$$

et par suite

(7) $$\frac{y}{x} = p = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}.$$

Donc l'équation (5) ne pourra être résolue en nombres entiers que dans le cas où $B^2 - 4AC$ sera un carré parfait.

§ 2.e *Résolution en nombres entiers de l'équation homogène du premier degré à trois variables.*

Soit donnée à résoudre l'équation indéterminée

(1) $$au + bv + cw = 0 ,$$

a, b, c désignant trois quantités entières, c'est-à-dire trois quantités réelles qui aient pour valeurs numériques des nombres entiers, et u, v, w trois inconnues. Si l'on exclut, comme on peut toujours le faire, le cas où les trois quantités a, b, c ont un diviseur commun, on reconnaîtra sans peine non-seulement que l'on satisfait à l'équation (1), en prenant

(2) $$\left\{ \begin{array}{l} u = br - cn , \\ v = cm - ar , \\ w = an - bm , \end{array} \right.$$

m, n, r étant trois quantités entières; mais encore, que les valeurs précédentes de u, v, w offrent toutes les solutions possibles de la question proposée. En effet, désignons par U, V, W un quelconque des systèmes de valeurs entières de u, v, w propres à vérifier l'équation (1), en sorte qu'on ait

(3) $$aU + bV + cW = 0.$$

Soit d'ailleurs $\mathfrak{D}$ le plus grand commun diviseur de a et de b. $\mathfrak{D}$, par hy-

pothèse, ne pourra diviser c; et en conséquence W devra être divisible par $\mathcal{D}$. Il en résulte immédiatement qu'on pourra trouver des quantités entières M et N qui satisfassent à la formule

$$\frac{a}{\mathcal{D}} N - \frac{b}{\mathcal{D}} M = \frac{W}{\mathcal{D}} ,$$

ou, ce qui revient au même, à la suivante

(4) $$W = aN - bM. .$$

De plus, si l'on élimine W entre les équations (3) et (4), on en conclura

$$a(U + cN) = b(cM - V) ,$$

ou, ce qui revient au même,

(5) $$\frac{a}{\mathcal{D}} (U + cN) = \frac{b}{\mathcal{D}} (cM - V) ;$$

et, comme $\frac{a}{\mathcal{D}}$, $\frac{b}{\mathcal{D}}$ n'auront pas de facteurs communs, on tirera évidemment de l'équation (5)

$$U + cN = \frac{b}{\mathcal{D}} R , \qquad cM - V = \frac{a}{\mathcal{D}} R ,$$

ou

(6) $$U = \frac{b}{\mathcal{D}} R - cN , \qquad V = cM - \frac{a}{\mathcal{D}} R ,$$

R désignant une quantité entière. Enfin, c et $\mathcal{D}$ n'ayant pas de facteurs communs, on pourra trouver encore deux quantités entières r et s qui vérifient la formule

(7) $$R = \mathcal{D} r - cs .$$

Cela posé, les équations (6) donneront

(8) $$U = br - c\left(N + \frac{b}{\mathcal{D}} s\right) , \qquad V = c\left(M + \frac{a}{\mathcal{D}} s\right) - ar .$$

Or, il est clair que les valeurs de U, V, W déterminées par les formules (4) et (8)

coïncideront avec les valeurs de u, v, w que l'on déduirait des équations (2) en posant

(9) $$m = M + \frac{a}{\mathcal{D}}s, \qquad n = N + \frac{b}{\mathcal{D}},$$

Donc ces équations fournissent toutes les solutions possibles de la formule (1).

Si l'on désignait par u_0, v_0, w_0 un système particulier des valeurs de u, v, w propres à vérifier l'équation (1), en sorte qu'on eût

(10) $$au_0 + bv_0 + cw_0 = 0,$$

on pourrait remplacer l'équation (1) par la suivante

(11) $$a(u - u_0) + b(v - v_0) + c(w - w_0) = 0,$$

et substituer en conséquence aux premiers membres des formules (2) les trois différences $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0$. Cela posé, les valeurs générales de u, v, w se présenteraient sous la forme

(12) $$\begin{cases} u = u_0 + br - cn, \\ v = v_0 + cm - ar, \\ w = w_0 + an - bm. \end{cases}$$

§ 3.e *Sur la résolution en nombres entiers des équations homogènes entre trois variables.*

Soit $$F(x, y, z)$$

une fonction homogène des trois variables x, y, z; et supposons qu'étant donnée une solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

(1) $$F(x, y, z) = 0,$$

on propose de résoudre généralement la même équation. Soit

(2) $$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c$$

la solution donnée, en sorte qu'on ait

(3) $$F(a, b, c) = 0,$$

a, b, c désignant trois quantités entières. Si l'on satisfait à l'équation (1), par d'autres quantités entières x, y, z, on pourra encore en trouver trois u, v, w qui soient propres à vérifier les deux équations

$$(4) \qquad \begin{cases} au + bv + cw = 0, \\ xu + yv + zw = 0, \end{cases}$$

desquelles on tire

$$(5) \qquad \frac{u}{cy - bz} = \frac{v}{az - cx} = \frac{w}{ax - by}.$$

Car il suffira de prendre pour u, v, w les trois différences

$$cy - bz, \quad az - cx, \quad bx - ay,$$

ou, si l'on veut qu'il n'existe pas de facteur commun aux trois quantités u, v, w, les quotients qu'on obtiendra en divisant les mêmes différences par leur plus grand commun diviseur. Si maintenant on substitue dans l'équation (1) la valeur de z tirée de la seconde des formules (4), on trouvera

$$(6) \qquad \mathrm{F}\left(x, y - \frac{ux + vy}{w}\right) = 0,$$

ou, parce que la fonction $\mathrm{F}(x, y, z)$ est supposée homogène,

$$(7) \qquad \mathrm{F}[wx, wy, -(ux + vy)] = 0.$$

De plus, comme on vérifie l'équation (1) et la seconde des formules (4) en prenant $x = a, y = b, z = c$, on aura encore

$$(8) \qquad \mathrm{F}[wa, wb, -(ua + vb)] = 0.$$

Enfin, si l'on pose

$$(9) \qquad \frac{y}{x} = p, \quad \frac{b}{a} = P,$$

les formules (7) et (8) donneront

$$(10) \qquad \mathrm{F}[w, wp, -(u + vp)] = 0,$$

$$(11) \qquad \mathrm{F}[w, wP, -(u + vP)] = 0.$$

On aura par suite

$$(12)\qquad F[w, wp-(u+vp)]-F[w, wP, -(u+vP)]=0.$$

Ajoutons que, si l'on fait, pour abréger,

$$(13)\quad \Phi(x,y,z)=\frac{dF(x,y,z)}{dx},\ \mathrm{X}(x,y,z)=\frac{dF(x,y,z)}{dy},\ \Psi(x,y,z)=\frac{dF(x,y,z)}{dz},$$

et, si l'on désigne par $\mathcal{N}$ le degré de la fonction homogène $F(x,y,z)$, on aura, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$(14)\qquad x\Phi(x,y,z)+y\mathrm{X}(x,y,z)+z\Psi(x,y,z)=\mathcal{N}F(x,y,z),$$

et par suite

$$(15)\qquad a\Phi(a,b,c)+b\mathrm{X}(a,b,c)+c\Psi(a,b,c)=0.$$

Cela posé, il est clair qu'on vérifiera la première des formules (4) non-seulement en supposant

$$(16)\qquad u=br-cn,\quad v=cm-ar,\quad w=an-bm,$$

mais encore en prenant

$$(17)\qquad u=\Phi(a,b,c),\quad v=\mathrm{X}(a,b,c),\quad w=\Psi(a,b,c),$$

et plus généralement

$$(18)\qquad \begin{cases} u=\Phi(a,b,c)+br-cn,\\ v=\mathrm{X}(a,b,c)+cm-ar,\\ w=\Psi(a,b,c)+an-bm,\end{cases}$$

m, n, r étant des quantités entières quelconques. Il ne restera plus qu'à examiner si l'on peut disposer de m, n et r, de manière que l'équation (12) fournisse des valeurs rationnelles de p autres que $p=P$. Dans tous les cas où cette condition pourra être remplie, la méthode précédente fournira de nouvelles solutions de l'équation (1). En effet, pour chacune des nouvelles valeurs rationnelles de p, on tirera facilement des équations

$$(19)\qquad y=px,\qquad\qquad (20)\qquad z=-\frac{ux+vy}{w}=-\left(\frac{u+vp}{w}\right)x,$$

ou, ce qui revient au même, de la seule formule

(21) $$\frac{x}{w} = \frac{y}{wp} = \frac{z}{-u-vp},$$

des systèmes de valeurs entières de x, y, z; et il est clair que chacun de ces systèmes sera propre à vérifier l'équation (6), et par conséquent l'équation (1).

Nous allons maintenant appliquer la méthode qui précède aux équations homogènes du second et du troisième degré.

§ 4.e *Sur la résolution en nombres entiers de l'équation homogène du second degré entre trois variables.*

Quoique le problême, qui va faire l'objet de ce paragraphe, puisse être ramené à une question connue, savoir, à la résolution en nombres rationnels d'une équation indéterminée du second degré entre deux variables, il nous a paru convenable de montrer comment la méthode ci-dessus exposée s'applique au problême dont il s'agit.

Soit donnée à résoudre en nombres entiers l'équation

(1) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy = 0.$$

On aura, dans ce cas, en adoptant les notations du § 3,

(2) $$F(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy,$$

(3) $$\left\{\begin{array}{l} \Phi(x,y,z) = 2Ax + Ez + Fy, \\ \mathrm{X}(x,y,z) = 2By + Fx + Dz, \\ \Psi(x,y,z) = 2Cz + Dy + Ex. \end{array}\right.$$

Donc les valeurs générales de u, v, w pourront être déterminées non-seulement par les formules

(4) $$u = br - cn, \qquad v = cm - ar, \qquad w = an - bm,$$

mais encore par les suivantes

(5) $$\left\{\begin{array}{l} u = 2Aa + Ec + Fb + br - cn, \\ v = 2Bb + Fa + Dc + cm - ar, \\ w = 2Cc + Db + Ea + an - bm, \end{array}\right.$$

De plus, l'équation (12) du § 3 donnera

$$(6)\quad (p-P)[(Bw^2-Dvw+Cv^2)(p+P)+Fw^2-(Ev+Du)w+2Cuv]=0.$$

Or, on satisfait à l'équation (6), non-seulement en prenant $p=P$, mais encore en supposant

$$(7)\qquad p=\frac{(Ev+Du)w-Fw^2-2Cuv}{Bw^2-Dvw+Cv^2}-P,$$

et cette dernière valeur de p est évidemment rationnelle. Donc, lorsque l'équation (1) admet une solution, elle en admet pour l'ordinaire une infinité d'autres.

Si l'on remet, dans la formule (7), au lieu de P sa valeur $\frac{b}{a}$, on aura

$$(8)\qquad p=\frac{a[Evw+Duw-Fw^2-2Cuv]-b[Bw^2-Dvw+Cv^2]}{a(Bw^2-Dvw+Cv^2)},$$

puis, en ayant égard aux équations

$$(9)\qquad \begin{cases} au+bv+cw=0, \\ Aa^2+Bb^2+Cc^2+Dbc+Eca+Fab=0, \end{cases}$$

on trouvera

$$(10)\qquad \frac{y}{x}=p=\frac{a(Aw^2-Euw+Cu^2)}{b(Bw^2-Dvw+Cv^2)}.$$

En effet, si l'on élimine c entre les équations (9), on aura

$$(11)\quad (Bw^2-Dvw+Cv^2)b^2-(Evw+Duw-Fw^2-2Cuv)ab=-a^2(Aw^2-Euw+Cu^2).$$

Or, il suffit évidemment de recourir à la formule (11) pour déduire la formule (10) de l'équation (8).

La méthode, par laquelle nous sommes parvenus à l'équation (10), donnerait également la suivante

$$(12)\qquad \frac{z}{x}=\frac{a(Av^2-Fuv+Bu^2)}{c(Bw^2-Dvw+Cv^2)},$$

Or, il est clair qu'on vérifiera les équations (10) et (12) en posant

$$(13)\quad \begin{cases} x = \dfrac{Bw^2 - Dvw + Cv^2}{a}, \\[2ex] y = \dfrac{Cu^2 - Ewu + Aw^2}{b}, \\[2ex] z = \dfrac{Av^2 - Fuv + Bu^2}{c}. \end{cases}$$

Il suit de la formule (11) que la valeur de x, donnée par la première des équations (13), est entière, du moins quand a et b sont premiers entre eux. On doit en dire autant des valeurs de y et de z. Ajoutons que, pour obtenir toutes les solutions possibles de l'équation (1), il suffira de recourir aux formules (10) et (12), ou, ce qui revient au même, à la suivante

$$(14)\quad \frac{ax}{Bw^2 - Dvw + Cv^2} = \frac{by}{Cu^2 - Ewu + Aw^2} = \frac{cz}{Av^2 - Fuv + Bu^2},$$

et d'y substituer pour u, v, w tous les systèmes de valeurs entières que peuvent fournir ou les équations (4) ou les équations (5). A chacun de ces systèmes correspondront des valeurs entières des trois expressions

$$(15)\quad \frac{Bw^2 - Dvw + Cv^2}{a}, \quad \frac{Cu^2 - Ewu + Aw^2}{b}, \quad \frac{Av^2 - Euv + Bu^2}{c},$$

et, si l'on divise ces valeurs entières par leur plus grand commun diviseur numérique, on parviendra immédiatement à l'une des solutions que comporte le problême dans le cas où l'on exige que les inconnues x, y, z n'aient pas de facteurs communs.

Exemple. Concevons qu'il s'agisse de résoudre l'équation

$$(16)\quad 11(x^2 + y^2 + z^2) - 14(xy + xz + yz) = 0;$$

on trouvera qu'elle est vérifiée par

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3;$$

et par suite les valeurs générales de x, y, z, tirées des formules (12), seront

$$(17)\quad \begin{cases} x = \dfrac{11(v^2 + w^2) + 14vw}{1}, \\[2ex] y = \dfrac{11(w^2 + u^2) + 14wu}{2}, \\[2ex] z = \dfrac{11(u^2 + v^2) + 14uv}{3}; \end{cases}$$

les quantités u, v, w étant assujetties à vérifier l'équation

$$(18) \qquad u + 2v + 3w = 0\,.$$

On aura d'ailleurs, dans le cas présent,

$$\Phi(a,b,c) = -48\,, \quad \mathrm{X}(a,b,c) = -12\,, \quad \Psi(a,b,c) = 24.$$

On pourra donc prendre

$$u = -48\,, \quad v = -12\,; \quad w = +25\,,$$

ou même, en divisant par -12,

$$u = 4\,, \quad v = 1\,, \quad w = -2\,,$$

et plus généralement

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = 4 + 2r - 3n\,, \\ v = 1 + 3m - r\,, \\ w = -2 + n - 2m\,. \end{array} \right.$$

m, n, r étant des nombres entiers quelconques.

Si l'on suppose en particulier $m = 1, n = 1, r = 2$, on trouvera

$$a = 5\,, \quad v = 2\,, \quad w = -3\,,$$

et les formules (14) donneront

$$x = 59\,, \quad y = 82\,, \quad z = 153\,.$$

Or, effectivement ces trois valeurs de x, y, z vérifient l'équation (13).

Il est essentiel d'observer qu'on pourrait remplacer les équations (19) par les formules (4), qui, dans le cas présent, se réduisent à

$$(20) \qquad u = 2r - 3n\,, \quad v = 3m - r\,, \quad w = n - 2m\,.$$

Si l'on pose, dans ces dernières, $m = 1$, $n = -1$, $r = 1$, on retrouvera les valeurs déjà obtenues pour u, v, w, savoir, $u = 5$, $v = 2$, $w = -3$. Ajoutons que, pour trouver toutes les solutions possibles de l'équation (16), il suffira de recourir à la formule

$$(21)\qquad \frac{x}{11(v^2+w^2)+14vw}=\frac{2y}{11(w^2+u^2)+14wu}=\frac{3z}{11(u^2+v^2)+14uw},$$

et d'y substituer pour u, v, w tous les systèmes de valeurs entières que peuvent fournir les équations (20).

Si la formule (1) se réduit à

$$(22)\qquad Ax^2+By^2+Cz^2=0,$$

les équations (13) deviendront

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{Bw^2+Cv^2}{a}, \\ y=\dfrac{Cu^2+Aw^2}{b}, \\ z=\dfrac{Av^2+Bu^2}{c}, \end{array}\right.$$

et les formules (5) donneront

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} u=2Aa+br-cn, \\ v=2Bb+cm-ar, \\ w=2Cc+an-bm. \end{array}\right.$$

On peut évidemment remplacer les équations (21) par les suivantes

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} u=Aa+br-cn, \\ v=Bb+cm-ar, \\ w=Cc+an-bm. \end{array}\right.$$

Si l'on tire des formules (4) les valeurs de u, v, w pour les substituer dans les équations (23), on trouvera

$$(26)\qquad \left\{\begin{array}{l} x=(Am^2+Bn^2+Cr^2)a-2m(Aam+Bbn+Ccr), \\ y=(Am^2+Bn^2+Cr^2)b-2n(Aam+Bbn+Ccr), \\ z=(Am^2+Bn^2+Cr^2)c-2r(Aam+Bbn+Ccr). \end{array}\right.$$

Si, au contraire, on substitue les formules (25) aux formules (4), on aura

$$(27)\quad \begin{cases} x=(Am^2+Bn^2+Cr^2-ABC)a-2m(Aam+Bbn+Ccr)+2BC(cn-br), \\ y=(Am^2+Bn^2+Cr^2-ABC)b-2n(Aam+Bbn+Ccr)+2CA(ar-cm), \\ z=(Am^2+Bn^2+Cr^2-ABC)c-2r(Aam+Bbn+Ccr)+2AB(bm-an). \end{cases}$$

Il est facile de s'assurer que les valeurs de x, y, z, données par les formules (26) ou (27), sont exactes; en effet, si l'on substitue ces valeurs dans le trinome qui constitue le premier membre de l'équation (22), on trouvera, en partant des formules (26),

$$(28)\quad Ax^2+By^2+Cz^2=(Aa^2+Bb^2+Cc^2)(Am^2+Bn^2+Cr^2)^2,$$

et en partant des formules (27),

$$(29)\quad Ax^2+By^2+Cz^2=(Aa^2+Bb^2+Cc^2)(Am^2+Bn^2+Cr^2+ABC)^2.$$

Donc, si a, b, c vérifient la formule

$$(30)\quad Aa^2+Bb^2+Cc^2=0,$$

x, y, z vérifieront l'équation (22).

Si a, b, c, au lieu de vérifier l'équation (30), étaient choisis de manière que l'on eût

$$(31)\quad Aa^2+Bb^2+Cc^2=K,$$

K désignant un nombre entier quelconque, alors les valeurs de x, y, z déduites des formules (26), satisferaient à la suivante

$$(32)\quad Ax^2+By^2+Cz^2=Kt^2,$$

la valeur de t étant

$$(33)\quad t=Am^2+Bn^2+Cr^2.$$

Par conséquent elles satisferaient à l'équation

$$(34)\quad Ax^2+Bx^2+Cz^2=K,$$

si l'on choisissait m, n, r, de manière à vérifier la formule

$$(35)\quad Am^2+Bn^2+Cr^2=\pm 1.$$

Donc, si l'on obtient diverses solutions de l'équation (35), à chacune d'elles correspondra une nouvelle solution de l'équation (34).

Si l'on veut parvenir à toutes les solutions possibles de l'équation (22), il suffira de remplacer les équations (23) par la seule formule

(36) $$\frac{ax}{Bw^2+Cv^2}=\frac{by}{Cu^2+Aw^2}=\frac{cz}{Av^2+Bu^2}.$$

Si, dans cette dernière, on substitue pour u, v, w leurs valeurs tirées des équations (4), elle deviendra

(37) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{x}{(Am^2+Bn^2+Cr^2)a-2m(Aam+Bbn+Ccr)}\\ &=\frac{y}{(Am^2+Bn^2+Cr^2)b-2n(Aam+Bbn+Ccr)}\\ &=\frac{z}{(Am^2+Bn^2+Cr^2)c-2r(Aam+Bbn+Ccr)}.\end{aligned}\right.$$

Exemple. Concevons qu'il s'agisse de résoudre l'équation

(38) $$x^2-y^2+Cz^2=0.$$

On trouvera qu'elle est vérifiée par

$$x=1,\quad y=1,\quad z=0.$$

On pourra donc prendre $a=b=1$, $c=0$; et, comme on aura d'ailleurs, dans le cas présent, $A=1$, $B=-1$, la formule (37) se trouvera réduite à

(39) $$\frac{x}{Cr^2-(n-m)^2}=\frac{y}{Cr^2+(n-m)^2}=\frac{z}{2r(n-m)}.$$

Si l'on fait, pour abréger, $n-m=s$, on aura simplement

(40) $$\frac{x}{Cr^2-s^2}=\frac{y}{Cr^2+s^2}=\frac{z}{2rs},$$

r et s désignant deux quantités entières choisies arbitrairement. La formule (40) comprend toutes les solutions possibles de l'équation (38).

la valeur de t étant déterminée par l'équation (44). Par conséquent elles satisferaient à la formule

(53) $$Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz+Ezx+Fxy=K,$$

si l'on choisissait m, n, r de manière à vérifier l'équation

(54) $$Am^2+Bn^2+Cr^2+Dnr+Erm+Fmn=1.$$

Donc, si l'on obtient diverses solutions de l'équation (54), à chacune d'elles correspondra une nouvelle solution de l'équation (53).

Si l'on substituait les valeurs de u, v, w tirées des équations (4) dans la formule (14), alors on trouverait

(55) $$\frac{x}{as-mt}=\frac{y}{bs-nt}=\frac{z}{cs-rt}.$$

Cette dernière formule, dans laquelle $m, n, r,$ désignent des quantités entières choisies arbitrairement, et s, t deux polynomes déterminés par les équations (43), (44), comprend toutes les solutions possibles de l'équation (1). On ne doit pas même excepter la solution

$$x=a, \quad y=b, \quad z=c,$$

que l'on déduit de la formule (55), en choisissant m, n, r de manière à vérifier l'équation $t=0$, ou

(56) $$m(2Aa+Fb+Ec)+n(Fa+2Bb+Dc)+r(Fa+Db+2Cc)=0.$$

§ 5.° *Sur la résolution en nombres entiers de l'équation homogène du 3.° degré entre trois variables.*

Soit donnée à résoudre en nombres entiers l'équation

(1) $$Ax^3+By^3+Cz^3+Dyz^2+Ezx^2+Fxy^2+Gzy^2+Hxz^2+Iyx^2+Kxyz=0,$$

et supposons encore que l'on connaisse une première solution

(2) $$x=a, \quad y=b, \quad z=c,$$

de laquelle on veut en déduire d'autres. On aura dans ce cas, en adoptant toujours les notations du § 3,

(3) $$F(x,y,z)=Ax^3+By^3+Cz^3+Dyz^2+Ezx^2+Fxy^2+Gzy^2+Hxz^2+Iyx^2+Kxyz,$$

(4) $$\left\{\begin{array}{l} \Phi(x,y,z)=3Ax^2+2Ezx+2Ixy+Fy^2+Hz^2+Kyz, \\ \mathrm{X}(x,y,z)=3By^2+2Fxy+2Gyz+Dz^2+Ix^2+Kzx, \\ \Psi(x,y,z)=3Cz^2+2Dyz+2Hzx+Ex^2+Gy^2+Kxy. \end{array}\right.$$

Donc, les valeurs générales de u, v, w, pourront être déterminées, non-seulement par les formules

(5) $$u=br-cn,\quad v=cm-ar,\quad w=an-bm,$$

mais encore par les suivantes

(6) $$\left\{\begin{array}{l} u=3Aa^2+2Eca+2Iab+Fb^2+Hc^2+Kbc+br-cn, \\ v=3Bb^2+2Fab+2Gbc+Dc^2+Ia^2+Kca+cm-ar, \\ w=3Cc^2+2Dbc+2Hca+Ea^2+Gb^2+Kab+an-bm. \end{array}\right.$$

De plus, si l'on fait, pour abréger,

$$U=Bw^3-Gvw^2+Dv^2w-Cv^3,$$
$$V=Fw^3-(Gu+Ev)w^2+(Hv+2Du)vw-3Cuv^2,$$
$$W=Iw^3-(Ku+Ev)w^2+(Du+2Hv)vw-3Cu^2v,$$

l'équation (12) du § 3 deviendra

(7) $$(p-P)\left[U(p^2+pP+P^2)+V(p+P)+W\right]=0,$$

et, si on la divise par $p-P$, on trouvera

(8) $$p+\frac{P}{2}=\frac{-V\pm\sqrt{[V^2-U(4W+2VP+3UP^2)]}}{2U}.$$

Par conséquent on obtiendra de nouvelles solutions de l'équation (1), si l'on peut choisir u, v, w de manière que, l'équation

(9) $$au+bv+cw=0$$

étant vérifiée, l'expression

(10) $$V^2-U(4W+2VP+3UP^2)$$

devienne un carré parfait.

Il est facile de s'assurer que, si, dans les formules (6), on réduit m, n et r à zéro, u, v, w rempliront les conditions prescrites. C'est en effet ce qu'on prouvera de la manière suivante.

Posons dans l'équation (1)

$$(11)\qquad x = as - t\alpha, \quad y = bs - t\beta, \quad z = cs - t\gamma,$$

$\alpha, \beta, \gamma, s, t$, désignant de nouvelles variables. Cette équation, qui peut s'écrire sous la forme

$$(12)\qquad F(x, y, z) = 0,$$

deviendra

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} s^3 F(a,b,c) - s^2 t[\alpha\Phi(a,b,c) + \beta X(a,b,c) + \gamma\Psi(a,b,c)] \\ - t^3 F(\alpha,\beta,\gamma) + st^2[a\Phi(\alpha,\beta,\gamma) + bX(\alpha,\beta,\gamma) + c\Psi(\alpha,\gamma,\beta)] = 0. \end{array}\right.$$

Donc, si l'on prend

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} u = 3Aa^2 + 2Eca + 2Iab + Fb^2 + Hc^2 + Kbc = \Phi(a,b,c), \\ v = 3Bb^2 + 2Fab + 2Gbc + Dc^2 + Ia^2 + Kca = X(a,b,c), \\ w = 3Cc^2 + 2Dbc + 2Hca + Ea^2 + Gb^2 + Kab = \Psi(a,b,c), \end{array}\right.$$

on aura simplement

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} s^3 F(a,b,c) - s^2 t[\alpha u + \beta v + \gamma w] \\ - t^3 F(\alpha,\beta,\gamma) + st^2[a\Phi(\alpha,\beta,\gamma) + bX(\alpha,\beta,\gamma)\, c\Psi(\alpha,\beta,\gamma)] = 0. \end{array}\right.$$

On a d'ailleurs, par hypothèse,

$$(16)\qquad F(a,b,c) = 0.$$

Cela posé, si l'on assujettit α, β, γ à la condition

$$(17)\qquad u\alpha + u\beta + w\gamma = 0,$$

il est clair qu'on vérifiera la formule (15) en prenant

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} s = F(\alpha,\beta,\gamma) = \dfrac{\alpha\Phi(\alpha,\beta,\gamma) + \beta X(\alpha,\beta,\gamma) + \gamma\Psi(\alpha,\beta,\gamma)}{3}, \\ t = a\Phi(\alpha,\beta,\gamma) + bX(\alpha,\beta,\gamma) + c\Psi(\alpha,\beta,\gamma). \end{array}\right.$$

D'autre part on tirera des formules (9), (11) et (17)

(19) $$ux + vy + wz = 0.$$

Donc, les valeurs de u, v, w données par les équations (14) vérifieront les formules (4) du § 3, [x, y, z désignant des quantités assujetties, comme a, b, c, à l'équation (1)]. Donc l'équation (8) admettra la racine rationnelle

$$p = \frac{y}{x} = \frac{bs - t\beta}{as - t\alpha}.$$

Dans le cas particulier où la formule (1) se réduit à

(20) $$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 0,$$

on trouve

(21) $$u = 3Aa^2, \quad v = 3Bb^2, \quad w = 3Cc^2;$$

par suite l'équation (17) devient

(22) $$Aa^2\alpha + Bb^2\beta + Cc^2\gamma = 0,$$

et l'équation (19) se réduit à

(23) $$Aa^2x + Bb^2y + Cc^2z = 0.$$

Dans la même hypothèse, les équations (11) et (22), combinées avec la formule

(24) $$Aa^3 + Bb^3 + Cc^3 = 0,$$

conduisent à l'équation

(25) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0;$$

et, en joignant cette dernière à la formule (23), on en conclut

(26) $$\frac{x}{a(Bb^3 - Cc^3)} = \frac{y}{b(Cc^3 - Aa^3)} = \frac{z}{c(Aa^3 - Bb^3)}.$$

En conséquence on peut supposer

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = a(Bb^3 - Cc^3), \\ y = b(Cc^3 - Aa^3), \\ z = c(Aa^3 - Bb^3). \end{array}\right.$$

Exemple. On vérifie l'équation

$$(28)\qquad x^3 + 5y^3 - 4z^3 = 0,$$

en prenant

$$x = a = 3, \qquad y = b = 1, \qquad z = c = 2.$$

Cela posé, on tirera des formules (27) une nouvelle solution, savoir

$$x = 111, \qquad y = -59, \qquad z = 44.$$

De cette seconde solution on en déduirait facilement une troisième, et ainsi de suite.

Revenons maintenant au cas général où les quantités entières D, E, F, G, H, I, K, renfermées dans le premier membre de l'équation (1), conservent des valeurs différentes de zéro. Alors cette équation sera vérifiée par les valeurs de x, y, z tirées ou des formules (11), ou de la seule formule

$$(29)\qquad \frac{x}{as - t\alpha} = \frac{y}{bs - t\beta} = \frac{z}{cs - t\gamma},$$

pourvu que, les quantités s, t étant déterminées par les équations (18), α, β, γ satisfassent à l'équation

$$(17)\qquad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

Or, on vérifie cette dernière, en prenant

$$(30)\qquad \alpha = 0, \qquad \beta = w, \qquad \gamma = -v.$$

On pourra donc supposer

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{l} s = F(0, w, -v) = \dfrac{w\mathrm{X}(0, w, -v) - v\Psi(0, w, -v)}{3}, \\ t = a\Phi(0, w, -v) + b\mathrm{X}(0, w, -v) + c\Psi(0, w, -v); \end{array}\right.$$

et par suite la formule (29) donnera

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{x}{aF(0,w,-v)}\\&=\frac{y}{bF(0,w,-v)-w[a\Phi(0,w,-v)+b\mathrm{X}(0,w,-v)+c\Psi(0,w,-v)]}\\&=\frac{z}{cF(0,w,-v)+v[a\Phi(0,w,-v)+b\mathrm{X}(0,w,-v)+c\Psi(0,w,-a)]}.\end{aligned}\right.$$

vérifiera encore l'équation (17), en prenant

$$\alpha=-w,\qquad \beta=0,\qquad \gamma=u,$$

$$\alpha=v,\qquad \beta=-u,\qquad \gamma=0;$$

on tirera de la formule (29), dans la première hypothèse,

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{x}{aF(-w,0,u)+w[a\Phi(-w,0,u)+b\mathrm{X}(-w,0,u)+c\Psi(-w,0,u)]}\\&=\frac{y}{bF(-w,0,u)}\\&=\frac{z}{cF(-w,0,u)-u[a\Phi(-w,0,u)+b\mathrm{X}(-w,0,u)+c\Psi(-w,0,u)]},\end{aligned}\right.$$

lans la seconde hypothèse,

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{x}{aF(v,-u,0)-v[a\Phi(v,-u,0)+b\mathrm{X}(v,-u,0)+c\Psi(v,-u,0)]}\\&=\frac{y}{bF(v,-u,0)+u[a\Phi(v,-u,0)+b\mathrm{X}(v,-u,0)+c\Psi(v,-u,0)]}\\&=\frac{z}{cF(v,-u,0)}.\end{aligned}\right.$$

ute que les formules (35), (36), et toutes celles que peuvent fournir les divers
mes des valeurs de α, β, γ propres à vérifier l'équation (17), coïncident avec la
ule (32), et déterminent les mêmes systèmes de valeurs de x, y, z, toutes les
qu'elles ne reproduisent pas la solution connue $x=a$, $y=b$, $z=c$. C'est ce
l'on démontrera sans peine, à l'aide des considérations suivantes.

l'on désigne par Δ le plus grand commun diviseur des trois quantités u, v, w,

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a(Bb^3 - Cc^3),\\ y &= b(Cc^3 - Aa^3),\\ z &= c(Aa^3 - Bb^3).\end{aligned}\right.$$

Exemple. On vérifie l'équation

$$(28)\qquad x^3 + 5y^3 - 4z^3 = 0,$$

en prenant

$$x = a = 3, \qquad y = b = 1, \qquad z = c = 2.$$

Cela posé, on tirera des formules (27) une nouvelle solution, savoir

$$x = 111, \qquad y = -59, \qquad z = 44.$$

De cette seconde solution on en déduirait facilement une troisième, et ainsi de suite.

Revenons maintenant au cas général où les quantités entières D, E, F, G, H, I, K, renfermées dans le premier membre de l'équation (1), conservent des valeurs différentes de zéro. Alors cette équation sera vérifiée par les valeurs de x, y, z tirées ou des formules (11), ou de la seule formule

$$(29)\qquad \frac{x}{as - t\alpha} = \frac{y}{bs - t\beta} = \frac{z}{cs - t\gamma},$$

pourvu que, les quantités s, t étant déterminées par les équations (18), α, β, γ satisfassent à l'équation

$$(17)\qquad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

Or, on vérifie cette dernière, en prenant

$$(30)\qquad \alpha = 0, \qquad \beta = w, \qquad \gamma = -v.$$

On pourra donc supposer

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} s &= \mathrm{F}(0, w, -v) = \frac{w\mathrm{X}(0, w, -v) - v\Psi(0, w, -v)}{3},\\ t &= a\Phi(0, w, -v) + b\mathrm{X}(0, w, -v) + c\Psi(0, w, -v);\end{aligned}\right.$$

et par suite la formule (29) donnera

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{x}{aF(0,w,-v)} \\ = & \frac{y}{bF(0,w,-v)-w[a\Phi(0,w,-v)+b\mathrm{X}(0,w,-v)+c\Psi(0,w,-v)]} \\ = & \frac{z}{cF(0,w,-v)+v[a\Phi(0,w,-v)+b\mathrm{X}(0,w,-v)+c\Psi(0,w,-a)]}. \end{aligned} \right.$$

On vérifiera encore l'équation (17), en prenant

$$(33)\qquad \alpha = -w, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = u,$$

ou

$$(34)\qquad \alpha = v, \qquad \beta = -u, \qquad \gamma = 0;$$

puis on tirera de la formule (29), dans la première hypothèse,

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{x}{aF(-w,0,u)+w[a\Phi(-w,0,u)+b\mathrm{X}(-w,0,u)+c\Psi(-w,0,u)]} \\ & = \frac{y}{bF(-w,0,u)} \\ = & \frac{z}{cF(-w,0,u)-u[a\Phi(-w,0,u)+b\mathrm{X}(-w,0,u)+c\Psi(-w,0,u)]}, \end{aligned} \right.$$

et, dans la seconde hypothèse,

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{x}{aF(v,-u,0)-v[a\Phi(v,-u,0)+b\mathrm{X}(v,-u,0)+c\Psi(v,-u,0)]} \\ = & \frac{y}{bF(v,-u,0)+u[a\Phi(v,-u,0)+b\mathrm{X}(v,-u,0)+c\Psi(v,-u,0)]} \\ & = \frac{z}{cF(v,-u,0)}. \end{aligned} \right.$$

J'ajoute que les formules (35), (36), et toutes celles que peuvent fournir les divers systèmes des valeurs de α, β, γ propres à vérifier l'équation (17), coïncident avec la formule (32), et déterminent les mêmes systèmes de valeurs de x, y, z, toutes les fois qu'elles ne reproduisent pas la solution connue $x=a$, $y=b$, $z=c$. C'est ce que l'on démontrera sans peine, à l'aide des considérations suivantes.

Si l'on désigne par Δ le plus grand commun diviseur des trois quantités u, v, w,

les valeurs générales de α, β, γ propres à vérifier l'équation (17), ou, ce qui revient au même, la formule

$$(37) \qquad \frac{u}{\Delta}\alpha+\frac{v}{\Delta}\beta+\frac{w}{\Delta}\gamma=0$$

seront [voyez le 2.e paragraphe]

$$(38) \qquad \alpha=\frac{v}{\Delta}r-\frac{w}{\Delta}n, \quad \beta=\frac{w}{\Delta}m-\frac{u}{\Delta}r, \quad \gamma=\frac{u}{\Delta}n-\frac{v}{\Delta}m,$$

m, n, r désignant trois nombres entiers quelconques. On aura par suite

$$(39) \qquad \frac{b\gamma-c\beta}{u}=\frac{c\alpha-a\gamma}{v}=\frac{a\beta-b\alpha}{w}=\frac{am+bn+cr}{\Delta};$$

et l'on en conclura

$$(40) \qquad \beta=\frac{\alpha}{a}b+\frac{w}{a\Delta}(am+bn+cr), \quad \gamma=\frac{\alpha}{a}c-\frac{v}{a\Delta}(am+bn+cr).$$

Cela posé, les valeurs de x, y, z déterminées par les formules (11) deviendront

$$(41) \qquad \left\{\begin{array}{l} x=a\left(s-t\frac{\alpha}{a}\right), \\ y=b\left(s-t\frac{\alpha}{a}\right)-w\frac{t}{a}\,\frac{am+bn+cr}{\Delta}, \\ z=c\left(s-t\frac{\alpha}{a}\right)+v\frac{t}{a}\,\frac{am+bn+cr}{\Delta}. \end{array}\right.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$(42) \qquad s-t\frac{\alpha}{a}=S, \quad \frac{am+br+cr}{a\Delta}t=T,$$

on aura simplement

$$(43) \qquad x=aS, \quad y=bS-wT, \quad z=cS+vT.$$

On prouverait de même que la formule (29) peut être réduite à

$$(44) \qquad \frac{x}{aS}=\frac{y}{bS-wT}=\frac{z}{cS+vT}.$$

Or, comme les valeurs de x, y, z tirées des formules (43) ou (44) doivent satisfaire à l'équation (1) ou (12), on aura nécessairement

(45) $$F(aS,\ bS - wT,\ cS + vT) = 0.$$

D'ailleurs, si l'on développe le premier membre de la formule (45) suivant les puissances ascendantes de T, on en conclura

(46) $$\left\{\begin{array}{l} S^3 F(a,b,c) + S^2 T\,[w\,X(a,b,c) - v\,\Psi(a,b,c)] \\ + ST^2[a\Phi(0,w,-v) + b\,X(0,w,-v) + c\Psi(0,w,-v)] - T^3 F(0,w,-v) = 0; \end{array}\right.$$

et, puisqu'en vertu des équations

$$F(a,b,c) = 0, \qquad v = X(a,b,c), \qquad w = \Psi(a,b,c),$$

les coëfficients de S^3 et de $S^2 T$ s'évanouissent d'eux-mêmes dans la formule (46), on en tirera

(47) $$T = 0,$$

ou

(48) $$\frac{S}{F(0,w,-v)} = \frac{T}{a\Phi(0,w,-v) + bX(0,w,-v) + c\Psi(0,w,-v)}.$$

L'équation (47) réduit la formule (44) à

(49) $$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

et reproduit la solution connue $x = a$, $y = b$, $z = c$, avec celles que l'on en tire lorsqu'on fait croître x, y, z dans le même rapport. Quant à l'équation (48), elle réduit évidemment la formule (44) à l'équation (32).

On pourrait démontrer directement la coïncidence des formules (32), (35) et (36). On a en effet

$$a^3 F(-w, a, u) = F(-aw, 0, au) = F(-aw, -bw + bw, -cw - bv);$$

puis, on en conclut, en développant la fonction

$$F(-aw, -bw + bw, -cw - bv)$$

de la même manière qu'on a développé le premier membre de la formule (45),

(50) $$\left\{\begin{array}{l} a^3 F(-w, 0, u) = b^3 F(0, w, -v) \\ - b^2 w\,[a\Phi(0,w,-v) + b\,X(0,w,-v) + c\Psi(0,w,-v)]. \end{array}\right.$$

On établirait avec la même facilité, non-seulement l'équation

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} a^3F(v,-u,o) &= c^3F(o,w,-v)\\ &+ c^2v[a\Phi(o,w,-v)+b\mathrm{X}(o,w,-v)+c\Psi(o,w,-v)], \end{aligned}\right.$$

mais encore quatre autres équations de même espèce comprises dans la formule

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{c^3F(-w,o,u)-b^3F(v,-u,o)}{b^2c^2u}=\frac{a^3F(v,-u,o)-c^3F(o,u,-v)}{c^2a^2v}=\frac{b^3F(o,w,-v)-a^3F(-v,o,u)}{a^2b^2w}\\ &=\frac{1}{a^2}[a\Phi(o,w,-v)+b\mathrm{X}(o,w,-v)+c\Psi(o,w,-v)]\\ &=\frac{1}{b^2}[a\Phi(-w,o,u)+b\mathrm{X}(-w,o,u)+c\Psi(-w,o,u)]\\ &=\frac{1}{c^2}[a\Phi(v,-u,o)+b\mathrm{X}(v,-u,o)+c\Psi(-v,u,o)]. \end{aligned}\right.$$

Or, il résulte évidemment de cette dernière que les équations (32), (35), (36) coïncident entre elles, et que chacune d'elles peut être remplacée par la suivante

$$(53)\quad \frac{a^2x}{F(o,w,-v)}=\frac{b^2y}{F(-w,o,u)}=\frac{c^2z}{F(v,-u,o)}.$$

Donc, si les quantités a, b, c vérifient l'équation homogène et du troisième degré,

$$(16)\quad F(a,b,c)=o,$$

alors, en prenant

$$(14)\quad u=\Phi(a,b,c),\quad v=\mathrm{X}(a,b,c),\quad w=\Psi(a,b,c),$$

on aura encore

$$(54)\quad F\left\{\frac{F(o,w,-v)}{a^2},\ \frac{F(-w,o,u)}{b^2},\ \frac{F(v,-u,o)}{c^2}\right\}=o.$$

Si l'on supposait $D=o$, $E=o$, $F=o$, $G=o$, $H=o$, $I=o$, c'est-à-dire en d'autres termes, si l'équation proposée était

$$(55)\quad Ax^3+By^3+Cz^3+Kxyz=o,$$

on trouverait

(56) $$v = 3Bb^2 + Kca, \qquad w = 3Cc^2 + Kab,$$

(57) $$\left\{\begin{aligned} F(0, w, -v) &= Bw^3 - Cv^3 = a^3(27ABC + K^3)(Bb^3 - Cc^3), \\ F(-w, 0, u) &= Cu^3 - Aw^3 = b^3(27ABC + K^3)(Cc^3 - Aa^3), \\ F(v, -u, 0) &= Av^3 - Bu^3 = c^3(27ABC + K^3)(Aa^3 - Bb^3), \end{aligned}\right.$$

et par suite la formule (53) donnerait

(58) $$\frac{x}{a(Bb^3 - Cc^3)} = \frac{y}{b(Cc^3 - Aa^3)} = \frac{z}{c(Aa^3 - Bb^3)},$$

comme dans le cas particulier où l'on supposait $K = 0$.

Exemple. On vérifie l'équation

(59) $$x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 6xyz,$$

en prenant

$$x = a = 1, \qquad y = b = 1, \qquad z = c = 1;$$

et, en partant de cette première solution, on tire de la formule (58)

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}.$$

On peut donc prendre pour seconde solution

$$x = -1, \qquad y = 2, \qquad z = -1.$$

On a effectivement

$$-1 + 2.2^3 - 3 = 12 = 6.2.$$

En partant de la seconde solution, on trouvera

$$\frac{x}{-19} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{17}.$$

On pourra donc prendre pour troisième solution

$$x = -19, \qquad y = -4, \qquad z = 17.$$

On a effectivement

$$-19^3 - 2.4^3 + 3.17^3 = 7752 = 6.19.4.17.$$

En partant de la troisième solution, on en trouvera facilement une quatrième, savoir,

$$x = 282473, \qquad y = -86392, \qquad z = -114427,$$

et ainsi de suite.

Euler a remarqué que l'équation

(60) $$x^3+y^3=(a^3+b^3)z^3,$$

à laquelle on satisfait en prenant

$$x=a, \qquad y=b, \qquad z=1,$$

se trouve également vérifiée quand on suppose

(61) $$x=a(a^3+2b^3), \qquad y=-b(b^3+2a^3), \qquad z=a^3-b^3.$$

Pour tirer ces valeurs de $x, y, z,$ de la formule (58), il suffit de réduire l'équation (55) à l'équation (60), en posant

$$A=1, \qquad B=1, \qquad C=-(a^3+b^3), \qquad K=0.$$

Alors en effet la formule (58) devient

(62) $$\frac{x}{a(a^3+2b^3)}=\frac{y}{-b(b^3+2a^3)}=\frac{z}{a^3-b^3},$$

et l'on satisfait à cette dernière pour les valeurs dont il s'agit.

Lorsqu'en suivant la méthode ci-dessus exposée, on a déduit d'une solution connue de l'équation (1) d'autres solutions différentes de la première, on peut en découvrir de nouvelles, à l'aide des considérations que nous allons présenter.

Soient

$$x=a, \qquad y=b, \qquad z=c;$$

et

$$x=\alpha, \qquad y=\beta, \qquad z=\gamma,$$

deux solutions distinctes de l'équation (1) ou (12.) Pour trouver une troisième solution, il suffira de fixer les valeurs de x, y, z par le moyen de la formule (29), et d'assujettir les quantités s, t à vérifier la formule (13), que les deux équations

$$\mathrm{F}(a,b,c)=0, \qquad \mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma)=0$$

réduisent simplement à

(63) $$st\left\{\begin{array}{c}[\alpha\Phi(a,b,c)+\beta\mathrm{X}(a,b,c)+\gamma\Psi(a,b,c)]s\\ -[a\Phi(\alpha,\beta,\gamma)+b\mathrm{X}(\alpha,\beta,\gamma)+c\Psi(\alpha,\beta,\gamma)]t\end{array}\right\}=0.$$

Or on satisfait à cette dernière, 1.° en prenant

$$s=0, \qquad \text{ou} \qquad t=0;$$

2.° en supposant

(64) $$\frac{s}{a\Phi(\alpha,\beta,\gamma)+b\mathrm{X}(\alpha,\beta,\gamma)+c\Psi(\alpha,\beta,\gamma)}=\frac{t}{\alpha\Phi(a,b,c)+\beta\mathrm{X}(a,b,c)+\gamma\Psi(a,b,c)}.$$

Les deux premières suppositions reproduisent les solutions connues. Mais la dernière fournit des solutions nouvelles comprises dans la formule

(65) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{x}{a[a\Phi(\alpha,\beta,\gamma)+b\mathrm{X}(\alpha,\beta,\gamma)+c\Psi(\alpha,\beta,\gamma)]-\alpha[\alpha\Phi(a,b,c)+\beta\mathrm{X}(a,b,c)+\gamma\Psi(a,b,c)]}\\ =&\frac{y}{b[a\Phi(\alpha,\beta,\gamma)+b\mathrm{X}(\alpha,\beta,\gamma)+c\Psi(\alpha,\beta,\gamma)]-\beta[\alpha\Phi(a,b,c)+\beta\mathrm{X}(a,b,c)+\gamma\Psi(a,b,c)]}\\ =&\frac{z}{c[a\Phi(\alpha,\beta,\gamma)+b\mathrm{X}(\alpha,\beta,\gamma)+c\Psi(\alpha,\beta,\gamma)-\gamma[\alpha\Phi(a,b,c)+\beta\mathrm{X}(a,b,c)+\gamma\Psi(a,b,c)]}.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier où les quantités D, E, F, G, H, I s'évanouissent, la formule (65) se réduit à

(66) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{x}{3Bb\beta(a\beta-\alpha b)+3Cc\gamma(a\gamma-\alpha c)+K(a^2\beta\gamma-\alpha^2bc)}\\ =&\frac{y}{3Cc\gamma(b\gamma-\beta c)+3Aa\alpha(b\alpha-\beta a)+K(b^2\gamma\alpha-\beta^2ca)}\\ =&\frac{z}{3Aa\alpha(c\alpha-\gamma a)+3Bb\beta(c\beta-\gamma b)+K(c^2\alpha\beta-\gamma^2ab)}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on applique cette dernière à la résolution de l'équation (59), en partant de deux solutions déjà indiquées, savoir

$$x=a=1,\qquad y=b=1,\qquad z=c=1,$$

et

$$x=\alpha=-19,\quad y=\beta=-4,\quad z=\gamma=17,$$

on trouvera

$$\frac{x}{143}=\frac{y}{113}=\frac{z}{71}.$$

Par conséquent on résoudra encore l'équation (59) en prenant

$$x=143,\quad y=113,\quad z=71.$$

On a effectivement

$$143^3+2.113^3+3.71^3=6883734=6.71.113.143.$$

Il importe de remarquer que, si la solution

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma$$

coïncidait avec la première de celles que l'on déduit par l'autre méthode de la solution primitive

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

la formule (65) reproduirait cette même solution primitive, et non point une solution nouvelle.

En terminant ce paragraphe, nous ferons observer que, si les quantités a, b, c cessaient de vérifier l'équation (16), alors, en supposant toujours les quantités u, v, w déterminées par les formules (14), et les quantités x, y, z par les formules (11), (18) et (38), on trouverait

$$(67) \qquad F(x, y, z) = s^3 F(a, b, c),$$

ou, en d'autres termes,

$$(68) \qquad F(x, y, z) = F(a, b, c) . [F(\alpha, \beta, \gamma)]^3,$$

et par conséquent

$$(69) \qquad F(x, y, z) = F(a, b, c) \left\{ F\left(\frac{vr - wn}{\Delta}, \frac{wm - ur}{\Delta}, \frac{un - vm}{\Delta}\right) \right\}^3.$$

Cela posé, il est clair que, si l'on parvient à découvrir divers systèmes de valeurs de m, n, r propres à vérifier l'équation du troisième degré

$$(70) \qquad F\left(\frac{vr - wn}{\Delta}, \frac{wm - ur}{\Delta}, \frac{un - vm}{\Delta}\right) = 1,$$

chacun de ces systèmes fournira une solution correspondante de l'équation

$$(71) \qquad F(x, y, z) = F(a, b, c).$$

Dans un autre article nous montrerons le parti qu'on peut tirer des formules semblables à la formule (29), pour résoudre en nombres entiers des équations homogènes entre plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ quel que soit le nombre de ces mêmes variables.



APPLICATION DU CALCUL DES RÉSIDUS

A L'INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS VARIABLES.

Proposons-nous d'abord d'intégrer l'équation différentielle

$$(1)\quad \frac{d^ny}{dx^n}+\frac{a_1}{Ax+B}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{a_2}{(Ax+B)^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{(Ax+B)^{n-1}}\frac{dy}{dx}+\frac{a_n}{(Ax+B)^n}y=0,$$

dans laquelle $A, B, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ désignent des quantités constantes; et faisons, pour abréger,

$$(2)\quad \mathrm{F}(r)=A^nr(r-1)\ldots(r-n+1)+a_1A^{n-1}r(r-1)\ldots(r-n+2)+\ldots\ldots+a_{n-1}Ar+a_n.$$

Il est clair que, pour satisfaire à l'équation (1), il suffira de prendre

$$(3)\quad y=\mathcal{E}\,\frac{\varphi(r).(Ax+B)^r}{((\mathrm{F}(r)))},$$

$\varphi(r)$ désignant une fonction arbitraire de r qui ne devienne pas infinie pour des valeurs de r propres à vérifier la formule

$$(4)\quad \mathrm{F}(r)=0.$$

Effectivement, si l'on substitue la valeur précédente de y dans le premier membre de l'équation (1), ce premier membre se trouvera réduit à

$$(5)\quad \mathcal{E}\,\frac{\mathrm{F}(r).\varphi(r).(Ax+B)^{r-n}}{((\mathrm{F}(r)))}=0.$$

D'ailleurs, les valeurs de $\varphi(r), \varphi'(r)$, etc...., qui correspondent aux diverses racines égales ou inégales de l'équation (4), pouvant être choisies arbitrairement, il est aisé de reconnaître que la valeur de y, fournie par l'équation (3), renfermera un

nombre n de constantes arbitraires. Donc, l'équation (3) sera l'intégrale générale de l'équation (1).

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(6)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a_1}{Ax+B}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{a_2}{(Ax+B)^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(Ax+B)^{n-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{a_n}{(Ax+B)^n}y = f(x).$$

On posera

$$(7)\qquad y = \mathcal{E}\,\frac{\psi(r,x)\,.\,(Ax+B)^r}{((\mathrm{F}(r)))}\,.$$

Pour que les dérivées de cette dernière valeur de y, depuis la dérivée du premier ordre jusqu'à celle de l'ordre $n-1$, conservent la forme qu'elles prendraient si l'on remplaçait $\psi(r,x)$ par $\varphi(r)$, il suffira d'admettre que l'on a, pour toutes les valeurs entières de m inférieures à $n-1$,

$$(8)\qquad \mathcal{E}\,(Ax+B)^{r-m}\,\frac{d\psi(r,x)}{dx}\,\frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{((\mathrm{F}(r)))} = 0.$$

Ajoutons que, si cette condition est remplie, on tirera de l'équation (6), en y substituant la valeur de y donnée par la formule (7),

$$(9)\qquad A^{n-1}\,\mathcal{E}\,(Ax+B)^{r-n+1}\,\frac{d\psi(r,x)}{dx}\,\frac{r(r-1)\ldots(r-n+2)}{((\mathrm{F}(r)))} = f(x).$$

Toute la question se réduit donc à déterminer la fonction $\psi(r,x)$ de manière qu'elle vérifie les équations (8) et (9). Or, comme on aura généralement [en vertu de la formule (63) de la page 23], et en prenant $m < n-1$,

$$(10)\qquad \mathcal{E}\,\frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{((\mathrm{F}(r)))} = 0\,,$$

$$(11)\qquad A^n\,\mathcal{E}\,\frac{r(r-1)\ldots(r-n+2)}{((\mathrm{F}(r)))} = 1\,,$$

il est clair que les conditions (8) et (9) seront remplies, si l'on suppose

$$(12)\qquad (Ax+B)^{r-n+1}\,\frac{d\psi(r,x)}{dx} = Af(x)\,,$$

ou, ce qui revient au même,

(13) $$\psi(r,x) = A\int_{x_0}^{x} (Az+B)^{n-r-1} f(z)\,dz + \varphi(r),$$

x_0 désignant une valeur particulière de x, et $\varphi(r)$ une fonction arbitraire de r. Par suite, l'équation (7) donnera

(14) $$y = \mathcal{E}\,\frac{\varphi(r).(Ax+B)^r}{((F(r)))} + A\,\mathcal{E}\,\frac{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{Ax+B}{Az+B}\right)^r (Az+B)^{n-1} f(z)\,dz}{((F(r)))}.$$

Cette dernière formule est précisément l'intégrale générale de l'équation (1).

Exemple. Si l'équation (6) se réduit à

(15) $$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x+1}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{(x+1)^2} = f(x),$$

on trouvera

$$F(r) = r(r-1) - r + 1 = (r-1)^2,$$

et la formule (14) donnera

(16) $$y = \mathcal{E}\,\frac{\varphi(r).(x+1)^r}{(((r-1)^2))} + \mathcal{E}\,\frac{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{x+1}{z+1}\right)^r (z+1) f(z)\,dz}{(((r-1)^2))}$$

$$= (x+1)\left\{\varphi'(1) + \varphi(1)\,\mathrm{l}(x+1) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{l}\left(\frac{x+1}{z+1}\right).f(z)\,dz\right\}.$$

Donc, en désignant par $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ les constantes arbitraires $\varphi(1)$, $\varphi'(1)$, on aura

(17) $$y = (x+1)\left\{\mathcal{C}' + \mathcal{C}\,\mathrm{l}(x+1) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{l}\left(\frac{x+1}{z+1}\right).f(z)\,dz\right\}.$$

Il est bon d'observer que, pour transformer les équations (1) et (6) en équations différentielles linéaires à coëfficients constants, il suffit d'effectuer un changement de variable indépendante, et de poser

(18) $$Ax + B = e^t.$$

Si l'on transforme ainsi l'équation (15), en prenant

$$(19) \qquad x+1=e^t,$$

cette équation deviendra

$$(20) \qquad \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=e^{2t}f(e^t-1),$$

et son intégrale générale, donnée par la formule (14) de la page 204, sera

$$(21) \qquad y=e^t(\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}t)+\int_{t_0}^{t}(t-s)e^{t+s}f(e^s-1)\,ds,$$

t_0 désignant une valeur particulière de t, et s une variable auxiliaire. Si maintenant on a égard à la formule (19), et si l'on substitue à la variable s une autre variable z déterminée en fonction de s par l'équation

$$(22) \qquad z+1=e^s,$$

la valeur précédente de y se réduira évidemment à celle que présente la formule (17).



DÉMONSTRATION

DU THÉORÈME GÉNÉRAL DE FERMAT

SUR LES NOMBRES POLYGONES.

(*Extrait des Mémoires de l'Institut.*)

EXPOSITION.

Le théorême dont il s'agit consiste en ce que tout nombre entier peut être formé par l'addition de trois triangulaires, de quatre quarrés, de cinq pentagones, de six hexagones, et ainsi de suite. Les deux premières parties de ce théorême, savoir, que tout nombre entier est la somme de trois triangulaires et de quatre quarrés, sont les seules qui aient été démontrées jusqu'à présent, ainsi qu'on peut le voir dans la *Théorie des nombres* de M. Legendre, et dans l'ouvrage de M. Gauss, qui a pour titre : *Disquisitiones arithmeticæ.* J'établis, dans ce Mémoire, la démonstration de toutes les autres, et je fais voir, en outre, que la décomposition d'un nombre entier en cinq pentagones, six hexagones, sept heptagones, etc., peut toujours être effectuée de manière que les divers nombres polygones en question, à l'exception de quatre, soient égaux à zéro, ou à l'unité. On peut donc énoncer en général le théorême suivant.

Tout nombre entier est égal à la somme de quatre pentagones, ou à une semblable somme augmentée d'une unité; à la somme de quatre hexagones, ou à une semblable somme augmentée d'une ou de deux unités, à la somme de quatre heptagones, ou à une semblable somme augmentée d'une, de deux ou de trois unités; et ainsi de suite.

La démonstration de ce théorême est fondée sur la solution du problême suivant.

Décomposer un nombre entier donné en quatre quarrés dont les racines fassent une somme donnée.

Je réduis ce dernier problême à la décomposition d'un nombre entier donné en trois quarrés, en faisant voir que, si un nombre entier est décomposable en quatre quarrés

dont les racines fassent une somme donnée, le quadruple de ce même nombre est décomposable en quatre quarrés dont l'un a pour racine la somme dont il s'agit. Il est aisé d'en conclure que le problême proposé ne peut être résolu que dans le cas où le quarré de la somme est inférieur au quadruple de l'entier que l'on considère, et où la différence de ces deux nombres est décomposable en trois quarrés; ce qui a lieu exclusivement, lorsque cette différence, divisée par la plus haute puissance de 4 qui s'y trouve contenue, n'est pas un nombre impair dont la division par 8 donne 7 pour reste. Si aux deux conditions précédentes on ajoute celle que le nombre entier et la somme donnée soient de même espèce, c'est-à-dire tous deux pairs, ou tous deux impairs, on aura trois conditions qui devront être remplies, pour qu'on puisse résoudre le problême dont il s'agit. Mais on ne doit pas en conclure que la solution soit possible toutes les fois qu'on pourra satisfaire à ces mêmes conditions. Pour qu'on soit assuré d'obtenir une solution, il faut en outre, et il suffit, que la somme donnée soit supérieure, ou égale, ou inférieure au plus d'une unité à une certaine limite dont le quarré augmenté de 2 équivaut au triple du nombre donné.

En appliquant ces principes aux nombres impairs, ou impairement pairs, on reconnaît facilement que tout nombre entier impair, ou divisible une fois seulement par 2, peut être décomposé en quatre quarrés, dont les racines fassent une somme donnée, toutes les fois que cette somme est un nombre de même espèce compris entre deux limites dont les quarrés sont respectivement le triple et le quadruple du nombre donné.

On démontre avec la même facilité que tout nombre entier, quel qu'il soit, peut être décomposé en quatre quarrés, de manière que la somme des racines soit comprise entre les deux limites qu'on vient d'énoncer. On doit seulement excepter, parmi les nombres impairs, les suivants

$$1,\ 5,\ 9,\ 11,\ 17,\ 19,\ 29,\ 41;$$

et parmi les nombres pairs tous ceux qui, divisés par une puissance impaire de 2, donnent pour quotient un des nombres premiers

$$1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 17.$$

A l'aide de ces propositions et de quelques autres semblables, on parvient sans peine, non-seulement à prouver que tout nombre entier est décomposable en cinq pentagones, six hexagones, etc....; mais encore à effectuer cette décomposition de telle sorte que les nombres composants soient tous, à l'exception de quatre, égaux à zéro ou à l'unité.

ANALYSE.

Si l'on désigne par m et t deux nombres entiers quelconques, le terme général des nombres polygones de l'ordre $m+2$ sera, comme l'on sait,

$$(1) \qquad m\left(\frac{t^2-t}{2}\right)+t.$$

Si dans cette formule on fait successivement $m=2$, $m=3$, etc..., on obtiendra les termes généraux des nombres triangulaires, quarrés, pentagones, hexagones, etc., qui seront respectivement

$$\frac{t^2+t}{2}, \quad t^2, \quad \frac{t(3t-1)}{2}, \quad 2t^2-t, \quad \text{etc.}$$

De plus on doit remarquer que les deux plus petites valeurs de la formule (1) correspondantes à $t=0$, $t=1$, sont, pour toutes les valeurs possibles de m, 0 et 1; en sorte que zéro et l'unité font partie de chaque suite de nombres polygones. Cela posé, je vais démontrer, relativement à ces mêmes nombres le théorême général de Fermat. Comme la chose est déjà faite pour les nombres triangulaires et les quarrés, il suffira de prouver le théorême à l'égard des autres nombres polygones. On y parvient à l'aide de quelques propositions subsidiaires que je vais commencer par établir.

Théorême 1.er *Soit* a *un nombre entier quelconque, et* 4^α *la plus haute puissance de* 4 *qui puisse diviser* a *: pour que l'on puisse résoudre en nombres entiers* x, y, z, *l'équation*

$$(1) \qquad a=x^2+y^2+z^2,$$

il sera nécessaire, et il suffira que le quotient $\frac{a}{4^\alpha}$ *ne soit pas de la forme* $8n+7$.

Démonstration. On sait en effet que l'équation (1) peut être résolue toutes les fois que a est de l'une des formes $4n+1$, $4n+2$, $8n+3$; et qu'elle ne peut l'être, lorsque a est de la forme $8n+7$. De plus, si a est divisible par 4, x, y, z seront nécessairement pairs; et si l'on fait en conséquence $x=2x'$, $y=2y'$, $z=2z'$, l'équation (1) deviendra

$$\frac{a}{4}=x'^2+y'^2+z'^2.$$

Si a est divisible deux fois par 4; x', y', z', dans l'équation précédente, seront nécessairement pairs; et par suite x, y, z seront divisibles deux fois par 2. En général,

si a est divisible par 4^α, x, y, z devront être divisibles par 2^α; et si l'on fait en conséquence

$$x = 2^\alpha x_{,}, \qquad y = 2^\alpha y_{,}, \qquad z = 2^\alpha z_{,},$$

l'équation (1) deviendra

$$\frac{a}{4^\alpha} = x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2. \tag{2}$$

Si donc $\frac{a}{4^\alpha}$ n'est plus divisible par 4, on pourra toujours résoudre l'équation (2), et par suite l'équation (1); à moins toutefois que $\frac{a}{4^\alpha}$ ne soit de la forme $8n+7$; auquel cas les deux équations dont il s'agit deviendraient insolubles.

Corollaire 1.[er] On déduit facilement du théorême précédent une condition à laquelle doivent satisfaire deux nombres donnés k et s, pour que l'on puisse décomposer le premier de ces deux nombres, k, en quatre quarrés dont les racines fassent une somme égale à s. En effet, supposons que l'on parvienne à résoudre simultanément en nombres entiers les deux équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} k = t^2 + u^2 + v^2 + w^2, \\ s = t + u + v + w. \end{array} \right.$$

On aura évidemment

$$4k = (t+u+v+w)^2 + (t+u-v-w)^2 + (t-u+v-w)^2 + (t-u-v+w)^2;$$

et par suite

$$4k - s^2 = (t+u-v+w)^2 + (t-u+v-w)^2 + (t-u-v+w)^2. \tag{4}$$

On pourra donc alors décomposer $4k-s^2$ en trois quarrés, et en conséquence $4k-s^2$ ne pourra être de la forme

$$4^x(8n+7).$$

De plus, les deux nombres k et s devant toujours être de même espèce, c'est-à-dire tous deux pairs, ou tous deux impairs; si k est un nombre pair, $4k-s^2$ sera divisible par 4, et l'équation (4) ne pourra subsister, à moins que les trois nombres $t+u-v-w$, $t-u+v-w$, $t-u-v+w$ ne soient divisibles par 2. Dans la même hypothèse, cette équation deviendra

$$k-\left(\frac{1}{2}s\right)^2=\left(\frac{t+u-v-w}{2}\right)^2+\left(\frac{t-u+v-w}{2}\right)^2+\left(\frac{t-u-v+w}{2}\right)^2;$$

et par suite

$$k-\left(\frac{1}{2}s\right)^2,$$

étant décomposable en trois quarrés, ne pourra être de la forme

$$4^a(8n+7).$$

En résumant ce qu'on vient de dire, on obtiendra les propositions suivantes :

Si k *est un nombre entier décomposable en quatre quarrés dont les racines fassent une somme égale à* s, $4k$ *pourra être décomposé en quatre quarrés dont l'un soit* s^2.

Si k *est un nombre pair décomposable en quatre quarrés dont les racines fassent une somme égale à* s, *il sera également décomposable en quatre quarrés dont l'un soit* $\left(\frac{1}{2}s\right)^2$

Dans tous les cas possibles, la valeur de $4k-s^2$ *sera positive, et ne pourra être de la forme* $4^a(8n+7)$.

Ainsi, pour que le nombre k puisse être décomposé en quatre quarrés dont les racines fassent une somme égale à s, il est nécessaire que s soit un nombre de même espèce que k, inférieur à $\sqrt{4k}$, et ne soit pas de la forme

$$4^a(8n+7).$$

Lorsque s satisfait aux trois conditions précédentes, on ne doit pas toujours en conclure que la décomposition soit possible. Elle le sera en effet, si la valeur de s satisfait encore à une quatrième condition, celle de surpasser $\sqrt{3k}$, ou même $\sqrt{(3k-2)}-1$, comme on le verra ci-après [théorèmes 3.e et 4.e].

2.e Théorème. *Si les trois nombres* x, y, z *satisfont à l'équation*

$$a=x^2+y^2+z^2, \qquad (1)$$

la somme de ces trois nombres sera nécessairement comprise entre les limites

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt{3a}.$$

Démonstration. En effet, on a évidemment

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz > x^2+y^2+z^2 = a\,,$$

$$(x+y+z)^2 < (x+y+z)^2+(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 = 3a\,;$$

d'où l'on conclut en extrayant les racines quarrées

$$x+y+z > \sqrt{a}$$

$$x+y+z < \sqrt{3a}\,.$$

Corollaire 1.er Il est bon d'observer que, dans le théorême précédent, les signes $<$ et $>$ n'excluent pas l'égalité. En effet, $x+y+z$ devient égal à $\sqrt{a}$, lorsqu'on suppose $y=0$, $z=0$; et à $\sqrt{3a}$, lorsque $x=y=z$. En général, si la somme de n quarrés différents est égale à a, la somme des racines sera comprise entre $\sqrt{a}$ et $\sqrt{na}$. Cette dernière somme atteindra la limite inférieure $\sqrt{a}$, si toutes les racines sont nulles, à l'exception d'une seule; et la limite supérieure $\sqrt{na}$, si toutes les racines sont égales entre elles. C'est ce qu'il est facile de démontrer, soit par la méthode qu'on vient d'employer, soit par la théorie des *maxima* des fonctions de plusieurs variables.

3.e Théorême. *Soit* k *un nombre pair pris à volonté, et* s *un autre nombre pair compris entre les limites*

$$\sqrt{3k-1}\,, \qquad \sqrt{4k}\,.$$

On pourra toujours résoudre simultanément en nombres entiers les deux équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} k &= t^2+u^2+v^2+w^2\,, \\ s &= t+u+v+w\;; \end{aligned} \right.$$

à moins que

$$k-\left(\frac{1}{2}s\right)^2$$

ne soit de la forme

$$4^{\alpha}(8n+7)\,,$$

Démonstration. En effet, si $k-\left(\frac{1}{2}s\right)^2$ n'est pas de la forme $4^{\alpha}(8n+7)$, on pourra toujours [voyez le théorême 1.er] résoudre en nombres entiers l'équation

$$(2) \qquad k-\left(\frac{1}{2}s\right)^2 = x^2+y^2+z^2\,,$$

pourvu que l'on ait $k < \left(\frac{1}{2}s\right)^2$, ou, $s < \sqrt{4k}$. Si de plus s est supérieur à

$$\sqrt{(3k-2)}-1,$$

on aura réciproquement

$$3k < s^2+2s+3.$$

D'ailleurs, en vertu du théorême précédent, on tire de l'équation (2)

$$x+y+z < \sqrt{\left(3k-\frac{3}{4}s^2\right)}.$$

Donc à *fortiori*

$$x+y+z < \sqrt{\left(s^2+2s+3-\frac{3}{4}s^2\right)} < \frac{1}{2}s+2. \tag{3}$$

De plus, k étant un nombre pair, il suit évidemment de l'équation (2) que les huit nombres entiers compris dans la formule

$$\frac{1}{2}s \pm x \pm y \pm z,$$

à raison des doubles signes, sont également pairs; ou, ce qui revient au même, que les huit nombres compris dans la formule

$$\frac{\frac{1}{2}s \pm x \pm y \pm z}{2}$$

sont des nombres entiers. Mais, en vertu de la condition (3), le plus petit de ces nombres, savoir :

$$\frac{\frac{1}{2}s-x-y-z}{2},$$

doit être supérieur à -1, c'est-à-dire nul ou positif. Les huit nombres entiers dont il s'agit seront donc tous nuls ou positifs. Cela posé, il est facile de voir qu'on satisfera en même temps aux deux équations (1), en attribuant à t, u, v, w les valeurs positives que fournissent l'un et l'autre des deux systèmes d'équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} t &= \frac{\frac{1}{2}s-x-y-z}{2}, & u &= \frac{\frac{1}{2}s-x+y+z}{2}, & v &= \frac{\frac{1}{2}s+x-y+z}{2}, & w &= \frac{\frac{1}{2}s+x+y-z}{2}, \\ t &= \frac{\frac{1}{2}s+x+y+z}{2}, & u &= \frac{\frac{1}{2}s+x-y-z}{2}, & v &= \frac{\frac{1}{2}s-x+y-z}{2}, & w &= \frac{\frac{1}{2}s-x-y+z}{2}, \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même, l'un et l'autre des systèmes suivants :

$$(5)\quad\begin{cases} t=\dfrac{\frac{1}{2}s-x-y-z}{2},\ u=t+y+z,\ v=t+x+z,\ w=t+x+y,\\[2ex] t=\dfrac{\frac{1}{2}s+x+y+z}{2},\ u=t-y-z,\ v=t-x-z,\ w=t-x-y.\end{cases}$$

Corollaire 1.er Lorsque

$$k-\left(\frac{1}{2}s\right)^2$$

est de la forme $4^a(8n+7)$, l'équation (2) ne peut être résolue en nombres entiers. Mais alors il devient impossible de résoudre simultanément les équations (1), ainsi qu'on l'a prouvé ci-dessus [théorême 1.er, corollaire 1.er].

Corollaire 2.e Lorsque k est un nombre impairement pair, c'est-à-dire de la forme

$$4n+2,$$

la quantité $k-\left(\frac{1}{2}s\right)^2$ est nécessairement de l'une des formes

$$4n+1,\qquad 4n+2;$$

savoir : de la forme $4n+1$, si $\frac{1}{2}s$ est un nombre impair, et de la forme $4n+2$, dans le cas contraire. On peut donc toujours alors résoudre les équations (1), pourvu que s soit un nombre pair compris entre les limites

$$\sqrt{(3k-2)}-1,\qquad \sqrt{4k}.$$

Exemple. Soit $k=30$; on trouvera

$$\sqrt{(3k-2)}-1=\sqrt{88}-1<9,\ \sqrt{4k}=\sqrt{120}>10;$$

et par suite on pourra supposer $s=10$. Pour déterminer les valeurs correspondantes de t, u, v, w, j'observe que

$$k-\left(\frac{1}{2}s\right)^2=30-25=5=2^2+1^2+0.$$

On aura donc, dans le cas présent,

$$x=2, \quad y=1, \quad z=0.$$

Cela posé, les quatre premières équations (5) donneront

$$t=1, \quad u=2, \quad v=3, \quad w=4.$$

On peut aisément vérifier ces valeurs. On trouve en effet

$$1^2+2^2+3^2+4^2=30,$$

$$1+2+3+4=10.$$

On doit observer que, dans le cas présent, les quatre dernières équations (5) fourniront pour les variables $t, u, v, w,$ les mêmes valeurs prises dans un ordre inverse, savoir,

$$t=4, \quad u=3, \quad v=2, \quad w=1.$$

Cette circonstance a évidemment lieu toutes les fois que $z=0$, ainsi qu'on peut s'en convaincre par la seule inspection des équations (4).

4.° Théorème. *Soit k un nombre impair pris à volonté, et s un autre nombre impair compris entre les limites*

$$\sqrt{3k-2}-1, \quad \sqrt{4k}.$$

On pourra toujours résoudre simultanément en nombres entiers les deux équations

(1) $$\begin{cases} k=t^2+u^2+v^2+w^2, \\ s=t+v+v+w. \end{cases}$$

Démonstration. En effet, $4k-s^2$ étant, dans la supposition qu'on vient de faire, de la forme

$$8n+3,$$

on pourra toujours résoudre en nombres entiers impairs $x, y, z,$ l'équation

(2) $$4k-s^2=x^2+y^2+z^2,$$

pourvu que l'on ait $s<\sqrt{4k}$. Si de plus s est supérieur à

$$\sqrt{3k-2}-1\,,$$

on aura réciproquement

$$3k < s^2+2s+3\,;$$

et l'on conclura du second théorême appliqué à l'équation (2)

$$x+y+z<\sqrt{(12k-3s^2)}<\sqrt{(s^2+8s+12)}<s+4\,;$$

ou, ce qui revient au même,

(3) $$\frac{s-x-y-z}{4}>-1.$$

Donc, *à fortiori*, chacun des huit nombres compris dans la formule

$$\frac{s\pm x\pm y\pm z}{4}$$

sera supérieur à -1; et par conséquent nul ou positif, s'il est entier. Cela posé, si $s-x-y-z$ est divisible par 4, on satisfera également aux deux équations (1), en supposant

$$t=\frac{s-x-y-z}{4},\quad u=\frac{s-x+y+z}{4},\quad v=\frac{s+x-y+z}{4},\quad w=\frac{s+x+y-z}{4}\,;$$

ou, ce qui revient au même,

(4) $$t=\frac{s-x-y-z}{4},\quad u=t+\frac{y+z}{2},\quad v=t+\frac{x+z}{2},\quad w=t+\frac{x+y}{2}.$$

De même, si $s+x+y+z$ est divisible par 4, on satisfera aux équations (1), en supposant

$$t=\frac{s+x+y+z}{4},\quad v=\frac{s+x-y-z}{4};\quad u=\frac{s-x+y-z}{4},\quad w=\frac{s-x-y+z}{3}\,;$$

ou, ce qui revient au même,

(5) $$t=\frac{s+x+y+z}{4},\quad v=t-\frac{y+z}{2},\quad u=t-\frac{x+z}{2},\quad w=t-\frac{x+y}{2}.$$

D'ailleurs, s, x, y, z étant quatre nombres impairs,

$$s-x-y-z, \qquad s+x+y+z$$

sont deux nombres pairs; et, comme leur somme $2s$ est impairement paire, il est nécessaire que l'un de ces deux nombres soit divisible par 4, et l'autre seulement par 2. On pourra donc toujours satisfaire aux équations (1), en attribuant aux variables t, u, v, w un des systèmes de valeurs (4) ou (5). Mais on voit que ces deux systèmes s'excluent réciproquement.

Exemple. Si l'on suppose $k=31$, on trouvera

$$\sqrt{3k-2}-1=\sqrt{91}-1<9, \quad \sqrt{4k}=\sqrt{124}>11.$$

On pourra donc faire $s=9$, ou $s=11$.

Si l'on suppose d'abord $s=9$, on trouvera

$$4k-s^2=43=5^2+3^2+3^2,$$

$$x=5, y=3, z=3;$$

et par suite les équations (5) donneront

$$t=5, \quad u=2, \quad v=1, \quad w=1.$$

On a en effet

$$5^2+2^2+1^2+1^2=31,$$

$$5+2+1+1=9.$$

Si l'on suppose en second lieu $s=11$, on trouvera

$$4k-s^2=3=1^2+1^2+1^2,$$

$$x=1, y=1, z=1;$$

et par suite les équations (4) donneront

$$t=2, \quad u=3, \quad v=3, \quad w=3.$$

On a en effet

$$2^2+3^2+3^2+3^2=31,$$

$$2+3+3+3=11.$$

5.° Théorème. *k étant un nombre entier quelconque, il existe toujours entre les limites*

$$\sqrt{3k-2}-1, \quad \sqrt{4k}.$$

au moins un nombre entier de même espèce que k, c'est-à-dire, pair si k est un nombre pair, et impair si k est un nombre impair.

Démonstration. En effet, le différence entre les limites

$$\sqrt{3k-2}-1, \quad \sqrt{4k},$$

savoir,

$$1+\sqrt{4k}-\sqrt{3k-2},$$

qui est égale à 2, 1.° lorsqu'on fait $k=1$, 2.° lorsqu'on fait $k=9$, n'a qu'un seul maximum, $1+\sqrt{\frac{2}{3}}$, correspondant à $k=\frac{8}{3}$. Cette différence est donc supérieure à 2, lorsqu'on suppose

$$k>9;$$

et croît même alors indéfiniment avec la quantité k. Par suite, toutes les fois que k surpasse 9, il doit y avoir au moins deux nombres entiers compris entre les limites

$$\sqrt{3k-2}-1, \quad \sqrt{4k};$$

et l'un de ces deux nombres entiers est nécessairement de même espèce que le nombre k.

D'ailleurs, si l'on donne successivement à k toutes les valeurs entières possibles depuis 1 jusqu'à 9, on trouvera toujours des nombres entiers de même espèce que k compris entre les limites

$$\sqrt{3k-2}-1, \quad \sqrt{4k}.$$

Ces nombres entiers seront respectivement

Pour $k=$	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	3
	6	4
	7	5
	8	4
	9	5.

Il est donc prouvé qu'à une valeur quelconque de k correspondra toujours un nombre entier de même espèce compris entre les limites

$$\sqrt{3k-2}-1, \qquad \sqrt{4k}.$$

Corollaire 1.er Si l'on suppose $k=121$, on aura

$$\sqrt{3k-2}-1=18, \qquad \sqrt{4k}=22=18+4.$$

Par suite, si l'on fait $k>121$, la différence entre les limites

$$\sqrt{3k-2}-1, \qquad \sqrt{4k}$$

surpassera 4. Il existera donc alors au moins quatre nombres entiers consécutifs, compris entre les limites dont il s'agit; et, parmi ces quatre nombres, il y en aura nécessairement deux de même espèce que le nombre k.

6.e Théorème. *k étant un nombre entier quelconque, il existe toujours entre les limites*

$$\sqrt{3k}, \qquad \sqrt{4k}$$

au moins un nombre entier de même espèce que k; à moins toutefois que k ne soit un des nombres impairs

$$1,\ 5,\ 9,\ 11,\ 17,\ 19,\ 29,\ 41,$$

ou bien un des nombres pairs

$$2,\ 6,\ 8,\ 14,\ 22,\ 24,\ 34.$$

Démonstration. En effet, si l'on suppose $k>56$, on aura

$$\sqrt{4k}-\sqrt{3k}>2;$$

et par suite il y aura toujours entre les limites $\sqrt{3k}$, $\sqrt{4k}$, deux nombres entiers, dont l'un sera de même espèce que k. De plus, si l'on donne successivement à k toutes les valeurs entières possibles depuis 1 jusqu'à 56, on ne trouvera d'exception au théorème que pour les nombres ci-dessus énoncés.

Corollaire 1.er On peut remarquer que parmi les nombres pairs qui font exception à la règle générale, les seuls qui ne soient pas divisibles par 4 sont les suivants :

$$2,\ 6,\ 14,\ 22,\ 34.$$

Les deux autres, savoir, 8 et 24, étant divisés par 4, donnent pour quotient

2 et 6.

1.er Problème. *Déterminer les valeurs de k, pour lesquelles il est impossible de résoudre simultanément en nombres entiers les deux équations*

$$(1)\qquad \begin{cases} k = t^2 + u^2 + v^2 + w^2, \\ s = t + u + v + w\,; \end{cases}$$

de manière que la valeur de s soit comprise entre les limites $\sqrt{3k}$, $\sqrt{4k}$.

Solution. Supposons d'abord que k soit un nombre impair, ou impairement pair. Alors, en vertu des théorêmes 3, 4 et 6, on pourra toujours résoudre les équations (1), de manière que s satisfasse à la condition exigée; à moins que k ne soit un des nombres impairs

$$(2)\qquad 1,\ 5,\ 9,\ 11,\ 17,\ 19,\ 29,\ 41,$$

ou bien un des nombres pairs

$$(3)\qquad 2,\ 6,\ 14,\ 22,\ 34.$$

Supposons en second lieu que k soit divisible par 4, et faisons

$$(4)\qquad k = 4^\alpha k',$$

α étant égal ou inférieur à l'exposant de la plus haute puissance de 4 qui puisse diviser k : on pourra évidemment résoudre les équations (1) avec la condition exigée, si l'on parvient à résoudre en nombres entiers les suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} k' = t'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2, \\ s' = t' + u' + v' + w', \end{cases}$$

de manière que s' soit compris entre les limites $\sqrt{3k'}$, $\sqrt{4k'}$. Car il suffira dans ce cas de faire

$$t = 2^\alpha t', \quad u = 2^\alpha u', \quad v = 2^\alpha v', \quad w = 2^\alpha w',$$

$$s = 2^\alpha s'.$$

De plus, si l'on prend 4^α égal à la plus haute puissance de 4 qui puisse diviser k, k' sera nécessairement un nombre impair, ou impairement pair; et par suite les

équations (5) seront résolubles avec la condition exigée, à moins que k' ne soit un des nombres compris dans les séries (2) et (3). Enfin, si k' est un des nombres

$$1,\ 5,\ 9,\ 11,\ 17,\ 19,\ 29,\ 41,$$

il suffira de diminuer, dans l'équation (4), α d'une unité, pour que k' acquierre une des valeurs suivantes :

(6) $$4,\ 20,\ 36,\ 44,\ 68,\ 76,\ 116,\ 164;$$

et, comme pour ces diverses valeurs de k' on peut résoudre les équations (5) avec la condition exigée [voyez ci-après, scholie 1.er], il en résulte que, parmi les valeurs de k divisibles par 4, les seules qui fassent exception à la règle générale sont celles qui sont de la forme $4^{\alpha}k'$, k' étant un des nombres

$$2,\ 6,\ 14,\ 22,\ 34.$$

En résumant ce qui précède, on voit qu'on pourra toujours résoudre les équations (1) de manière que s soit compris entre $\sqrt{3k}$ et $\sqrt{4k}$; à moins que k ne soit un des nombres impairs compris dans la série (2), ou bien un nombre pair de l'une des formes suivantes :

(7) $$2^{2\alpha+1}.1,\quad 2^{2\alpha+1}.3,\quad 2^{2\alpha+1}.7,\quad 2^{2\alpha+1}.11,\quad 2^{2\alpha+1}.17.$$

Scholie 1.er Nous avons dit ci-dessus qu'en prenant pour k un des nombres

$$4,\ 20,\ 36,\ 44,\ 68,\ 76,\ 116,\ 164,$$

on pouvait toujours résoudre simultanément les deux équations

(8) $$\left\{\begin{array}{l} k=t^2+u^2+v^2+w^2, \\ s=t+u+v+w, \end{array}\right.$$

de manière que s fût compris entre les limites $\sqrt{3k}$, $\sqrt{4k}$. C'est ce qu'on peut aisément vérifier de la manière suivante.

Si l'on cherche successivement, pour chacune des valeurs de k dont il est ici question, les nombres pairs compris entre les limites $\sqrt{3k}$, $\sqrt{4k}$, on trouvera

pour $k=$	4 . . . le nombre	4
	20	8
	36	12
	44	12
	68	16
	76	16
	116	20
	164	24.

Cela posé, il est facile de voir que, si l'on prend pour s le nombre situé dans la table précédente vis-à-vis de chaque valeur de k, la quantité

$$k-\left(\frac{1}{2}s\right)^2$$

ne sera jamais de la forme

$$4^{\alpha}(8n+7).$$

Par suite [voyez le théorême 3], en adoptant cette valeur de s, qui remplit la condition exigée, on pourra résoudre simultanément les équations (8).

Scholie 2.ᵉ Si l'on prend pour k un quelconque des nombres compris dans la série (7), la valeur de s ne pourra jamais être renfermée entre les limites $\sqrt{3k}$, $\sqrt{4k}$. Mais il sera facile de déterminer dans cette hypothèse les diverses valeurs que s peut obtenir. En effet, si la valeur de k est donnée par l'équation

$$(9) \qquad k=2^{2\alpha+1}k_{,}\,;$$

celle de s sera nécessairement de la forme

$$(10) \qquad s=2^{\alpha}s_{,}\,,$$

$s_{,}$ étant un nombre tel qu'on puisse résoudre simultanément les deux équations

$$(11) \qquad \left\{\begin{array}{l} 2k=t_{,}^{2}+u_{,}^{2}+v_{,}^{2}+w_{,}^{2}, \\ s=t_{,}+u_{,}+v_{,}+w_{,}. \end{array}\right.$$

Pour le prouver, observons qu'on ne peut résoudre en nombres entiers l'équation

$$(12) \qquad 2^{2\alpha+1}k_{,}=t^{2}+u^{3}+v^{2}+w^{3},$$

dans le cas où α surpasse zéro, à moins de supposer que t, u, v, w sont des nombres pairs; d'où il est aisé de conclure que, si l'on fait successivement $\alpha=1$, $\alpha=2$, $\alpha=3$, etc., on ne pourra résoudre la même équation en nombres entiers, à moins de supposer que chacun des nombres t, u, v, w, est divisible une fois, deux fois, trois fois, etc., par 2. Ainsi, α ayant une valeur déterminée supérieure à l'unité, il faudra, pour résoudre l'équation (12) en nombres entiers, supposer

$$t=2^{\alpha}t_{,}\,,\qquad u=2^{\alpha}u_{,}\,,\qquad v=2^{\alpha}v_{,}\,,\qquad w=2^{\alpha}w_{,}\,;$$

d'où l'on conclura

$$s = t + u + v + w = 2^{\alpha}(t_{,} + u_{,} + v_{,} + w_{,}) = 2^{\alpha} s_{,} ,$$

les quantités $k_{,}, s_{,}, t_{,}, u_{,}, v_{,}, w_{,}$, étant respectivement assujetties aux équations (11).

Si l'on prend successivement pour $2k_{,}$ les nombres pairs

$$2,\ 6,\ 14,\ 22,\ 34;$$

les valeurs correspondantes de $s_{,}$ seront respectivement

pour $2k_{,} = 2 = 1 + 1$. $s_{,} = 2$
$6 = 4 + 1 + 1$ 4
$14 = 9 + 4 + 1$ 6
$22 = 9 + 9 + 4 = 16 + 4 + 1 + 1$ 8
$34 = 25 + 9 = 16 + 9 + 9$ . . . . 8 ou 10.

Ainsi les seules valeurs de s qui puissent correspondre aux valeurs de k prises dans la série

$$2^{2\alpha+1}.1,\quad 2^{2\alpha+1}.3,\quad 2^{2\alpha+1}.7,\quad 2^{2\alpha+1}.11,\quad 2^{2\alpha+1}.17$$

seront respectivement

$$2^{\alpha+1}.1,\quad 2^{\alpha+1}.2,\quad 2^{\alpha+1}.3,\quad 2^{\alpha+1}.4,\quad 2^{\alpha+1}.4 \text{ ou } 2^{\alpha+1}.5.$$

Problème 2.° *Déterminer les valeurs de k pour lesquelles il est impossible de résoudre simultanément en nombres entiers les deux équations*

$$(1)\qquad \begin{cases} k = t^2 + u^2 + v^2 + w^2, \\ s = t + u + v + w, \end{cases}$$

de manière que la valeur de s soit comprise entre les limites

$$\sqrt{3k-2} - 1, \qquad \sqrt{4k}.$$

Solution. Il suit immédiatement des théorêmes 4 et 5, qu'on peut résoudre simultanément les équations (1), de manière à remplir la condition exigée, toutes les fois que k est un nombre impair. Nous avons fait voir en outre [problème précédent] qu'en prenant pour k un nombre pair, on peut toujours résoudre les équations (1), de manière que s étant inférieur à $\sqrt{4k}$ soit supérieur à $\sqrt{3k}$, et à plus forte

raison à $\sqrt{3k-2}-1$; à moins que la valeur de k ne se trouve comprise dans une des séries

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llll} 2, & 8, & 32, & 128, \text{ etc.} \\ 6, & 24, & 96, & 384, \text{ etc.} \\ 14, & 56, & 224, & 896, \text{ etc.} \\ 22, & 88, & 352, & 1408, \text{ etc.} \\ 34, & 136, & 544, & 2176, \text{ etc.} \end{array}\right.$$

dont les termes généraux sont respectivement

$$2^{2\alpha+1}.1,\quad 2^{2\alpha+1}.3,\quad 2^{2\alpha+1}.7,\quad 2^{2\alpha+1}.11,\quad 2^{2\alpha+1}.17.$$

Enfin, d'après ce qu'on a dit plus loin [scholie 2], les plus grandes valeurs de s qui puissent correspondre à ces diverses valeurs de k, sont respectivement

$$2^{\alpha+1}.1,\quad 2^{\alpha+1}.2,\quad 2^{\alpha+1}.3,\quad 2^{\alpha+1}.4,\quad 2^{\alpha+1}.5:$$

d'où il est aisé de conclure que, dans les séries que l'on considère, les seuls termes, pour lesquels la valeur de s reste comprise entre les limites $\sqrt{3k-2}-1$, $\sqrt{4k}$, sont

pour la 1.re série . . . les nombres 2 et 8,
pour la 2.e . . . . 6, 24 et 96,
pour la 3.e . . . . 14 et 56,
pour la 4.e . . . . 22, 88, 352 et 1408,
pour la 5.e . . . . 34, 136, 544 et 2176.

Si l'on retranche ces mêmes termes des séries (2), les termes restants seront les seules valeurs de k, pour lesquelles on ne puisse résoudre les équations (1) avec la condition exigée. Parmi les valeurs dont il s'agit, les plus petites seront

32, 123, 224, 384, 512, 896, 1024, etc....

Corollaire 1.er Si l'on donne successivement à k toutes les valeurs entières possibles depuis $k=1$, jusqu'à $k=121$ inclusivement, on n'en trouvera qu'une seule, pour laquelle il soit impossible de résoudre les équations (1) avec la condition exigée. Cette valeur unique est

$$k=32=2^{2\times2+1}$$

La seule valeur que s puisse recevoir dans cette hypothèse, est, d'après ce qu'on a dit plus haut, la suivante :

$$2^{2+1}=8,$$

qui est effectivement située hors des limites

$$\sqrt{3k-2}-1=\sqrt{94}-1,\ \sqrt{4k}=\sqrt{128}.$$

Corollaire 2.° Si l'on donne à k une valeur impaire, telle qu'un seul nombre impair s se trouve compris entre les limites

$$\sqrt{3(k+1)-2}-1,\ \sqrt{4(k+1)},$$

on aura nécessairement [théorême 5.°, corollaire 1.er]

$$1+k<121.$$

Dans la même hypothèse, les seuls nombres pairs qui puissent être compris entre les limites

$$\sqrt{3(k+1)-2}-1,\ \sqrt{4(k+1)}$$

sont les suivants

$$s-1,\ s+1.$$

D'ailleurs $k+1$ étant un nombre pair inférieur à 121, il suit du corollaire 1.er, qu'à moins de supposer $k+1=32$, on trouvera entre les limites $\sqrt{3(k+1)-2}-1$, $\sqrt{4(k+1)}$ un nombre pair s' pour lequel on pourra résoudre simultanément les deux équations

$$k+1=t'^2+u'^2+v'^2+w'^2,$$

$$s'=t'+u'+v'+w'.$$

s' aura donc nécessairement une des deux valeurs $s-1$, $s+1$. Enfin, si l'on fait $k+1=32$, on trouvera deux nombres impairs, savoir : 9 et 11, compris entre les limites $\sqrt{3.32-2}-1$. $\sqrt{4.32}$. On pourra donc énoncer sans restriction le théorême suivant

Théorême. 7.° *Si l'on donne à* k *une valeur impaire, telle qu'un seul nombre impair* s *se trouve compris entre les deux limites*

$$\sqrt{3(k+1)-2}-1,\ \sqrt{4(k+1)},$$

on pourra toujours résoudre en nombres entiers, ou les deux équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} k+1=t^2+u^2+v^2+w^2, \\ s+1=t\ +u\ +v\ +w\ , \end{array}\right.$$

ou bien les deux suivantes

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} k+1=t^2+u^2+v^2+w^2, \\ s-1=t\ +u\ +v\ +w\ . \end{array}\right.$$

THÉORÈME 8.e *Soient k et s deux nombres impairs dont le second soit compris entre les limites*

$$\sqrt{3k-2}-1\,,\ \sqrt{4k}\,.$$

Soient de plus m un nombre entier quelconque supérieur à 2, r un autre nombre entier égal ou inférieur à $m-2$; et faisons

$$(1)\qquad A_k=m\left(\frac{k-s}{2}\right)+s+r.$$

Si, en laissant k et m constants, on donne successivement à s et à r toutes les valeurs possibles, et que l'on désigne par B_k et C_k la plus petite et la plus grande des valeurs de A_k ainsi obtenues : tout nombre entier compris entre les limites B_k, C_k, sera décomposable en $m+2$ nombres polygones de l'ordre $m+2$.

Démonstration. Pour établir cette proposition, il suffit de faire voir, 1.° que tout nombre entier compris entre les limites

$$B_k\ ,\quad C_k\ ,$$

est une des valeurs de la formule (1); 2.° que tout nombre compris dans cette formule peut être considéré comme formé par l'addition de $m+2$ nombres polygones de l'ordre $m+2$.

Pour démontrer la première partie de cette proposition, j'observe que, si l'on désigne par s_1 la plus petite, et par s_2 la plus grande des valeurs de s qui correspondent à la valeur donnée de k, les diverses valeurs de s, respectivement égales aux divers nombres impairs compris entre les limites

$$\sqrt{4(k-2)}-1\,,\ \sqrt{4k}\,,$$

formeront la progression arithmétique

$$s_1\,,\ s_1+2\,,\ s_1+4\,,\ \text{etc.}\ldots\ s_2-4\,,\ s_2+2\,,\ s_2\,;$$

et, comme on peut faire successivement

$$r=0,\ r=1,\ r=2,\ \text{etc.....}\ r=m-3,\ r=m-2,$$

les diverses valeurs de A_k, en commençant par la plus petite et finissant par la plus grande, seront respectivement

$$(2)\left\{\begin{array}{lllll}
m\left(\frac{k-s_2}{2}\right)+s_2 & =B_k, & B_k+1, & B_k+2, & \text{etc. } B_k+m-2\ ;\\
m\left(\frac{k-s_2+2}{2}\right)+s_2-2 & =B_k+m-2, & B_k+1+m-2, & B_k+2+m-2, & \text{etc. } B_k+2(m-2)\ ;\\
m\left(\frac{k-s_2+4}{2}\right)+s_2-4 & =B_k+2(m-2), & B_k+1+2(m-2), & B_k+2+2(m-2), & \text{etc. } B_k+3(m-2)\ ;\\
\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\
m\left(\frac{k-s_1-2}{2}\right)+s_1+2 & =C_k-2(m-2), & C_k+1-2(m-2), & C_k+2-2(m-2), & \text{etc. } C_k-(m-2)\ ;\\
m\left(\frac{k-s_1}{2}\right)+s_1 & =C_k-(m-2), & C_k+1-(m-2), & C_k+2-(m-2), & \text{etc. } C_k.
\end{array}\right.$$

Ces diverses valeurs fourniront donc tous les termes de la progression arithmétique

$$B_k,\ B_k+1,\ B_k+2,\ \text{etc.....}\ C_k-1,\ C_k\ ;$$

c'est-à-dire tous les nombres compris entre B_k et C_k. On peut même observer que quelques-uns de ces nombres correspondront à-la-fois à deux valeurs différentes de la quantité s.

Il reste maintenant à faire voir que tout nombre entier compris dans la formule

$$m\left(\frac{k-s}{2}\right)+s+r$$

peut être considéré comme formé par l'addition de $m+2$ nombres polygones de l'ordre $m+2$. Or, comme zéro et l'unité font partie de la suite des nombres polygones d'un ordre quelconque, et que l'on suppose

$$r<m-2,$$

le nombre r peut toujours être considéré comme représentant la somme de $m-2$

polygones de l'ordre $m+2$. Il suffira donc de prouver que tout nombre entier compris dans la formule

(3) $$m\left(\frac{k-s}{2}\right)+s$$

est la somme de quatre nombres polygones du même ordre : et en effet, s étant par hypothèse impair ainsi que k, et compris entre les limites

$$\sqrt{3k-2}-1, \quad \sqrt{4k},$$

on pourra, d'après le théorème 4.°, résoudre simultanément en nombres entiers les deux équations

(4) $$\left\{\begin{array}{l} k=t^2+u^2+v^2+w^2, \\ s=t+u+v+w; \end{array}\right.$$

d'où l'on conclura

(5) $$m\left(\frac{k-s}{2}\right)+s=\left\{\begin{array}{l} \quad m\left(\frac{t^2-t}{2}\right)+t \\ +m\left(\frac{u^2-u}{2}\right)+u \\ +m\left(\frac{v^2-v}{2}\right)+v \\ +m\left(\frac{w^2-w}{2}\right)+w. \end{array}\right.$$

La formule (3) est donc la somme de quatre nombres polygones de l'ordre $m+2$; ce qui complète la démonstration du théorème 8.°

Corollaire 1.er k et m étant supposés constants, la plus petite et la plus grande des valeurs que A_k puisse recevoir sont, conformément au tableau n.° (2),

(6) $$\left\{\begin{array}{l} B_k=m\left(\frac{k-s_2}{2}\right)+s_2, \\ C_k=m\left(\frac{k-s_1}{2}\right)+s_1+m-2. \end{array}\right.$$

Dans ces formules s_1 et s_2 désignent respectivement le plus petit et le plus grand des nombres impairs compris entre les limites

(7) $$\sqrt{3k-2}-1, \qquad \sqrt{4k}.$$

Si maintenant on change k en $k+2$, et que l'on désigne par s_1', s_2' le plus petit et le plus grand des nombres impairs compris entre les limites

(8) $$\sqrt{3(k+2)-2}-1, \quad \sqrt{4(k+2)};$$

les formules (6) deviendront respectivement

(9) $$\left\{\begin{array}{l} B_{k+2}=m\left(\dfrac{k+2-s_2'}{2}\right)+s_2', \\ C_{k+2}=m\left(\dfrac{k+2-s_1'}{2}\right)+s_1'+m-2. \end{array}\right.$$

D'ailleurs il est facile de s'assurer que la différence des deux limites

$$\sqrt{3(k+2)-2}-1, \quad \sqrt{3k-2}-1$$

est toujours inférieure à deux unités. Il n'y aura donc pas de nombre impair compris entre ces deux limites, ou bien il n'y en aura qu'un; et par suite on aura toujours

(10) $$s_1'=s_1, \qquad \text{ou bien} \qquad s_1'=s_1+2.$$

De même la différence des deux limites

$$\sqrt{4(k+2)}, \qquad \sqrt{4k}$$

étant toujours inférieure à deux unités, on aura nécessairement

(11) $$s'_2=s_2, \qquad \text{ou} \qquad s'_2=s_2+2.$$

Cela posé, la première des équations (9) se réduira évidemment à l'une des deux suivantes

(12) $$B_{k+2}=B_k+m, \quad B_{k+2}=B_k+2;$$

et la seconde des équations (9) à l'une de celles qui suivent

(13) $$C_{k+2}=C_k+m, \quad C_{k+2}=C_k+2.$$

On aura donc, dans tous les cas possibles (m étant >2),

$$(14)\quad \begin{cases} B_{k+2} = \text{ ou } > B_k + 2, \\ C_{k+2} = \text{ ou } > C_k + 2; \end{cases}$$

et par suite $C_{k+2} > C_k$. On trouverait de même $C_{k+4} > C_{k+2}$, $C_{k+6} > C_{k+4}$, etc. Si donc l'on met successivement à la place de k les différents termes de la progression arithmétique

$$k,\ k+2,\ k+4,\ k+6, \text{ etc.},$$

les valeurs correspondantes de C_k que nous représenterons par

$$C_k,\quad C_{k+2},\quad C_{k+4},\quad C_{k+6}, \text{ etc.},$$

seront toujours croissantes; et, comme ces mêmes valeurs sont entières, elles finiront par devenir plus grandes que toute quantité donnée.

Corollaire 2.° Chacun des nombres C_k, C_{k+2}, C_{k+4}, etc., est décomposable en $m+2$ nombres polygones de l'ordre $m+2$.

Théorème 9.° *Soit k un nombre impair quelconque; $s_,$ le plus petit des nombres impairs supérieurs à la limite $\sqrt{3k-2}-1$; et faisons*

$$(1)\qquad C_k = m\left(\frac{k-s_,}{2}\right) + s_, + m - 2,$$

m étant entier et > 2. Soit de plus C_{k+2} ce que devient C_k, lorsqu'on remplace k par $k+2$. Chacun des nombres entiers compris entre les limites

$$C_k,\quad C_{k+2}$$

sera toujours décomposable en $m+2$ nombres polygones de l'ordre $m+2$.

Démonstration. On doit distinguer deux cas différens, suivant que le nombre des entiers impairs compris entre les limites

$$\sqrt{3k-2}-1,\quad \sqrt{4(k+2)}$$

est supérieur ou simplement égal à l'unité.

Supposons d'abord qu'il existe deux ou plusieurs nombres impairs compris entre ces mêmes limites. Alors, en adoptant les mêmes notations que dans les théorêmes précédents, on trouvera

$$s'_2 - s_1 = 2 \quad \text{ou} \quad > 2.$$

Cela posé, la première des équations (9) [théorème précédent] donnera évidemment

$$B_{k+2} = \text{ou} < m\left(\frac{k-s_1}{2}\right) + s_1 + 2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \qquad B_{k+2} = \text{ou} < C_k - m + 4 = \text{ou} < C_k + 1,$$

(m devant être > 2). D'ailleurs nous avons fait voir [théorème précédent] que tout nombre entier compris entre les limites

$$B_k, \quad C_k$$

est décomposable en $m+2$ nombres polygones de l'ordre $m+2$. La même proposition étant applicable aux nombres entiers compris entre les limites

$$B_{k+2}, \quad C_{k+2},$$

le sera encore *à fortiori*, en vertu de la condition (2), aux nombres entiers compris entre les limites

$$C_k + 1, \quad C_{k+2}:$$

et comme C_k peut être aussi décomposé de la même manière, il en résulte que le théorème 9 est déjà démontré pour le cas ou plusieurs nombres impairs se trouvent compris entre les limites

$$\sqrt{3k-2} - 1, \quad \sqrt{4(k+2)}.$$

Supposons en second lieu qu'un seul nombre impair se trouve compris entre les limites dont il est ici question. Il n'y en aura qu'un seul à plus forte raison entre les deux suivantes

$$\sqrt{3(k+1)-2} - 1, \quad \sqrt{4(k+1)};$$

et, par suite du théorème 7, on pourra toujours résoudre simultanément en nombres entiers ou les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} k+1 = t^2 + u^2 + v^2 + w^2, \\ s_1 + 1 = t + u + v + w, \end{cases}$$

ou bien les deux suivantes

$$(4)\qquad \begin{cases} k+1=t^2+u^2+v^2+w^2, \\ s_{,}-1=t+u+v+w. \end{cases}$$

Dans la même hypothèse, on aura nécessairement

$$s'_2=s_{,};$$

et par suite

$$(5)\qquad B_{k+2}=m\left(\frac{k-s_{,}}{2}\right)+s_{,}+m=C_k+2.$$

D'ailleurs, comme le nombre C_k, et tous les entiers compris entre les limites

$$B_{k+2},\quad C_{k+2},$$

sont décomposables en $m+2$ nombres polygones de l'ordre $m+2$, il résulte déjà de l'équation (5) que, parmi tous les termes de la suite

$$C_k,\quad C_k+1,\quad C_k+2,\ \text{etc.},\ C_{k+2}-1,\quad C_{k+2},$$

C_k+1 est le seul pour lequel on pourrait révoquer en doute la possibilité d'une semblable décomposition. Mais ce nombre, étant égal à

$$m\left(\frac{k-s_{,}}{2}\right)+s_{,}+m-1,$$

peut être, en vertu des équations (3) ou (4), présenté sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes

$$m\left(\frac{t^2+u^2+v^2+w^2-t-u-v-w}{2}\right)+t+u+v+w+m-2,$$

$$m\left(\frac{t^2+u^2+v^2+w^2-t-u-v-w}{2}\right)+t+u+v+w;$$

et, comme, sous l'une ou l'autre de ces deux formes, il est évidemment la somme de $m+2$ nombres polygones, dont $m-2$ sont égaux à zéro ou à l'unité, on voit que tous les nombres entiers compris entre

$$C_k \text{ et } C_{k+2}$$

satisfont encore, dans la seconde hypothèse, à la condition énoncée.

Corollaire 1.er Il suit de tout ce qui précède, non-seulement, que les nombres entiers compris entre C_k et C_{k+2} sont décomposables en $m+2$ nombres polygones de l'ordre $m+2$; mais encore que la décomposition peut toujours être effectuée de manière que $m-2$ nombres polygones soient respectivement égaux à zéro ou à l'unité.

Corollaire 2.e La même proposition est évidemment applicable aux nombres entiers compris entre les limites C_{k+2}, C_{k+4}, à ceux qui sont compris entre les limites C_{k+4}, C_{k+6}, etc., et, par suite, à tous ceux qui sont renfermés entre les limites

$$C_k \quad \text{et} \quad C_{k+2l},$$

k et l étant deux nombres entiers pris à volonté.

Théorème 10e. *Tout nombre entier est décomposable en cinq pentagones, six hexagones, sept heptagones, etc., et en général en* $m+2$, *nombres polygones de l'ordre* $m+2$, (m *étant* >2).

Démonstration. En effet, adoptons pour un moment les notations ci-dessus employées [théorêmes 8 et 9]. Il est démontré par le théorême 8 que tout nombre entier compris entre les limites B_k, C_k peut subir la décomposition dont il s'agit, et par le théorême 9 (corollaire 2), que la même propriété appartient à tous les nombres entiers compris entre les limites C_k et C_{k+2l}; k et l étant pris à volonté. D'ailleurs, si l'on suppose $k=1$, $l=\infty$, on trouvera

$$B_k=1, \quad C_{k+2l}=\infty.$$

Ainsi, en vertu des théorêmes 8 et 9, la décomposition énoncée sera possible pour tous les nombres entiers compris entre les limites 1 et ∞; c. q. f. d.

Corollaire 1.er Les démonstrations que nous avons données des théorêmes 8, 9 et 10 prouvent évidemment que la décomposition d'un nombre entier en $m+2$ nombres polygones peut toujours être effectuée de manière que $m+2$ de ces nombres soient égaux à zéro ou à l'unité. Par suite, tout nombre entier est égal à la somme de quatre pentagones, ou à une semblable somme augmentée d'une unité; à la somme de quatre hexagones, ou à une semblable somme augmentée d'une ou de deux unités; à la somme de quatre heptagones, ou à une semblable somme augmentée d'une, de deux ou de trois unités, et ainsi de suite.

Corollaire 2.° Si l'on veut, à l'aide des méthodes ci-dessus exposées, décomposer un nombre entier N en $m+2$ nombres polygones de l'ordre $m+2$, il faudra commencer par chercher une valeur de k telle que le nombre donné N soit compris entre les limites

$$C_k, \quad C_{k+2}.$$

Pour obtenir une valeur approchée de k, on fera

$$N = C_k;$$

et, comme on a généralement

$$C_k = m\left(\frac{k-s_{,}}{2}\right) + s_{,} + m - 2,$$

$s_{,}$ étant le seul nombre impair compris entre les limites

$$\sqrt{3k-2} - 1, \quad \sqrt{3k-2} + 1,$$

on pourra remplacer, sans avoir à craindre une erreur considérable,

$$s_{,} \text{ par } \sqrt{3k-2}$$

et

$$C_k \text{ par } m\left\{\frac{k-\sqrt{3k-2}}{2}\right\} + \sqrt{3k-2} + m - 2;$$

par conséquent la valeur approchée de k se trouvera déterminée par l'équation

(1) $$N = \frac{m}{2}k + m - 2 - \frac{(m-2)}{2}\sqrt{3k-2},$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante

(2) $$\left\{\frac{m}{2}k - (N - m + 2)\right\}^2 = \frac{(m-2)^2}{4}(3k-2).$$

Cette dernière équation étant du second degré, on en tirera deux valeurs de k, dont la plus grande sera celle qui doit vérifier l'équation (1). La valeur approchée de k étant ainsi connue, on en déduira sans peine, après quelques essais, la valeur véritable avec les valeurs correspondantes des quantités que nous avons désignées par

$$C_k, \quad C_{k+2}, \quad B_{k+2}.$$

Cela posé, il suit des théorêmes 8 et 9 que la valeur de N se trouvera nécessairement comprise parmi les nombres

$$(3) \qquad B_{k+2}, \quad B_{k+2}+1, \text{ etc.}, \quad C_{k+2}-1, \quad C_{k+2};$$

excepté un seul cas, dans lequel elle sera égale à

$$(4) \qquad C_k+1.$$

De plus, si la valeur de N est comprise parmi les nombres de la série (3), on pourra faire

$$(5) \qquad N=m\left(\frac{k+2-s'}{2}\right)+s'+r,$$

s' étant un nombre impair compris entre les limites $\sqrt{3(k+2)-2}-1$, $\sqrt{4(k+2)}$; et r étant $=$ ou $< m-2$. Dans la même hypothèse, on pourra résoudre simultanément en nombres entiers les équations

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} k+2&=t^2+u^2+v^2+w^2,\\ s'&=t+u+v+w.\end{aligned}\right.$$

En joignant celles-ci à l'équation (4), on verra que le nombre N est égal à la somme des quatre nombres polygones

$$m\left(\frac{t^2-t}{2}\right)+t, \quad m\left(\frac{u^2-u}{2}\right)+u, \quad m\left(\frac{v^2-v}{2}\right)+v, \quad m\left(\frac{w^2-w}{2}\right)+w,$$

augmentée de r unités.

On peut déterminer facilement les valeurs de s' et de r par le moyen de l'équation (5) mise sous la forme suivante

$$(7) \qquad N-B_{k+2}=(m-2)\left(\frac{s'_2-s'}{2}\right)+r.$$

En effet, dans cette dernière équation,

$$\frac{s'_2-s'}{2}$$

est évidemment le quotient de la division de $N - B_{k+2}$ par $m-2$; et r le reste de cette division. On doit seulement observer que, r pouvant être égal à $m-2$, il est permis, lorsque la division donne zéro pour reste, de remplacer ce reste par $m-2$, pourvu que l'on diminue en même temps le quotient d'une unité. Il devient même indispensable d'en agir ainsi, lorsque N est égal à C_{k+2}.

Dans le cas d'exception, on a

$$(8) \qquad N = C_k + 1 = m\left(\frac{k-s_{,}}{2}\right) + s_{,} + m - 1\,;$$

$s_{,}$ étant le seul nombre impair qui soit compris entre les limites $\sqrt{3k-2}-1$, $\sqrt{4k}$. Dans le même cas, on peut résoudre en nombres entiers l'un des systèmes d'équations (3) ou (4) [théorème 9]. En joignant un de ces systèmes à l'équation (8), on en conclut immédiatement la décomposition du nombre N en $m+2$ nombres polygones, dont $m-2$ sont égaux à l'unité ou à zéro.

Exemple. Supposons qu'il s'agisse de décomposer 114 en six hexagones. On aura

$$m = 4, \qquad N = 114\,;$$

et par suite l'équation (2) deviendra

$$(9) \qquad 4(k-56)^2 = 3k - 2\,.$$

La plus grande racine de cette même équation est, en nombres ronds,

$$k = 63\,.$$

Pour connaître le degré d'exactitude de cette valeur de k, j'observe qu'on a, pour $m = 4$,

$$(10) \qquad \begin{cases} C_k = 2(k+1) - s' \\ C_{k+2} = 2(k+3) - s'_{,}\,; \end{cases}$$

et comme, dans le cas où l'on suppose $k = 63$, on trouve

$$s'_{,} = s_{,} = 13\,.$$

les valeurs de C_k, C_{k+2} se réduisent, dans cette hypothèse, à

$$C_k = 128 - 13 = 115\ ,\quad C_{k+2} = 132 - 13 = 119.$$

Le nombre donné 114 n'étant pas compris entre les limites 115 et 119, la valeur présumée de k est nécessairement trop forte, et doit être diminuée au moins de deux unités.

D'ailleurs, lorsqu'on suppose

$$k = 61\ ,$$

on trouve

$$s'_{,} = s_{,} = 13\ ,\qquad C_k = 111\ ,\qquad C_{k+2} = 115\ ;$$

et, comme 114 est compris entre les deux derniers nombres, la valeur 61 de k est exacte. Cela posé, on trouvera que s'_2, ou le plus grand nombre impair compris dans $\sqrt{4(k+2)}$ est égal à 15 ; d'où l'on conclura

$$B_{k+2} = 2(k+2) - 15 = 111.\qquad N - B_{k+2} = 3.$$

l'équation (7) se réduira donc à

$$(11)\qquad 3 = 2\left(\frac{s'_2 - s'}{2}\right) + r\ ;$$

et l'on aura par suite

$$\frac{s'_2 - s'}{2} = 1\ ,$$

ou

$$s' = s'_2 - 2 = 13\ ,$$

et

$$r = 1.$$

Cela posé, les équations (5) et (6) deviendront respectivement

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} N = 114 &= 2 \times 63 - 13 + 1\ ,\\ 63 &= t^2 + u^2 + v^2 + w^2,\\ 13 &= t + u + v + w. \end{aligned}\right.$$

Pour résoudre les deux dernières, je fais

$$4 \times 63 - (13)^2 = 83 = x^2 + y^2 + z^2\ ;$$

et je trouve

$$x=9, \quad y=1, \quad z=1;$$

d'où je conclus, à l'aide des formules

$$t=\frac{13+x+y+z}{4}, \quad u=t-\frac{y+z}{2}, \quad v=t-\frac{x+z}{2}, \quad w=t-\frac{x+y}{2},$$

les valeurs suivantes de t, u, v, w,

$$t=6, \quad u=5, \quad v=1, \quad w=1.$$

En adoptant ces mêmes valeurs, on trouve pour celle de N

$$N=114=(2t^2-t)+(2u^2-u)+(2v^2-v)+(2w^2-w)+1+0=66+45+1+1+1+0.$$

Nous avons donc effectivement décomposé 114 en six hexagones, dont trois sont égaux à l'unité, et un à zéro.



SUR LA NATURE DES RACINES

DE QUELQUES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

§ 1.er *Considérations générales.*

J'ai fait voir, dans le XVII.e Cahier du Journal de l'École royale polytechnique, qu'étant donnée une équation algébrique d'un degré quelconque, on peut toujours composer, avec les coëfficients de cette équation, des fonctions dont les signes déterminent, dans chaque cas particulier, non-seulement le nombre des racines imaginaires, mais encore le nombre des racines réelles positives, et le nombre des racines réelles négatives. Il est donc possible de fixer *à priori* la nature des diverses racines d'une équation algébrique. La difficulté de résoudre la même question pour les équations transcendantes a été signalée par M. Poisson, dans le dernier des Mémoires qu'il a publiés sur la théorie de la chaleur. Toutefois, dans la plupart des problêmes de physique mathématique, on rencontre des équations qui renferment des lignes trigonométriques ou des exponentielles, et dont la solution est nécessaire pour la détermination précise des lois des phénomènes. A la vérité, la comparaison des résultats, que fournissent les diverses méthodes employées par les géomètres, faisait soupçonner que plusieurs de ces équations n'admettent pas de racines imaginaires. Mais on n'avait aucun moyen direct de s'en assurer, et de reconnaître si les racines d'une équation transcendante sont toutes réelles. On doit néanmoins excepter les deux équations fort simples

$$(1) \qquad \sin z = 0, \qquad\qquad (2) \qquad \cos z = 0,$$

déjà traitées par Euler. Lorsque, dans la première de ces équations, on suppose $z = x + y\sqrt{-1}$, x et y désignant deux variables réelles, on en tire

$$(3) \qquad \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sqrt{-1} = 0,$$

et par suite

$$(4) \qquad (e^y + e^{-y}) \sin x = 0, \qquad (e^y - e^{-y}) \cos x = 0.$$

Or, tant que l'on attribue à x et à y des valeurs réelles, on ne peut évidemment satisfaire à la première des formules (4), à moins de supposer

(5) $$\sin x = 0, \qquad \cos x = \pm 1;$$

et l'on tire alors de la seconde $e^{y} - e^{-y} = 0$, $e^{2y} = 1$,

(6) $$y = \frac{1}{2}\,l(1) = 0;$$

d'où l'on conclut que le coëfficient y de $\sqrt{-1}$ s'évanouit dans toutes les racines de l'équation (1), c'est-à-dire, en d'autres termes, que cette équation n'a pas de racines imaginaires. On doit en dire autant de l'équation (2), que l'on déduit immédiatement de l'équation (1), en remplaçant z par $\frac{\pi}{2} - z$. Il était à désirer qu'on pût acquérir la même certitude pour d'autres équations plus compliquées. Ayant entrepris des recherches à ce sujet, je suis parvenu à trouver des règles à l'aide desquelles on peut fixer la nature des racines dans un grand nombre d'équations transcendantes, et spécialement dans celles que présentent les théories de la chaleur, de la lame élastique, des plaques vibrantes, etc...... Avant d'exposer ces règles, je m'occuperai d'abord de quelques équations particulières qui se rapportent à diverses questions de physique mathématique.

§ 2.° *Sur les racines des équations* $\operatorname{tang} z = z$, *et* $\operatorname{tang} z = az$.

Considérons d'abord l'équation transcendante

(1) $$\operatorname{tang} z = z.$$

On reconnaîtra sans peine, avec Euler [voyez le second volume de l'Introduction à l'analyse des infiniment petits], 1.° que cette équation admet, non-seulement trois racines nulles, mais encore une infinité de racines réelles, les unes positives, les autres négatives; 2.° que les racines positives sont renfermées, la première entre les limites π, $\pi + \frac{1}{2}\pi$, la seconde entre les limites 2π, $2\pi + \frac{1}{2}\pi$; la troisième entre les limites 3π, $3\pi + \frac{1}{2}\pi$, etc....; et que la n^{me} racine positive, comprise entre les limites $n\pi$, $n\pi + \frac{1}{2}\pi$, peut être déterminée par le moyen de la formule générale

(2) $$z = \frac{(2n+1)\pi}{2} - \frac{2}{(2n+1)\pi}\left\{1 + \frac{2}{3}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^2 + \frac{13}{15}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^4 + \frac{146}{105}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^6 + \ldots\right\}$$

Cela posé, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les racines positives de l'équation (1), rangées par ordre de grandeur, on trouvera successivement

$$\alpha = 4,4934118\ldots, \quad \beta = 7,7252519\ldots, \quad \gamma = 10,9041215\ldots, \text{ etc.}\ldots$$

Quant aux racines négatives, elles seront évidemment représentées par

$$-\alpha, \quad -\beta, \quad -\gamma, \quad \text{etc.}\ldots$$

J'ajoute maintenant que l'équation (1) n'aura pas de racines imaginaires; et, en effet, si l'on y suppose

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

x et y désignant deux quantités réelles, elle donnera

$$(3) \quad x + y\sqrt{-1} = \operatorname{tang}(x + y\sqrt{-1}) = \frac{\sin 2x + \sin(2y\sqrt{-1})}{\cos 2x + \cos(2y\sqrt{-1})} = \frac{\sin 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} - e^{-2y})\sqrt{-1}}{\cos 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y})},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \qquad x = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + 2\cos 2x + e^{-2y}}, \quad y = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + 2\cos 2x + e^{-2y}}.$$

On aura par suite, pour des valeurs de x et de y différentes de zéro,

$$(5) \qquad \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{4y} = \frac{\sin 2x}{2x}.$$

Or, cette dernière équation ne saurait être admise. Car, tant que y diffère de zéro, l'expression

$$\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{4y} = 1 + \frac{(2y)^2}{1.2.3} + \frac{(2y)^4}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}\ldots,$$

évidemment supérieure à l'unité, surpasse à plus forte raison le rapport

$$\frac{\sin 2x}{2x}.$$

Par conséquent, dans toutes les valeurs de z propres à vérifier l'équation (1), la partie réelle x, ou le coëfficient y de $\sqrt{-1}$ doit s'évanouir. D'ailleurs, il est

facile de reconnaître que la variable x ne peut s'évanouir sans la variable y. Car, si, dans l'équation (3), on pose $x=0$, elle se transformera dans la suivante

$$(6)\qquad y=\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}},$$

de laquelle on tire

$$y\,\frac{e^y+e^{-y}}{2}-\frac{e^y-e^{-y}}{2}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(7)\qquad y^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\,\frac{y^2}{1.2.3}+\frac{1}{7}\,\frac{y^4}{1.2.3.4.5}+\ldots\right)=0;$$

et l'on ne peut évidemment satisfaire à l'équation (7), la variable y étant réelle, sans supposer $y=0$. Donc le coëfficient de $\sqrt{-1}$ s'évanouit dans toutes les racines de l'équation (1), et toutes ces racines sont réelles; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Considérons en second lieu l'équation

$$(8)\qquad \tang z=az,$$

a désignant une constante réelle. On reconnaîtra facilement que cette équation admet une racine nulle, et une infinité de racines réelles, deux à deux égales, mais de signes contraires. De plus, si l'on remplace z par $x+y\sqrt{-1}$, on obtiendra, au lieu des équations (4), les deux suivantes

$$(9)\qquad ax=\frac{2\sin 2x}{e^{2y}+2\cos 2x+e^{-2y}},\quad ay=\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{e^{2y}+\cos 2x+e^{-2y}},$$

desquelles on déduira toujours la formule (5), en supposant les valeurs des variables x et y différentes de zéro; tandis que l'on trouvera, pour une valeur nulle de x,

$$(10)\qquad ay=\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(11)\qquad y\left\{\frac{1+\dfrac{y^2}{1.2.3}+\dfrac{y^4}{1.2.3.4.5}+\ldots.}{1+\dfrac{y^2}{1.2}+\dfrac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots.}-a\right\}=0.$$

Or, il est aisé de voir que cette dernière équation, divisée par y, n'admet pas de racines réelles, lorsque a est négatif, ou bien positif, mais supérieur à l'unité; et qu'elle admet deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative, mais égales au signe près, lorsque a est positif, mais inférieur à l'unité. Cela posé, en raisonnant comme on l'a fait ci-dessus à l'égard de l'équation (1), on conclura définitivement que l'équation (8) n'a point de racines imaginaires, si ce n'est lorsqu'on suppose

$$(12) \qquad a > 0 \quad \text{et} \quad < 1,$$

auquel cas elle admet deux racines de cette espèce et de la forme

$$(13) \qquad z = \zeta\sqrt{-1}, \qquad z = -\zeta\sqrt{-1},$$

ζ désignant une quantité positive déterminée par la formule

$$(14) \qquad a = \frac{1 + \frac{\zeta^2}{1.2.3} + \frac{\zeta^4}{1.2.3.4.5} + \dots}{1 + \frac{\zeta^2}{1.2} + \frac{\zeta^4}{1.2.3.4} + \dots}.$$

Les équations (1) et (8), que l'on peut encore écrire comme il suit

$$(15) \qquad \sin z = z \cos z, \qquad\qquad (16) \qquad \sin z = az \cos z,$$

se retrouvent dans plusieurs questions relatives à la théorie de la chaleur et à la théorie des ondes.

§ 3.e *Sur les racines de l'équation* $\tang z = az + b$.

Considérons maintenant l'équation

$$(1) \qquad \tang z = az + b,$$

a et b désignant deux constantes réelles dont la seconde ne soit pas nulle. On reconnaîtra sans peine que cette équation admet une infinité de racines réelles, les unes positives, les autres négatives. De plus, si l'on y remplace z par $x + y\sqrt{-1}$, x et y étant des variables réelles, on en tirera

$$(2) \qquad ax + b = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + 2\cos 2x + e^{-2y}}, \qquad ay = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + 2\cos 2x + e^{-2y}}.$$

Or, le trinome

$$e^{2y}+2\cos 2x+e^{-2y}$$

étant essentiellement positif, et les deux quantités

$$y, \quad e^{2y}-e^{-2y}$$

étant toujours de même signe, il est clair que, si la quantité a devient négative, on ne pourra satisfaire à la seconde des formules (2), à moins de supposer $y=0$, Cette remarque s'étend au cas même où la constante a s'évanouirait. Car, dans ce cas particulier, la seconde des formules (2) donnerait

$$e^{2y}-e^{-2y}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$4y\left\{1+\frac{(2y)^2}{1.2.3}+\frac{(2y)^4}{1.2.3.4.5}+\ldots\right\}=0,$$

et par conséquent

$$y=0.$$

Donc, si l'on a

(3) $$a= \text{ ou } <0,$$

l'équation (1) n'admettra pas de racines imaginaires.

Concevons à présent que la constante a devienne positive. Si l'on attribue à la variable y une valeur différente de zéro, on tirera des équations (2)

(4) $$\frac{2\sin 2x}{ax+b}=\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{ay},$$

ou, ce qui revient au même,

(5) $$\left(1+\frac{b}{ax}\right)\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}=\frac{\sin 2x}{2x}.$$

Or, comme la valeur numérique du rapport

$$\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}$$

surpassera celle de la fraction $\frac{\sin 2x}{2x}$, l'équation (5) ne pourra évidemment subsister

qu'autant que l'on aura

(6) $$\left(1+\frac{b}{ax}\right)^2<1,$$

et par conséquent

(7) $$1+\frac{2ax}{b}<0.$$

D'ailleurs cette dernière condition se réduit, pour des valeurs positives de la constante b, à

(8) $$x<-\frac{b}{2a},$$

et, pour des valeurs négatives de la constante b, à

(9) $$x>-\frac{b}{2a}.$$

Donc, si l'on a

(10) $$a>0,$$

toutes les racines imaginaires de l'équation (1) offriront une partie réelle supérieure à la quantité $-\frac{b}{2a}$ supposée positive, ou inférieure à la quantité $-\frac{b}{2a}$ supposée négative. Au reste, on ne saurait douter que l'on ne puisse satisfaire par des valeurs imaginaires de z à des équations de la forme

(1) $$\tang z = az+b,$$

mais dans lesquelles a serait positif, et b différent de zéro. En effet, concevons que, α et β désignant deux quantités réelles dont la seconde ne soit pas nulle, on suppose

(11) $$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{4}{e^{2\beta}+2\cos 2\alpha+e^{-2\beta}}\ \frac{e^{2\beta}-e^{-2\beta}}{4\beta}, \\ b &= \frac{4\alpha}{e^{2\beta}+2\cos 2\alpha+e^{-2\beta}}\left\{\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}-\frac{e^{2\beta}-e^{-2\beta}}{4\beta}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Alors, pour vérifier l'équation (1), il suffira de prendre

$$z=\alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

§ 4.° *Sur les racines de l'équation* $\tang z = \frac{az}{z^2+b}$

Considérons à présent l'équation transcendante

$$(1) \qquad \tang z = \frac{az}{z^2+b},$$

a et b désignant deux constantes réelles. On reconnaîtra sans peine qu'elle admet, comme l'équation (8) du § 1.er, une racine nulle, et une infinité de racines réelles, deux à deux égales, mais de signes contraires. De plus, si l'on pose, dans l'équation (1),

$$z = y\sqrt{-1},$$

y étant une variable réelle, et, si l'on divise ensuite les deux membres par y, on trouvera

$$(2) \qquad \frac{a}{b-y^2} = \frac{e^y - e^{-y}}{y(e^y+e^{-y})}.$$

Or, il est aisé de s'assurer que cette dernière équation, dont le second membre

$$\frac{e^y - e^{-y}}{y(e^y+e^{-y})} = \frac{1 + \frac{y^2}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4.5} + \ldots}{1 + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots}$$

reste inférieur à l'unité pour toutes les valeurs réelles de y, n'admettra point de racines réelles, si, la constante a étant positive, le rapport $\frac{b}{a}$ est négatif, ou bien positif, mais inférieur à l'unité. Donc, si l'on a simultanément

$$(3) \qquad a > 0, \qquad \frac{b}{a} < 1,$$

l'équation (1) n'aura pas de racines imaginaires, dans lesquelles la partie réelle s'évanouisse.

Il est essentiel d'observer que les conditions ici indiquées, à l'aide des signes $>$ et $<$ placés entre deux quantités, doivent être étendues au cas même où ces quantités deviennent égales entre elles. C'est une convention qu'il est utile d'adopter pour simplifier les notations, et que nous admettrons en général dans la suite de cet article.

Si les conditions (3) n'étaient pas remplies, l'équation (2) pourrait admettre quelques racines réelles, qui, prises deux à deux, seraient égales, mais de signes contraires, et par conséquent l'équation (1) pourrait admettre des racines imaginaires qui seraient, deux à deux, de la forme

(4) $$z = \zeta\sqrt{-1}, \qquad z = -\zeta\sqrt{-1}.$$

Pour savoir si l'équation (1) admet des racines imaginaires, dans lesquelles la partie réelle ne soit pas nulle, on fera

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

x, y désignant deux variables réelles, et l'on tirera de cette équation

(5) $$\operatorname{tang}(x+y\sqrt{-1}) = \frac{a(x+y\sqrt{-1})}{(x+y\sqrt{-1})^2+b} = \frac{a(x+y\sqrt{-1})[(x-y\sqrt{-1})^2+b]}{(x^2-y^2+b)^2+4x^2y^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\sin 2x + \frac{1}{2}(e^{2y}-e^{-2y})\sqrt{-1}}{\cos 2x + \frac{1}{2}(e^{2y}+e^{-2y})} = \frac{a[(x^2+y^2)(x-y\sqrt{-1})+b(x+y\sqrt{-1})]}{(x^2-y^2+b)^2+4x^2y^2};$$

puis l'on en conclura, en supposant que les quantités x et y diffèrent de zéro,

(6) $$\left\{\begin{aligned} \frac{2\sin 2x}{e^{2y}+2\cos 2x+e^{-2y}} &= \frac{ax(b+x^2+y^2)}{(x^2-y^2+b)^2+4x^2y^2}, \\ \frac{e^{2y}-e^{-2y}}{e^{2y}+2\cos 2x+e^{-2y}} &= \frac{ay(b-x^2-y^2)}{(x^2-y^2+b)^2+4x^2y^2}, \end{aligned}\right.$$

et par suite

(7) $$\frac{\sin 2x}{2x}\,\frac{1}{b+x^2+y^2} = \frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}\,\frac{1}{b-x^2-y^2},$$

Or, cette dernière équation ne saurait être admise, si b est positif ou nul, c'est-à-dire si l'on a

(8) $$b > 0.$$

En effet, y n'étant pas nulle, la valeur numérique de la fraction

$$\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}$$

surpassera celle de $\frac{\sin 2x}{2x}$; et, si la condition (8) est remplie, la valeur numérique du rapport

$$\frac{1}{b-x^2-y^2}$$

sera encore égale ou supérieure à celle du rapport

$$\frac{1}{b+x^2+y^2}.$$

Donc, lorsque b est positif ou nul, l'équation (1) n'admet pas de racines imaginaires dans lesquelles la partie réelle diffère de zéro. Si les conditions (3) et (8) étaient simultanément vérifiées, c'est-à-dire si l'on avait à-la-fois

$$(9) \qquad a > b \quad \text{et} \quad b > 0,$$

l'équation (1) ne pourrait admettre que des racines réelles.

On peut encore déduire de l'équation (5) une autre conséquence digne de remarque. En effet, comme on a généralement

$$(10) \qquad \operatorname{tang} z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{\left(e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1}} = \frac{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}{\left(e^{2z\sqrt{-1}} + 1\right)\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$(11) \qquad e^{2z\sqrt{-1}} = \frac{1+\sqrt{-1}\operatorname{tang} z}{1-\sqrt{-1}\operatorname{tang} z},$$

on tirera évidemment de l'équation (5)

$$(12) \qquad e^{-2y+2x\sqrt{-1}} = \frac{(x+y\sqrt{-1})^2+b+(x+y\sqrt{-1})a\sqrt{-1}}{(x+y\sqrt{-1})^2+b-(x+y\sqrt{-1})a\sqrt{-1}}.$$

Si maintenant on égale entre eux les carrés des modules des expressions imaginaires que renferment les deux membres de la formule (12), on trouvera

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} e^{-4y} &= \frac{[(x+y\sqrt{-1})^2+b+(x+y\sqrt{-1})a\sqrt{-1}]\,[(x-y\sqrt{-1})^2+b-(x-y\sqrt{-1})a\sqrt{-1}]}{[(x+y\sqrt{-1})^2+b-(x+y\sqrt{-1})a\sqrt{-1}]\,[(x-y\sqrt{-1})^2+b+(x+y\sqrt{-1})a\sqrt{-1}]} \\ &= \frac{(x^2-y^2+b-ay)^2+x^2(2y+a)^2}{(x^2-y^2+b+ay)^2+x^2(2y-a)^2} \\ &= \frac{(x^2-y^2+b)^2+4x^2y^2+a^2(x^2+y^2)+2ay(x^2+y^2-b)}{(x^2-y^2+b)^2+4x^2y^2+a^2(x^2+y^2)-2ay(x^2+y^2-b)}. \end{aligned} \right.$$

Or, l'exponentielle qui forme le premier membre de l'équation (13) étant nécessairement une quantité positive qui reste inférieure à l'unité pour des valeurs positives de la variable y, et devient supérieure à l'unité pour des valeurs négatives de la même variable, on conclura de l'équation (13) que la différence entre le polynome

$$(x^2-y^2+b-ay)^2+x^2(2y+a)^2=(x^2-y^2+b)^2+4x^2y^2+a^2(x^2+y^2)+2ay(x^2+y^2-b),$$

et le polynome

$$(x^2-y^2+b+ay)^2+x^2(2y-a)^2=(x^2-y^2+b)^2+4x^2y^2+a^2(x^2+y^2)-2ay(x^2+y^2-b),$$

c'est-à-dire le produit

$$4ay(x^2+y^2-b),$$

doit être une quantité de même signe que $-y$. On doit donc avoir, pour toutes les valeurs de y différentes de zéro,

$$(14) \qquad a(x^2+y^2-b)<0.$$

D'ailleurs, si l'on suppose

$$(15) \qquad b<0,$$

la condition (14) ne pourra être vérifiée à moins que l'on n'ait en même temps

$$a<0.$$

Donc, si l'on avait à-la-fois

$$(16) \qquad a>0 \quad \text{et} \quad b<0,$$

l'équation (1) ne pourrait admettre que des racines réelles.

Il est bon d'observer que les formules (9) et (16) sont comprises dans les suivantes

$$(3) \qquad a>0 \quad \text{et} \quad \frac{b}{a}<0.$$

Donc, toutes les fois que ces dernières conditions seront vérifiées, l'équation (1) n'admettra pas de racines imaginaires.

Nous remarquerons, en terminant ce paragraphe, que l'équation (1) peut s'écrire comme il suit

$$(17) \qquad (z^2+b)\sin z-az\cos z=0.$$

En la présentant sous cette forme, et supposant les conditions (16) remplies, on reconnaîtra qu'elle coïncide avec l'équation qui sert à déterminer le mouvement de la chaleur dans une barre cylindrique ou prismatique d'une petite épaisseur.

§ 5.e *Sur les racines de l'équation* $\operatorname{tang} z = \frac{a}{\sqrt{-1}} \operatorname{tang}(cz\sqrt{-1})$.

Considérons encore l'équation

$$\operatorname{tang} z = \frac{a}{\sqrt{-1}} \operatorname{tang}(cz\sqrt{-1}), \tag{1}$$

qu'on peut aussi présenter sous la forme

$$\operatorname{tang} z = a\, \frac{e^{cz} - e^{-cz}}{e^{cz} - e^{-cz}}. \tag{2}$$

On reconnaîtra facilement qu'elle a une infinité de racines réelles, qui, prises deux à deux, sont égales, mais de signes contraires, et dont l'une se trouve renfermée entre les limites

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

n désignant un nombre entier quelconque. De plus, comme il suffit de remplacer z par $z\sqrt{-1}$, pour que l'équation (2) se transforme dans la suivante

$$\operatorname{tang} cz = \frac{1}{a}\, \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}, \tag{3}$$

il est clair que l'équation (2) aura encore une infinité de racines imaginaires qui seront deux à deux de la forme

$$z = \zeta\sqrt{-1}, \qquad z = -\zeta\sqrt{-1},$$

[ζ désignant une quantité réelle], et dans l'une desquelles le coëfficient de $\sqrt{-1}$ se trouvera compris entre les deux limites

$$\frac{1}{c}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \frac{1}{c}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

J'ajoute maintenant que l'équation proposée n'aura pas de racines imaginaires, dans les-

quelles la partie réelle diffère de zéro ; et en effet, si l'on remplace z par $x+y\sqrt{-1}$, x et y étant des variables réelles, cette équation donnera

$$(4)\qquad \operatorname{tang}(x+y\sqrt{-1})=\frac{a}{\sqrt{-1}}\operatorname{tang}(cx\sqrt{-1}-cy),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5)\qquad \frac{\sin 2x+\frac{1}{2}(e^{2y}-e^{-2y})\sqrt{-1}}{\cos 2x+\frac{1}{2}(e^{2y}+e^{-2y})}=a\,\frac{\frac{1}{2}(e^{2cx}-e^{-2cx})+\sqrt{-1}\sin 2cy}{\frac{1}{2}(e^{2cx}+e^{-2cx})+\cos 2cy},$$

et par suite

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{2\sin 2x}{e^{2y}+2\cos 2x+e^{-2y}} &= a\,\frac{e^{2cx}-e^{-2cx}}{e^{2cx}+2\cos 2cy+e^{-2cx}},\\ \frac{e^{2y}-e^{-2y}}{e^{2y}+2\cos 2x+e^{-2y}} &= a\,\frac{2\sin 2cy}{e^{2cx}+2\cos 2cy+e^{-2cx}}.\end{aligned}\right.$$

Or, on tire de ces dernières, lorsqu'on suppose les valeurs de x et de y différentes de zéro,

$$(7)\qquad \frac{\sin 2x}{2x}\,\frac{\sin 2cy}{2cy}=\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}\,\frac{e^{2cx}-e^{-2cx}}{4cx}.$$

D'ailleurs, l'équation (7) ne saurait être admise, puisque des quatre rapports

$$\frac{\sin 2x}{2x},\quad \frac{\sin 2cy}{2cy},\quad \frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y},\quad \frac{e^{2cx}-e^{-2cx}}{4cx},$$

les deux premiers sont inférieurs, et les seconds supérieurs à l'unité [abstraction faite des signes]. Donc, dans toutes les racines de l'équation (2), la partie réelle x, ou le coëfficient y de $\sqrt{-1}$ se réduisent à zéro. En d'autres termes, cette équation a seulement des racines réelles, et des racines imaginaires dont la partie réelle s'évanouit.

Lorsqu'on réduit les constantes a et c à ± 1, les équations (2) et (3) coïncident toutes deux avec l'une des suivantes

$$(8)\qquad \operatorname{tang} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}},\qquad\qquad (9)\qquad \operatorname{tang} z=-\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}.$$

Donc chacune de ces dernières admet une infinité de racines, qui, prises quatre à quatre, sont de la forme

(10) $z=\zeta$, $\quad z=-\zeta$. $\quad z=\zeta\sqrt{-1}$, $\quad z=-\zeta\sqrt{-1}$,

ζ désignant une quantité positive; et n'a point de racines imaginaires dans lesquelles la partie réelle diffère de zéro. La remarque que l'on vient de faire est très-utile dans la théorie des vibrations des lames élastiques, attendu que la formule à l'aide de laquelle on détermine ces vibrations, a pour second membre une fonction des racines des équations (8) et (9).

§ 6.e *Sur les racines de l'équation* $\tang cz=f(z)$.

Considérons maintenant l'équation

(1) $$\tang cz=f(z),$$

c étant une constante réelle, que l'on peut toujours réduire, en changeant, s'il est nécessaire, les signes des deux membres, à une quantité positive, et $f(z)$ désignant une fonction quelconque de la variable z. Si cette fonction, étant réelle, conserve une valeur finie, toutes les fois qu'on attribue à z une valeur positive ou négative, et supérieure (abstraction faite du signe) à une limite donnée l, l'équation (1) aura certainement une infinité de racines réelles. En effet, désignons par n un nombre entier quelconque supérieur à la somme

$$\frac{l}{\pi}+\frac{1}{2}.$$

Comme on aura

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi>l,$$

il est clair que, si l'on fait varier z

depuis $z=\frac{1}{c}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$ jusqu'à $z=\frac{1}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$,

ou depuis $z=-\frac{1}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ jusqu'à $z=-\frac{1}{c}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$,

dans l'équation (1) présentée sous la forme

(2) $$\tang cz-f(z)=0,$$

le premier membre passera, en même temps que le terme $\tang cz$, de l'infini négatif à l'infini positif, ou réciproquement. Donc il s'évanouira dans l'intervalle; d'où

il résulte que l'équation (1) admettra au moins une racine positive comprise entre les limites

$$\frac{1}{c}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, \quad \frac{1}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

et une racine négative comprise entre les limites

$$-\frac{1}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad -\frac{1}{c}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi.$$

Donc, puisque le nombre entier n peut croître indéfiniment, l'équation (1) admettra une infinité de racines réelles, les unes positives, les autres négatives.

Il est important d'observer que la limite l existe, toutes les fois que les racines réelles de l'équation

(3) $$\frac{1}{f(z)}=0,$$

sont en nombre fini. Donc, si cette condition est remplie, les racines réelles de l'équation (1) seront au contraire en nombre infini. C'est ce qui arrivera en particulier, si l'on prend pour $f(z)$ une fonction réelle et rationnelle de la variable z, c'est-à-dire si l'on suppose

(4) $$f(z)=\frac{\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)},$$

$\mathrm{f}(z)$ et $\mathrm{F}(z)$ désignant deux fonctions réelles et entières de la même variable. Alors le nombre l ne sera autre chose qu'une limite supérieure aux valeurs numériques des racines réelles de l'équation

(5) $$\mathrm{F}(z)=0.$$

Si, pour fixer les idées, on prend successivement

$$f(z)=z, \quad f(z)=az, \quad f(z)=az+b, \quad f(z)=\frac{az}{z^2+b}, \quad f(z)=a\,\frac{e^{cz}-e^{-cz}}{e^{cz}+e^{-cz}},$$

et, si l'on remplace en même temps c par l'unité dans le premier membre de l'équation (1), on se trouvera ainsi ramené aux équations que nous avons déjà traitées, et l'on reconnaîtra immédiatement que chacune d'elles admet une infinité de racines réelles positives et de racines réelles négatives.

Revenons maintenant au cas où, la constante c étant positive, la fonction $f(z)$, a

une valeur quelconque. Alors, si l'on remplace z par $x+y\sqrt{-1}$, x et y étant des variables réelles, on pourra supposer

$$(6)\qquad f(x+y\sqrt{-1})=P+Q\sqrt{-1},$$

P, Q désignant des fonctions réelles des variables x, y; et l'équation (1) donnera

$$(7)\qquad P+Q\sqrt{-1}=\text{tang}(cx+cy\sqrt{-1})=\frac{\sin 2cx+\frac{1}{2}(e^{2cy}-e^{-2cy})\sqrt{-1}}{\cos 2cx+\frac{1}{2}(e^{2cy}+e^{-2cy})},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8)\qquad P=\frac{2\sin 2cx}{e^{2cy}+2\cos 2cx+e^{-2cy}},\quad Q=\frac{e^{2cy}-e^{-2cy}}{e^{2cy}+\cos 2cx+e^{-2cy}};$$

puis l'on en conclura, pour des valeurs de x et de y, différentes de zéro,

$$(9)\qquad \frac{\sin 2cx}{2cx}\,\frac{Q}{y}=\frac{e^{2cy}-e^{-2cy}}{4cy}\,\frac{P}{x}.$$

Or, comme la fraction

$$(10)\qquad \frac{e^{2cy}-e^{-2cy}}{4cy}=1+\frac{(2cy)^2}{1.2.3}+\frac{(2cy)^4}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}\ldots,$$

toujours supérieure à l'unité, surpasse, à plus forte raison, la valeur numérique du rapport $\frac{\sin 2cx}{2cx}$, il est clair que l'équation (9) ne pourra subsister, si les fonctions P, Q sont telles que, pour toutes les valeurs possibles des variables réelles x, y, la valeur numérique du rapport $\frac{Q}{y}$ demeure constamment égale ou inférieure à celle du rapport $\frac{P}{x}$; ce qui arrivera, si l'on a constamment

$$(11)\qquad \left(\frac{P}{x}\right)^2-\left(\frac{Q}{y}\right)^2>0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12)\qquad (Py+Qx)\,(Py-Qx)>0.$$

Donc, si cette dernière condition est remplie, indépendamment des valeurs attribuées aux variables réelles x, y, alors, dans toutes les racines de l'équation (1), la partie réelle ou le coëfficient de $\sqrt{-1}$ s'évanouira; et cette équation n'aura pas de racines imaginaires qui ne soient de la forme

$$z = \pm \zeta\sqrt{-1},$$

ζ désignant une quantité réelle.

Si, la condition (12) étant remplie pour toutes les valeurs réelles de x et de y, la quantité P se réduit, pour une valeur nulle de x, à une fonction de y qui ne puisse jamais s'évanouir, alors la première des formules (8) ne pourra subsister pour $x=0$; et par conséquent l'équation (1), n'admettant point de racines imaginaires de la forme $\pm\zeta\sqrt{-1}$, n'aura que des racines réelles.

Si la condition (12) se vérifie, toutes les fois qu'on attribue à x des valeurs réelles comprises entre deux limites données x_1, x_2, et à y des valeurs réelles comprises entre deux autres limites y_1, y_2; on pourra seulement affirmer que l'équation (1) n'admet pas de racines imaginaires dans lesquelles la partie réelle x, et le coëfficient y de $\sqrt{-1}$, obtiennent des valeurs différentes de zéro, et respectivement comprises entre les limites

$$x=x_1, \qquad x=x_2; \qquad y=y_1, \qquad y=y_2.$$

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit réelle. Alors l'équation

$$(13) \quad P+Q\sqrt{-1}=f(x+y\sqrt{-1})=f(x)+\frac{y\sqrt{-1}}{1}f'(x)-\frac{y^2}{1.2}f''(x)-\frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3}f'''(x)+\text{etc}\ldots,$$

entraînera les deux suivantes

$$(14) \quad \begin{cases} P=f(x)-\dfrac{y^2}{1.2}f''(x)+\dfrac{y^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(x)-\text{etc}\ldots, \\ \dfrac{Q}{y}=f'(x)-\dfrac{y^2}{1.2.3}f'''(x)+\text{etc}\ldots \end{cases}$$

Par suite, si l'on fait converger y vers la limite zéro, la quantité P convergera vers la limite $f(x)$, et le rapport $\frac{Q}{y}$ vers la limite $f'(x)$. Donc, si l'on pose $y=0$ dans la formule (12), après avoir divisé les deux membres par y^2, elle donnera

$$(15) \qquad [f(x)+xf'(x)]\,[f(x)-xf'(x)]>0.$$

Pour que la condition (12) se vérifie indépendamment des valeurs attribuées aux variables réelles x, y, il sera nécessaire, et il suffira, 1.° que la condition (15) soit remplie pour toutes les valeurs réelles de x; 2.° que l'équation

(16) $$(Py+Qx)\,(Py-Qx)=0,$$

résolue par rapport à y, ne fournisse jamais de racines réelles qui ne soient, deux à deux, égales entre elles. Ajoutons que la condition (15) sera remplie, si l'équation

(17) $$[f(x)+xf'(x)]\,[f(x)-xf'(x)]=0$$

admet seulement des racines imaginaires, ou des racines réelles doubles, quadruples, etc..., et si de plus la quantité

(18) $$f(0)$$

obtient une valeur différente de zéro. Dans le cas particulier où cette quantité s'évanouit, la formule générale

(19) $$f(x)=f(0)+xf'(\theta x),$$

qui subsiste toujours, pour une valeur réelle de θ comprise entre les limites $0, 1$, se réduit simplement à

$$f(x)=xf'(\theta x),$$

et la condition (15), réduite elle-même à la forme

(20) $$[f'(\theta x)]^2-[f'(x)]^2>0,$$

ne peut être satisfaite qu'autant que la valeur numérique de la fonction $f'(x)$ devient un maximum pour $x=0$.

Il est facile d'appliquer ces principes généraux aux cas où l'on suppose que la fonction $f(z)$ est entière ou même rationnelle, attendu que, dans les deux hypothèses, les premiers membres des formules (12), (15), (16) et (17) se réduisent immédiatement, ou du moins peuvent être réduits à des fonctions entières des variables x, y, ou de la seule variable x.

La formule (11) et celles qui s'en déduisent ne sont pas les seules qui puissent servir à fixer la nature des racines de l'équation (1). En effet, si, dans cette équation, l'on substitue à la fonction $\tang cz$ sa valeur en exponentielles imaginaires, savoir

(21) $$\operatorname{tang} cz=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{2cz\sqrt{-1}}-1}{e^{2cz\sqrt{-1}}+1},$$

on en tirera

(22) $$e^{2cz\sqrt{-1}} = \frac{1+\sqrt{-1}\,f(z)}{1-\sqrt{-1}\,f(z)},$$

puis, en posant $z = x + y\sqrt{-1}$,

(23) $$e^{-2cy}(\cos 2cx + \sqrt{-1}\sin 2cx) = \frac{1-Q+P\sqrt{-1}}{1+Q-P\sqrt{-1}},$$

Enfin, si l'on égale entre eux les modules des expressions imaginaires qui forment les deux membres de la formule (23), on trouvera

(24) $$e^{-2cy} = \sqrt{\left[\frac{(1-Q)^2+P^2}{(1+Q)^2+P^2}\right]},$$

ou, ce qui revient au même,

(25) $$e^{-4cy} = \frac{(1-Q)^2+P^2}{(1+Q)^2+P^2}.$$

Or, l'équation (25) ne pourra évidemment subsister, pour des valeurs de la variable y différentes de zéro, si l'on a pour des valeurs positives de cette variable

$$\frac{(1-Q)^2+P^2}{(1+Q)^2+P^2} > 1,$$

et, pour des valeurs négatives de y,

$$\frac{(1-Q)^2+P^2}{(1+Q)^2+P^2} < 1,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on a, pour des valeurs positives ou négatives de la variable y,

$$\frac{1}{y}\left\{\frac{(1-Q)^2+P^2}{(1+Q)^2+P^2} - 1\right\} > 0,$$

ou plus simplement

(26) $$\frac{Q}{y} < 0.$$

Donc, si la condition (26) est remplie, indépendamment des valeurs attribuées aux variables réelles x, y, le coëfficient de $\sqrt{-1}$ sera nul, dans toutes les racines de l'équation (1), et cette équation n'aura pas de racines imaginaires.

Si la condition (26) était remplie, non pas en général, mais pour les systêmes de va-

leurs réelles de x et de y comprises entre certaines limites, on pourrait seulement affirmer que l'équation (1) n'admet pas de racines imaginaires, dans lesquelles la partie réelle et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ seraient renfermés entre ces limites.

L'une des conditions (26) ou (11) sera nécessairement remplie toutes les fois que l'on aura

$$\frac{P}{x}-\frac{Q}{y}>0. \tag{27}$$

En effet, supposons que, pour des valeurs de x et de y comprises entre certaines limites, la formule (27) se vérifie. Alors, ou la condition (26) sera elle-même vérifiée; ou la quantité $\frac{Q}{y}$ sera positive, et par suite on pourra en dire autant, non-seulement de la fraction $\frac{P}{x}$, qui, en vertu de la condition (27), devra surpasser le rapport $\frac{Q}{y}$, mais encore de la somme

$$\frac{P}{x}+\frac{Q}{y}.$$

Or, si l'on multiplie par cette dernière somme les deux membres de la formule (27), on reproduira la formule (11). Cela posé, il est clair que, dans l'une et l'autre hypothèses, toutes les racines imaginaires de l'équation (1), qui ne seront pas de la forme $\pm\zeta\sqrt{-1}$, offriront des parties réelles et des coëfficients de $\sqrt{-1}$ situés hors des limites données. Si la condition (27) était remplie pour toutes les valeurs possibles des variables x et y, l'équation (1) n'admettrait que des racines réelles, ou des racines imaginaires de la forme $\pm\zeta\sqrt{-1}$.

On pourrait joindre aux formules (26) et (27) une multitude d'autres formules propres à signaler dans l'équation (1), toutes les fois qu'elles se trouveraient vérifiées, l'absence de certaines racines. Ainsi, par exemple, comme, en vertu de la formule (24), on aura, pour toutes les valeurs de y différentes de zéro,

$$\frac{e^{2cy}-e^{-2cy}}{4cy}=\frac{Q}{cy}\,\frac{1}{\sqrt{[(1+Q)^2+P^2]}.\sqrt{[(1-Q)^2+P^2]}}, \tag{28}$$

et par suite

$$\frac{Q}{cy}\,\frac{1}{\sqrt{[(1+Q)^2+P^2]}.\sqrt{[(1-Q)^2+P^2]}}>1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{Q}{y}>c\sqrt{[(1+Q)^2+P^2]}.\sqrt{[(1-Q)^2+P^2]},$$

il est clair que, si la condition

(29) $$\frac{Q}{y} < c\sqrt{[(1+Q)^2+P^2]}.\sqrt{[(1-Q)^2+P^2]},$$

se trouve remplie, indépendamment des valeurs attribuées aux variables x et y, l'équation (1) n'aura pas de racines imaginaires.

Observons encore que l'équation (23), qui peut être présentée sous la forme

(30) $$e^{-2cy}(\cos 2cx+\sqrt{-1}\sin 2cx)=\frac{(1+P\sqrt{-1})^2-Q^2}{(1+Q)^2+P^2},$$

entraîne les deux suivantes

(31) $$e^{-2cy}\cos 2cx=\frac{1-P^2-Q^2}{(1+Q)^2+P^2}, \qquad e^{-2cy}\sin 2cx=\frac{2P}{(1+Q)^2+P^2};$$

et que l'on tire de ces dernières, combinées avec la formule (24),

(32) $$\cos 2cx=\frac{1-P^2-Q^2}{\sqrt{[(1+Q)^2+P^2]}.\sqrt{[(1-Q)^2+P^2]}}, \sin 2cx=\frac{2P}{\sqrt{[(1+Q)^2+P^2]}.\sqrt{[(1-Q)^2+P^2]}}.$$

On aura en conséquence, pour toutes les valeurs de x différentes de zéro,

(33) $$\frac{\sin 2cx}{2cx}=\frac{P}{cx}\frac{1}{\sqrt{[(1+Q)^2+P^2]}.\sqrt{[(1-Q)^2+P^2]}}.$$

Donc, puisque le rapport

$$\frac{\sin 2cx}{2cx}$$

est toujours inférieur à l'unité [abstraction faite du signe], on pourra en dire autant, si la variable x n'est pas nulle, de la fraction

$$\frac{P}{cx}\frac{1}{\sqrt{[(1+Q)^2+P^2]}.\sqrt{[(1-Q)^2+P^2]}}.$$

Donc, si la condition

(34) $$\left(\frac{P}{x}\right)^2 > c^2[(1+Q)^2+P^2][(1-Q)^2+P^2]$$

se trouve remplie, indépendamment des valeurs attribuées aux variables x, y, l'équa-

tion (1) n'aura pas de racines imaginaires, dans lesquelles la partie réelle diffère de zéro.

En général, soit

$$(35) \qquad \varphi[x, y, e^{2cy}, \cos 2cx, \sin 2cx]$$

une fonction des quantités x, y, e^{2cy}, $\cos 2cx$, $\sin 2cx$, qui, par sa nature, doive toujours rester supérieure à un certain minimum A, ou inférieure à un certain maximum B; et désignons par

$$\psi(x, y)$$

ce que devient l'expression (35), quand on y substitue, pour e^{2cy}, $\cos 2cx$ et $\sin 2cx$, leurs valeurs tirées des formules (24) et (32). Il est clair que, si la condition

$$(36) \qquad \psi(x, y) < A,$$

ou

$$(37) \qquad \psi(x, y) > B,$$

se trouve remplie pour toutes les valeurs de x et de y comprises entre des limites données, l'équation (1) n'admettra pas de racines imaginaires, dans lesquelles la partie réelle et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ soient renfermés entre ces limites.

Il est bon de remarquer, 1.° que la formule (26) ne peut être vérifiée, sans que la formule (29) ne le soit aussi; 2.° que les formules (29) et (34), lorsqu'elles ont lieu simultanément, entraînent la formule (11).

Au reste, l'utilité des diverses formules analogues à celles que nous venons d'établir dépend surtout de leur simplicité; et, sous ce rapport, les formules (26) et (27) paraissent préférables à toutes les autres.

Concevons à présent que, dans l'équation (1), la fonction $f(z)$ soit réelle, et se présente sous la forme fractionnaire

$$(4) \qquad f(z) = \frac{\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)}.$$

Posons d'ailleurs

$$(38) \qquad \mathrm{f}(x + y\sqrt{-1}) = r + s\sqrt{-1}, \qquad \mathrm{F}(x + y\sqrt{-1}) = R + S\sqrt{-1},$$

r, s, R, S désignant des fonctions réelles des variables x, y. On trouvera

$$(39) \qquad f(x + y\sqrt{-1}) = \frac{\mathrm{f}(x+y\sqrt{-1})}{\mathrm{F}(x+y\sqrt{-1})} = \frac{\mathrm{f}(x+y\sqrt{-1}).\mathrm{F}(x-y\sqrt{-1})}{\mathrm{F}(x+y\sqrt{-1}).\mathrm{F}(x-y\sqrt{-1})},$$

ou, ce qui revient au même,

(40) $$f(x+y\sqrt{-1})=\frac{(r+s\sqrt{-1})(R-S\sqrt{-1})}{(R+S\sqrt{-1})(R-S\sqrt{-1})}=\frac{Rr+Ss+(Rs-Sr)\sqrt{-1}}{R^2+S^2},$$

et l'on en conclura

(41) $$P=\frac{Rr+Ss}{R^2+S^2},\qquad Q=\frac{Rs-Sr}{R^2+S^2}.$$

Par suite, les formules (11) et (27) pourront être réduites à

(42) $$\frac{Rs-Sr}{y}<0,$$

(43) $$\frac{Rr+Ss}{x}-\frac{Rs-Sr}{y}>0.$$

Donc l'équation

(44) $$\operatorname{tang} cz=\frac{f(z)}{F(z)}$$

n'aura que des racines réelles, si le rapport

(45) $$\frac{Rs-Sr}{y},$$

est négatif; et elle n'admettra pas de racines imaginaires dans lesquelles la partie réelle diffère de zéro, si la valeur numérique du même rapport est inférieure à celle de la fraction

(46) $$\frac{Rr+Ss}{x}.$$

Il est bon d'observer, en passant, 1.° que, la fonction $F(x)$ étant supposée réelle, le produit des deux facteurs

$$F(x+y\sqrt{-1}),\qquad F(x-y\sqrt{-1})$$

est toujours une quantité réelle et positive, égale au carré du module de chacun d'eux, en sorte qu'on a généralement

(47) $$F(x+y\sqrt{-1}).F(x-y\sqrt{-1})>0;$$

2.° que, pour obtenir les binomes

$$(48)\qquad Rr + Ss\,,\qquad Rs - Sr\,,$$

renfermés dans les formules (42) et (43), il suffit de chercher la partie réelle et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ dans le développement du produit

$$(49)\qquad \mathrm{f}(x+y\sqrt{-1})\,.\,\mathrm{F}(x-y\sqrt{-1})\,.$$

Ajoutons qu'en vertu de la formule (4), l'équation (22) devient

$$(50)\qquad e^{2cz\sqrt{-1}} = \frac{\mathrm{F}(z)+\sqrt{-1}\,\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)+\sqrt{-1}\,\mathrm{f}(z)}\,.$$

Il pourrait arriver que le binome

$$(51)\qquad \mathrm{F}(z)+\sqrt{-1}\,\mathrm{f}(z)$$

fût décomposable en facteurs imaginaires de même forme que lui, en sorte qu'on eût

$$(52)\qquad \mathrm{F}(z)+\sqrt{-1}\,\mathrm{f}(z) = [\mathrm{F}_1(z)+\sqrt{-1}\,\mathrm{f}_1(z)]\,[\mathrm{F}_2(z)+\sqrt{-1}\,\mathrm{f}_2(z)]\ldots$$

Admettons cette hypothèse, et posons en outre

$$(53)\qquad \begin{cases} \mathrm{f}_1(x+y\sqrt{-1}) = r_1 + s_1\sqrt{-1}\,, & \mathrm{f}_2(x+y\sqrt{-1}) = r_2 + s_2\sqrt{-1}\,, \text{ etc...,} \\ \mathrm{F}_1(x+y\sqrt{-1}) = R_1 + S_1\sqrt{-1}\,, & \mathrm{F}_2(x+y\sqrt{-1}) = R_2 + S_2\sqrt{-1}\,, \text{ etc...,} \end{cases}$$

r_1, s_1; r_2, s_2, etc..., R_1, S_1; R_2, S_2, etc..., désignant des fonctions réelles des variables x, y. L'équation (50) se présentera sous la forme

$$(54)\qquad e^{2cz\sqrt{-1}} = \frac{\mathrm{F}_1(z)+\sqrt{-1}\,\mathrm{f}_1(z)}{\mathrm{F}_1(z)-\sqrt{-1}\,\mathrm{f}_1(z)}\;\frac{\mathrm{F}_2(z)+\sqrt{-1}\,\mathrm{f}_2(z)}{\mathrm{F}_2(z)-\sqrt{-1}\,\mathrm{f}_2(z)}\ldots\,,$$

et l'on en tirera

$$(55)\qquad e^{-2cy}(\cos 2cx\sqrt{-1}\sin 2cx) = \frac{R_1-s_1+(S_1+r_1)\sqrt{-1}}{R_1+s_1+(S_1-r_1)\sqrt{-1}}\;\frac{R_2-s_2+(S_2+r_2)\sqrt{-1}}{R_2+s_2+(S_2-r_2)\sqrt{-1}}\ldots$$

Enfin, si l'on égale entre eux les modules des expressions imaginaires qui forment les deux membres de la formule (55), ou plutôt les carrés de ces modules, on trouvera

(56) $$e^{-4cy} = \frac{(R_1-s_1)^2+(S_1+r_1)^2}{(R_1+s_1)^2+(S_1-r_1)^2}\,\frac{(R_2-s_2)^2+(S_2+r_2)^2}{(R_2+s_2)^2+(S_2-r_2)^2}\ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

(57) $$e^{-4cy} = \left\{1 - 4\,\frac{R_1s_1-S_1r_1}{(R_1+s_1)^2+(S_1-r_1)^2}\right\}\left\{1 - 4\,\frac{R_2s_2-S_2r_2}{(R_2+s_2)^2+(S_2-r_2)^2}\right\}\ldots.$$

Or, il est clair que l'équation (1) ne pourra subsister, pour des valeurs de y différentes de zéro, si l'on a simultanément, pour des valeurs positives de la variable y

$$R_1s_1 - S_1r_1 < 0, \qquad R_2s_2 - S_2r_2 < 0, \qquad \text{etc...},$$

et, pour des valeurs négatives de la même variable,

$$R_1s_1 - S_1r_1 > 0, \qquad R_2s_2 - S_2r_2 > 0, \qquad \text{etc...},$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on a, pour des valeurs positives ou négatives de y,

(58) $$\frac{R_1s_1-S_1r_1}{y} < 0, \qquad \frac{R_2s_2-S_2r_2}{y} < 0, \qquad \text{etc....}$$

Donc, si ces dernières conditions se trouvent simultanément vérifiées indépendamment des valeurs attribuées aux variables réelles x, y, l'équation (54) n'aura pas de racines imaginaires.

Afin de montrer une application des formules qui précèdent, considérons l'équation que M. Poisson a donnée à la page 376 du XIXe Cahier du Journal de l'École royale polytechnique, c'est-à-dire l'équation à laquelle se rapporte la distribution de la chaleur dans une sphère composée de deux parties de matières différentes. Si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{ml}{a} = z, \quad \frac{a}{a'} = \lambda, \quad \frac{a\,l'}{a'\,l} = \mu, \quad b'l = h, \quad bl = k, \quad \beta(l+l') - 1 = \alpha,$$

cette équation deviendra

(59) $$\left\{\begin{aligned} &[\lambda(\lambda+\mu)z^2 - \alpha(h+1)]\,z\cos z\sin\mu z \\ &-[\lambda\alpha + (\lambda+\mu)(h+1)]\,z^2\cos z\cos\mu z \\ &+[\lambda(\lambda+\mu)(k-1)z^2 + \alpha(h-k+1)]\sin z\sin\mu z \\ &-[\lambda\alpha(k-1) - (\lambda+\mu)(h-k+1)]\,z\sin z\cos\mu z = 0, \end{aligned}\right.$$

λ, μ, h, k désignant des constantes positives, et α une contante réelle supérieure à -1. On aura par suite

(60) $$e^{2\mu z\sqrt{-1}} = \frac{F(z)+\sqrt{-1}\,f(z)}{F(z)-\sqrt{-1}\,f(z)}\;\frac{(\lambda+\mu)z+\alpha\sqrt{-1}}{(\lambda+\mu)z-\alpha\sqrt{-1}},$$

les valeurs de $F(z)$ et $f(z)$ étant déterminées par les équations

(61) $$\begin{cases} F(z) = \lambda z\,[z\cos z + (k-1)\sin z], \\ f(z) = z\cos z + (k-1)\sin z + h\,(z\cos z - \sin z). \end{cases}$$

Or, si l'on attribue à $F(z)$, $f(z)$ ces mêmes valeurs, et si l'on fait, pour abréger,

$$x+y\sqrt{-1}=u, \qquad x-y\sqrt{-1}=v,$$

le produit (49) se réduira évidemment à

(62) $$f(u)\,F(v) =$$

$$\lambda(x-y\sqrt{-1})\Big\{[u\cos u+(k-1)\sin u]\,[v\cos v+(k-1)\sin v]+h(u\cos u-\sin u)(v\cos v-\sin v)\Big\}$$
$$-\lambda k h\left\{(x-y\sqrt{-1})\sin u\sin v + uv\left(\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}\sqrt{-1}-\frac{\sin 2x}{2x}\right)\right\}.$$

De plus, si l'on divise par y le coëfficient de $\sqrt{-1}$ dans le produit en question, l'on obtiendra pour quotient la somme des trois quantités

(63) $$-\lambda[u\cos u + (k-1)\sin u]\,[v\cos v + (k-1)\sin v],$$

(64) $$-\lambda h\,(u\cos u - \sin u)\,(v\cos v - \sin v),$$

(65) $$\lambda k h\left\{\sin u\sin v - uv\frac{\sin(2y\sqrt{-1})}{2y\sqrt{-1}}\right\} = \frac{\lambda k h}{2}\left\{\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{2} - \cos 2x - (x^2+y^2)\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{2y}\right\}$$

Enfin, il est clair qu'en vertu de la formule (47), les produits (63) et (64), dans lesquels les coëfficients de $-\lambda$ et de $-\lambda h$ coïncident avec les carrés des modules des expressions imaginaires

$$(x+y\sqrt{-1})\cos(x+y\sqrt{-1}) + (k-1)\sin(x+y\sqrt{-1}),$$

$$(x+y\sqrt{-1})\cos(x+y\sqrt{-1}) - \sin(x+y\sqrt{-1}),$$

seront toujours des quantités négatives; et, quant au produit (65), comme on pourra le présenter sous la forme

$$-\lambda k h \left\{ y^2 \frac{e^{y}-e^{-y}}{2y} \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - \frac{e^{y}-e^{-y}}{2y} \right) + x^2 \left(\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y} - \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \right\},$$

il se réduira pareillement, dans tous les cas, à une quantité négative. Donc la condition (42) sera vérifiée pour les fonctions $F(z)$, $f(z)$ déterminées par les équations (61). D'ailleurs, si l'on remplace $F(z)$ par $(\lambda+\mu)z$, et $f(z)$ par α, la condition (42), réduite à

$$-\alpha < 0,$$

sera encore vérifiée, si α est positif. Donc alors elle sera remplie, pour les deux facteurs qui composent le second membre de l'équation (60), ou, en d'autres termes, les conditions (58) seront satisfaites pour cette dernière équation. Donc, lorsque la constante α sera positive, l'équation (60) n'admettra pas de racines imaginaires.

Revenons maintenant à l'équation (59). Cette équation pourra être réduite à

$$(66)\qquad \operatorname{tang}\mu z = \frac{(\lambda+\mu)z\,f(z)+\alpha F(z)}{(\lambda+\mu)zF(z)-\alpha f(z)},$$

les valeurs de $f(z)$ et de $F(z)$ étant toujours déterminées par les formules (61). Or, si l'on nomme $P \pm Q\sqrt{-1}$ le résultat de la substitution de $x \pm y\sqrt{-1}$ à la place de z, dans le second membre de l'équation (66), la différence

$$(67)\qquad \frac{P}{x} - \frac{Q}{y}$$

ne sera autre chose que le coëfficient de $\sqrt{-1}$ dans le développement du produit

$$(68)\qquad \frac{1}{xy}(x+y\sqrt{-1})(P-Q\sqrt{-1}) = \frac{1}{xy}u(P-Q\sqrt{-1}).$$

On aura d'ailleurs

$$(69)\qquad u(P-Q\sqrt{-1}) = u\,\frac{(\lambda+\mu)v\,f(v)+\alpha F(v)}{(\lambda+\mu)vF(v)-\alpha f(v)};$$

puis, en ayant égard aux formules (61), et faisant, pour abréger,

$$(70)\qquad [(\lambda+\mu)uF(u)-\alpha f(u)]\,[(\lambda+\mu)vF(v)-\alpha f(v)] = K^2 uv,$$

on trouvera

$$(71)\quad K^2 u(P - Q\sqrt{-1}) = \left\{(\lambda+\mu)\,\mathrm{f}(v) + \alpha\frac{\mathrm{F}(v)}{v}\right\}\left\{(\lambda+\mu)\,u^2\frac{\mathrm{F}(u)}{u} - \alpha\,\mathrm{f}(u)\right\}.$$

$$= \lambda(\lambda+\mu)^2(x+y\sqrt{-1})^2\left\{[u\cos u+(k-1)\sin u][v\cos v+(k-1)\sin v]+h(u\cos u-\sin u)(v\cos v-\sin v)-kh\sin u\sin v\right\}.$$

$$+\lambda(\lambda+\mu)^2 khuv\,(x+y\sqrt{-1})\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4}\sqrt{-1}\right)-(\lambda+\mu)\,\alpha\,\mathrm{f}(u)\,\mathrm{f}(v)$$

$$+\lambda^2(\lambda+\mu)\,\alpha\,(x+y\sqrt{-1})^2[u\cos u+(k-1)\sin u][v\cos v+(k-1)\sin v].$$

$$-\lambda\alpha^2\left\{[u\cos u+(k-1)\sin u][v\cos v+(k-1)\sin v]+h(u\cos u-\sin u)(v\cos v-\sin v)-kh\sin u\sin v\right\}.$$

$$-\lambda\alpha^2 kh\,(x+y\sqrt{-1})\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4}\sqrt{-1}\right),$$

et par suite

$$(72)\quad K^2\left(\frac{P}{x}-\frac{Q}{y}\right)=2\lambda(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+\lambda\alpha)[u\cos u+(k-1)\sin u][v\cos v+(k-1)\sin v]$$

$$+2\lambda(\lambda+\mu)^2 h\,(u\cos u-\sin u)\,(v\cos v-\sin v)$$

$$+\lambda kh\alpha^2\left(\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}-\frac{\sin 2x}{2x}\right)$$

$$+\lambda(\lambda+\mu)^2 kh\left[uv\left(\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}+\frac{\sin 2x}{2x}\right)-2\sin u\sin v\right].$$

Or, il est clair que des quatre produits, renfermés dans le second membre de l'équation (72), les trois premiers restent positifs, toutes les fois que les quantités $\lambda, \mu, h, k.$ et $1+\alpha$ sont elles-mêmes positives. Ajoutons que l'on peut en dire autant du quatrième produit, dans lequel le facteur

$$uv\left(\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}+\frac{\sin 2x}{2x}\right)-2\sin u\sin v=(x^2+y^2)\left(\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{4y}+\frac{\sin 2x}{2x}\right)-\left(\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}-\cos 2x\right)$$

$$=x^2+\frac{1}{2}x\sin 2x+\cos 2x-1+\frac{(2y)^2}{1.2}\left\{\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{1}{2}\right\}+\frac{(2y)^4}{1.2.3.4}\frac{x^2}{5}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(2y)^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}\left\{\frac{x^2}{2n+1}+\frac{2n}{4}-1\right\}+\text{etc.}\ldots\ldots$$

est encore positif, attendu que l'on a, pour des valeurs quelconques de x; et pour une valeur de n égale ou supérieure au nombre 2,

(73) $$x^2+\frac{1}{2}x\sin 2x+\cos 2x-1=\int_0^x x\left(2+\cos 2x-3\,\frac{\sin 2x}{2x}\right)dx>0,$$

(74) $$\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{x}\int_0^x (x^2-\sin^2 x)\,dx>0,$$ (75) $$\frac{x^2}{2n+1}+\frac{2n}{4}-1>0.$$

En effet, la condition (75) est évidemment satisfaite, dès que l'on suppose $n>2$. De plus, pour établir les formules (73) et (74), il suffit d'observer, 1.° que la fonction $x^2-\sin^2 x$ est toujours positive; 2.° que l'on peut en dire autant de la fonction

$$2+\cos 2x-3\,\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{4}{x}\int_0^x\left(1-\frac{x}{\operatorname{tang} x}\right)\sin^2 x\,dx,$$

qui s'évanouit pour $x=0$, croît ensuite, avec le binome $1-\frac{x}{\operatorname{tang} x}$, depuis $x=0$, jusqu'à $x=\frac{\pi}{2}$, et reste supérieure, quand on prend $x>\frac{\pi}{2}$, à la quantité

$$2-1-\frac{3}{\pi}>0.$$

Il suit de ces diverses remarques que la condition (27) sera vérifiée pour l'équation (66), tant que les quantités

$$\lambda,\ \mu,\ h,\ k \text{ et } 1+\alpha$$

resteront positives. Donc l'équation (66) ou (59) n'aura point, dans l'hypothèse admise, de racines imaginaires, à moins que ces racines ne soient de la forme $y\sqrt{-1}$.

Il reste à savoir dans quels cas on pourra satisfaire à l'équation (59) ou (60), en supposant

(76) $$z=y\sqrt{-1}.$$

Or, cette supposition réduira l'équation (60) à

(77) $$e^{-2\mu y}=\frac{F(y\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\,f(y\sqrt{-1})}{F(y\sqrt{-1})-\sqrt{-1}\,f(y\sqrt{-1})}\,\frac{(\lambda+\mu)y+\alpha}{(\lambda+\mu)y-\alpha};$$

puis, en prenant $\alpha=\theta-1$, et faisant, pour abréger,

(78) $$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{e^{\mu y}-e^{-\mu y}}{2\mu y}+\frac{\lambda}{\mu}\,\frac{e^{\mu y}+e^{-\mu y}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-\frac{e^{y}-e^{-y}}{2y}+k\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2y}\right)\\&\quad+h\,\frac{e^{\mu y}-e^{-\mu y}}{2\mu y}\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-\frac{e^{y}-e^{-y}}{2y}\right)=Y,\end{aligned}\right.$$

on tirera de la formule (77)

$$(79)\qquad \theta Y = -(h+1)\left(\frac{e^{\mu y}+e^{-\mu y}}{2} - \frac{e^{\mu y}-e^{-\mu y}}{2\mu y}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - \frac{e^{y}-e^{-y}}{2y}\right)$$
$$-\frac{\lambda}{\mu}\left\{h\,\frac{e^{\mu y}+e^{-\mu y}}{2} + (\lambda+\mu)y\,\frac{e^{\mu y}-e^{-\mu y}}{2}\right\}\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - \frac{e^{y}-e^{-y}}{2y}\right)$$
$$-k\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2y}\left\{\frac{e^{\mu y}+e^{\mu y}}{2} - \frac{e^{\mu y}-e^{-\mu y}}{2\mu y} + \lambda(\lambda+\mu)y^2\,\frac{e^{\mu y}-e^{-\mu y}}{2\mu y}\right\}.$$

De plus, comme chacune des quantités

$$\frac{e^{y}-e^{-y}}{2y},\quad \frac{e^{\mu y}-e^{-\mu y}}{2\mu y},\quad \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-\frac{e^{y}-e^{-y}}{2y},\quad \frac{e^{\mu y}+e^{-\mu y}}{2}-\frac{e^{\mu y}-e^{-\mu y}}{2\mu y},$$

est nécessairement positive, il est clair que, dans la formule (79), le coëfficient Y de θ sera positif, pour des valeurs positives de λ, μ, h, k, et le second membre négatif. Donc alors cette équation ne pourra subsister, à moins que l'on n'ait $\theta < 0$. Donc l'équation (59) ou (60) n'aura point de racines imaginaires, si les quantités

$$(80)\qquad \lambda,\ \mu,\ h,\ k \quad \text{et} \quad \theta = 1+\alpha$$

sont toutes positives; ce qui a effectivement lieu, dans la question de physique mathématique à laquelle cette équation se rapporte.

Il ne sera pas inutile d'observer que l'équation (59), dont toutes les racines sont réelles, comprend, comme cas particuliers, d'autres équations plus simples qui jouissent de la même propriété. Ainsi, par exemple, si l'on pose successivement

$$h = \infty,\qquad k = \infty,$$

on en tirera

$$(81)\qquad (\operatorname{tang} z - z)\left(\operatorname{tang}\mu z - \frac{\lambda+\mu}{\alpha}z\right) = 0,$$

$$(82)\qquad \operatorname{tang}\mu z = \frac{(\lambda+\mu+\lambda\alpha)z}{\lambda(\lambda+\mu)z^2-\alpha}.$$

On trouvera, au contraire, en posant $h = 0$ et $k = 0$

$$(83)\qquad \left(\operatorname{tang} z - \frac{(\lambda+\mu+\lambda\alpha)z}{\lambda(\lambda+\mu)z^2-\alpha}\right)(\operatorname{tang} z - z) = 0.$$

Les trois équations précédentes peuvent être réduites à celles que nous avons déjà considérées dans les paragraphes 2 et 4.

On trouvera encore, en supposant $\alpha = 0$,

(84) $$\lambda z^2 \cos z \sin \mu z - (h+1) z \cos z \cos \mu z + \lambda (k-1) z \sin z \sin \mu z + (h-k+1) \sin z \cos \mu z = 0,$$

en supposant $\alpha = \infty$,

(85) $$\lambda z^2 \cos z \cos \mu z + (h+1) z \cos z \sin \mu z + \lambda (k-1) z \sin z \cos \mu z - (h-k+1) \sin z \sin \mu z = 0,$$

en supposant $\mu = 1$,

(86) $$\left\{ \begin{array}{c} [\lambda(\lambda+\mu)(k-1)z^2 + \alpha(h-k+1)] \operatorname{tang}^2 z \\ + [\lambda(\lambda+\mu)z^2 - \alpha(h+1) - \lambda\alpha(k-1) + (\lambda+\mu)(h-k+1)] z \operatorname{tang} z \\ - [\lambda\alpha + (\lambda+\mu)(h+1)] z^2 = 0; \end{array} \right.$$

enfin, en divisant par h, et supposant $\frac{1}{h} = 0$, $\frac{k}{h} = 1$,

(87) $$\operatorname{tang} \mu z + \lambda \operatorname{tang} z = -\frac{\lambda+\mu}{\alpha} z (1 - \lambda \operatorname{tang} z . \operatorname{tang} \mu z).$$

ou, ce qui revient au même,

(88) $$\frac{\operatorname{tang} \mu z + \lambda \operatorname{tang} z}{1 - \lambda \operatorname{tang} z \operatorname{tang} \mu z} = \frac{\lambda+\mu}{1-\theta} z.$$

Chacune de ces diverses équations a toutes ses racines réelles, lorsque les quantités (80) sont toutes positives. De plus, si, dans la formule (88), on pose successivement $\theta = 1$, $\theta = \infty$, on obtiendra les deux équations

(89) $$1 - \lambda \operatorname{tang} z \operatorname{tang} \mu z = 0,$$

(90) $$\operatorname{tang} \mu z + \lambda \operatorname{tang} z = 0,$$

dont toutes les racines seront réelles, pour des valeurs positives des constantes λ et μ; ce qu'il serait facile de prouver directement, à l'aide de la condition (26), qui se trouve vérifiée quand on prend pour $f(z)$ une des deux fonctions

$$\frac{1}{\lambda \operatorname{tang} z}, \quad -\lambda \operatorname{tang} z.$$

Considérons encore l'équation

(91) $$a z \sin z = e^{-z\sqrt{-1}},$$

qui peut être présentée sous la forme

(92) $$\tang z = \frac{1}{a z + \sqrt{-1}}.$$

On aura, dans ce cas particulier,

$$\frac{P}{x} - \frac{Q}{y} = \frac{2a + \frac{1}{y}}{a^2 x^2 + (ay+1)^2},$$

et par conséquent la formule (27) se trouvera réduite à

(93) $$2a + \frac{1}{y} > 0.$$

De plus, comme, en prenant $z = y\sqrt{-1}$, on tire de l'équation (91)

(94) $$a = -\frac{2e^y}{y(e^y - e^{-y})},$$

il est clair que, si l'on attribue à la constante a des valeurs positives, l'équation (91) n'admettra point de racines imaginaires de la forme $y\sqrt{-1}$. D'ailleurs, dans cette hypothèse, la condition (93) sera vérifiée, pour toutes les valeurs positives de la variable y, et pour les valeurs négatives de la même variable situées entre les limites $-\infty$, $-\frac{1}{2a}$. Donc alors, dans toutes les racines imaginaires de l'équation (91), le coëfficient de $\sqrt{-1}$ sera nécessairement négatif, et renfermé entre les limites 0, $-\frac{1}{2a}$. Ajoutons que cette équation, qui peut s'écrire comme il suit

(95) $$a z \sin z - \cos z + \sqrt{-1} \sin z = 0,$$

aura une seule racine réelle, savoir $z = \frac{1}{a}$, ou n'en aura aucune, suivant que le rapport $\frac{1}{a}$ sera ou ne sera pas de la forme $n\pi$, n désignant un nombre entier quelconque.

§ 7.° *Sur les racines de l'équation* $\tang Z = f(z)$, *dans laquelle* Z *et* $f(z)$ *désignent deux fonctions distinctes de la variable* z.

Soient Z, $f(z)$ deux fonctions quelconques de la variable z, et considérons l'équation transcendante

$$\tang Z = f(z), \tag{1}$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme

$$\tang Z - f(z) = 0. \tag{2}$$

Il est facile de voir que cette équation aura une infinité de racines réelles, si, les fonctions Z, $f(z)$ étant supposées réelles, les racines réelles de l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0 \tag{3}$$

sont en nombre fini; et si de plus, tandis que la valeur numérique de z devient très-grande, la fonction Z s'approche indéfiniment, en restant continue, de l'une des limites $-\infty$, $+\infty$. En effet, concevons que ces conditions soient remplies. Alors, si l'on désigne par n un nombre entier très-considérable, on pourra satisfaire par des valeurs réelles de z, soit aux deux équations

$$Z = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad Z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \tag{4}$$

soit aux deux suivantes

$$Z = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad Z = -\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi; \tag{5}$$

et, si l'on nomme z_1, z_2, les valeurs dont il s'agit, il suffira de faire varier z entre les limites z_1, z_2, pour que le premier membre de l'équation (2) passe de l'infini positif à l'infini négatif, ou réciproquement. Donc ce premier membre s'évanouira dans l'intervalle, et l'équation (1) ou (2) aura au moins une racine réelle comprise entre les limites $z = z_1$, $z = z_2$. Donc, puisque le nombre n croît, avec les valeurs numériques de z_1 et de z_2, au-delà de toute limite, l'équation (1) admettra une infinité de racines réelles.

On ne pourrait plus en dire autant, si, pour de très-grandes valeurs numériques de la variable z, la valeur numérique de la fonction Z ne pouvait surpasser une certaine limite A. Ainsi, par exemple, dans l'équation

(6) $$z = \tang \frac{7z^5+30z^3+27z}{(1+z^2)(3+z^2)(9+z^2)} = \tang \frac{z(7z^2+9)}{(1+z^2)(9+z^2)},$$

que fournit la théorie de l'équilibre d'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation, la valeur numérique de la fonction

(7) $$Z = \frac{z(7z^2+9)}{(1+z^2)(9+z^2)}$$

ne peut surpasser un certain maximum

$$1,201\ldots = (0,7649\ldots)\frac{\pi}{2},$$

correspondant à la valeur réelle $2,828\ldots$ de la variable z, c'est-à-dire, à la racine réelle de l'équation

(8) $$81 + 99z^2 + 43z^4 - 7z^6 = 0.$$

Par conséquent, dans l'équation (6), la valeur numérique de la variable z supposée réelle, ne peut surpasser le nombre

$$\tang(76°, 49') = 2,583\ldots.$$

D'ailleurs, si l'on présente cette équation sous la forme

(9) $$\frac{z(7z^2+9)}{(1+z^2)(9+z^2)} - \arctang z = 0,$$

on reconnaîtra que le premier membre, qui s'évanouit pour $z=0$, et qui a pour dérivée la fonction

$$\frac{81+99z^2+43z^4-7z^6}{(1+z^2)^2(9+z^2)^2} - \frac{1}{1+z^2} = \frac{8z^4(3-z^2)}{(1+z^2)^2(9+z^2)^2},$$

décroît depuis $z=0$, jusqu'à $z=\sqrt{3}$, obtient, pour $z=\sqrt{3}=1,732\ldots$, une valeur minimum qui est nécessairement négative, et croît ensuite depuis $z=1,732\ldots$ jusqu'à $z=2,583\ldots$, en passant du négatif au positif. Donc l'équation (6) aura une seule racine réelle, comprise entre les limites $1,732\ldots$ et $2,583\ldots$; ce que M. Laplace avait déjà prouvé, mais par une autre méthode, dans le second volume de la mécanique céleste. La racine dont il s'agit a pour valeur très-approchée le nombre $2,5292\ldots$.

Revenons maintenant au cas où les fonctions Z, $f(z)$ ont des valeurs quelconques. Alors, si l'on remplace z par $x+y\sqrt{-1}$, x et y étant des variables réelles, on pourra supposer

(10) $$Z = M + N\sqrt{-1}, \qquad f(x+y\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1},$$

M, N, P, Q, désignant des fonctions réelles des variables x, y; et l'équation (1) donnera

(11) $$P + Q\sqrt{-1} = \operatorname{tang}(M + N\sqrt{-1}) = \frac{\sin 2M + \frac{1}{2}\left(e^{2N} - e^{-2N}\right)\sqrt{-1}}{\cos 2M + \frac{1}{2}\left(e^{2N} + e^{-2N}\right)},$$

ou, ce qui revient au même,

(12) $$P = \frac{2\sin 2M}{e^{2N} + 2\cos 2M + e^{-2N}}, \qquad Q = \frac{e^{2N} - e^{-2N}}{e^{2N} + 2\cos 2M + e^{-2N}};$$

puis, en attribuant aux variables x, y, des valeurs qui ne vérifient pas l'une des équations

(13) $$M = 0,$$ (14) $$N = 0,$$

on conclura des formules (12)

(15) $$\frac{\sin 2M}{2M}\,\frac{Q}{N} = \frac{e^{2N} - e^{-2N}}{4N}\,\frac{P}{M}.$$

Or, cette dernière équation ne pourra évidemment subsister, si les fonctions M, N, P, Q sont telles que, pour toutes les valeurs possibles des variables réelles x, y, la valeur numérique du rapport $\frac{Q}{N}$ demeure constamment inférieure à celle du rapport $\frac{P}{M}$; ce qui arrivera, si l'on a constamment

(16) $$\left(\frac{P}{M}\right)^2 - \left(\frac{Q}{N}\right)^2 > 0.$$

Donc, si cette dernière condition est vérifiée indépendamment des valeurs attribuées aux variables réelles x, y, alors, dans chacune des racines de l'équation (1), la partie réelle x, et le coëfficient y de $\sqrt{-1}$ vérifieront certainement ou l'équation (13) ou l'équation (14).

Si la condition (15) se trouvait vérifiée, non pas en général, mais simplement pour les

systèmes de valeurs réelles de x et de y, compris entre certaines limites, on pourrait seulement affirmer que, dans chacune des racines de l'équation (1), la partie réelle et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ sont situés hors de ces limites, toutes les fois qu'ils ne vérifient pas la formule (13) ou la formule (14).

Concevons maintenant que l'on tire de l'équation (1) la valeur de l'exponentielle $e^{2Z\sqrt{-1}}$, on en conclura

$$(17) \qquad e^{2Z\sqrt{-1}} = \frac{1+\sqrt{-1}f(z)}{1-\sqrt{-1}f(z)},$$

puis, en remplaçant z par $x+y\sqrt{-1}$,

$$(18) \qquad e^{-2N}(\cos 2M + \sqrt{-1}\sin 2M) = \frac{1-Q+P\sqrt{-1}}{1+Q-P\sqrt{-1}}.$$

Si de plus on égale entre eux les modules des expressions imaginaires qui forment les deux membres de l'équation (18), ou plutôt les carrés de ces modules, on trouvera

$$(19) \qquad e^{-4N} = \frac{(1-Q)^2+P^2}{(1+Q)^2+P^2}.$$

D'autre part, si l'on désigne par θ un nombre inférieur à l'unité, on aura, en vertu de la formule (49) du § 6,

$$e^{-4N} = 1 - 4Ne^{-4\theta N}, \qquad e^{-4\theta N} = \frac{1}{4N}\left(1 - e^{-4N}\right).$$

Par suite, on tirera de la formule (19), en supposant la valeur de N différente de zéro,

$$(20) \qquad \frac{1}{4N}\left\{1 - \frac{(1-Q)^2+P^2}{(1+Q)^2+P^2}\right\} = e^{-4\theta N} > 0,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{Q}{N} > 0.$$

Donc, si la condition

$$(21) \qquad \frac{Q}{N} < 0$$

se trouve remplie, indépendamment des valeurs attribuées aux variables x, y, alors, dans chacune des racines de l'équation (1), la partie réelle et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ vérifieront nécessairement la formule

(14) $$N = 0.$$

Si la condition (21) se trouvait satisfaite, non pas en général, mais simplement pour les systèmes de valeurs réelles de x et de y comprises entre certaines limites, on pourrait seulement affirmer que, dans chacune des racines de l'équation (1), la partie réelle et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ sont situés hors de ces limites, ou vérifient la formule (14).

L'une des conditions (16) ou (21) sera évidemment remplie, toutes les fois que l'on aura

(22) $$\frac{P}{M} - \frac{Q}{N} > 0.$$

Donc, si cette dernière condition est satisfaite pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y, l'équation (1) n'admettra que des racines pour lesquelles l'une des formules (13) et (14) sera vérifiée.

Si la condition (22) était satisfaite, non pas en général, mais simplement pour les systèmes de valeurs réelles de x et de y comprises entre certaines limites, on pourrait seulement affirmer que, dans chacune des racines de l'équation (1), la partie réelle et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ sont situés hors de ces limites, ou vérifient l'une des formules (13) et (14).

On pourrait encore, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans le § 6, découvrir une multitude de formules analogues aux formules (16) et (21), et qui seraient propres à signaler, dans l'équation (1), toutes les fois qu'elles se trouveraient vérifiées, l'absence de certaines racines.

Pour appliquer les principes exposés dans ce paragraphe à un exemple, considérons en particulier l'équation

(23) $$\operatorname{tang} z^2 = z,$$

à laquelle on ne peut évidemment satisfaire que par des valeurs réelles de z, ou par des valeurs imaginaires dans lesquelles la partie réelle diffère de zéro. La formule (21) et l'équation (14) donneront respectivement

(24) $$x < 0,$$ (25) $$xy = 0,$$

et l'on en conclura que, dans chacune des racines imaginaires de l'équation (23), la partie réelle est positive. Si à l'équation (23) on substituait la suivante

(26) $$\operatorname{tang} z^2 = z\sqrt{-1},$$

alors les formules (21) et (14) donneraient

(27) $y < 0$, (28) $xy = 0$;

et, comme évidemment l'équation (26) n'a point de racines réelles, on serait amené à conclure que le coëfficient de $\sqrt{-1}$ est positif dans toutes les racines de cette équation qui ne sont pas de la forme $y\sqrt{-1}$.

§ 8.° *Sur les racines de l'équation* $e^{Z\sqrt{-1}} = f(z)$.

Soient toujours Z, $f(z)$ deux fonctions quelconques de la variable z. Considérons d'ailleurs une équation transcendante qui renferme les lignes trigonométriques

$$\sin Z = \frac{e^{Z\sqrt{-1}} - e^{-Z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos Z = \frac{e^{Z\sqrt{-1}} + e^{-Z\sqrt{-1}}}{2}, \quad \tang Z = \frac{\sin Z}{\cos Z}, \quad \text{etc...};$$

et supposons que cette équation, résolue par rapport à l'exponentielle $e^{Z\sqrt{-1}}$, se réduise à

(1) $$e^{Z\sqrt{-1}} = f(z).$$

Si l'on y remplace z par $x + y\sqrt{-1}$, x et y désignant deux variables réelles, on trouvera, en adoptant toujours les notations du § 7,

(2) $$e^{(M+N\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

(3) $$e^{-N}(\cos M + \sqrt{-1}\sin M) = P + Q\sqrt{-1};$$

et par suite

(4) $$e^{-2N} = P^2 + Q^2.$$

Or, on conclura de cette dernière, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans le paragraphe précédent, que les valeurs des variables x, y vérifient la condition

$$\frac{1 - P^2 - Q^2}{N} > 0,$$

toutes les fois qu'elles ne réduisent pas à zéro la fonction N. Donc, si la condition

(5) $$\frac{P^2+Q^2-1}{N}>0$$

se trouve remplie, indépendamment des valeurs attribuées aux variables x, y, alors, dans chacune des racines de l'équation (1), la partie réelle x et le coëfficient y de $\sqrt{-1}$ vérifieront nécessairement la formule

(6) $$N=0,$$

Si la condition (5) se trouvait satisfaite, non pas en général, mais simplement pour les systèmes de valeurs réelles de x et de y comprises entre certaines limites, on pourrait seulement affirmer que, dans chacune des racines de l'équation (1), la partie réelle et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ sont situés hors de ces limites, ou vérifient l'équation (6).

Il pourrait arriver que la fonction $f(z)$ fût décomposable en plusieurs facteurs, en sorte qu'on eût

(7) $$f(z)=f_1(z).f_2(z).f_3(z)\ldots.$$

Admettons cette hypothèse, et posons en outre

(8) $$f_1(x+y\sqrt{-1})=P_1+Q_1\sqrt{-1},\quad f_2(x+y\sqrt{-1})=P_2+Q_2\sqrt{-1},\quad \text{etc.}\ldots,$$

P_1, Q_1; P_2, Q_2, etc..., désignant des fonctions réelles des variables x, y. L'équation (1) se présentera sous la forme

(9) $$e^{z\sqrt{-1}}=f_1(z).f_2(z).f_3(z)\ldots,$$

et la formule (5) deviendra

(10) $$\frac{(P_1^2+Q_1^2)(P_2^2+Q_2)^2\ldots-1}{N}>0.$$

Or, cette dernière sera évidemment vérifiée, si l'on a constamment, pour des valeurs positives de N,

(11) $$P_1^2+Q_1^2>1,\quad P_2^2+Q_2^2>1,\quad \text{etc.}\ldots;$$

et, pour des valeurs négatives de N,

(12) $$P_1^2+Q_1^2<1,\quad P_2^2+Q_2^2<1,\quad \text{etc.}\ldots;$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on a, pour des valeurs positives ou négatives de la fonction N,

(13) $$\frac{P_1^2+Q_1^2-1}{N} > 0, \quad \frac{P_2^2+Q_2^2-1}{N} > 0, \quad \text{etc.....}$$

Donc, si ces dernières conditions sont vérifiées, indépendamment des valeurs attribuées aux variables x, y, alors, dans chacune des racines de l'équation (1), la partie réelle x, et le coëfficient y de $\sqrt{-1}$, vérifieront nécessairement la formule

(14) $$N = 0.$$

Si l'on tirait de l'équation (1) la valeur de $\tang Z$, on trouverait

(15) $$\tang Z = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{[f(z)]^2-1}{[f(z)]^2+1};$$

puis on en conclurait, en remplaçant z par $x+y\sqrt{-1}$,

(16) $$\tang(M+N\sqrt{-1}) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{P^2-Q^2-1+2PQ\sqrt{-1}}{P^2-Q^2+1+2PQ\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{(P^2-Q^2)^2-(1-2PQ\sqrt{-1})^2}{(P^2-Q^2+1)^2+4P^2Q^2},$$

ou, ce qui revient au même,

(17) $$\frac{\sin 2M + \frac{1}{2}(e^{2N}-e^{-2N})\sqrt{-1}}{\cos 2M + \frac{1}{2}(e^{2N}+e^{-2N})\sqrt{-1}} = \frac{4PQ+[1-(P^2+Q^2)^2]\sqrt{-1}}{(P^2+Q^2+1)^2+4P^2Q^2}.$$

Cela posé, en raisonnant comme dans le § 7, on prouvera que la valeur numérique du rapport

$$\frac{4PQ}{M}$$

doit rester inférieure à celle du rapport

$$\frac{1-(P^2+Q^2)^2}{N}$$

pour toutes les valeurs des variables x, y qui ne vérifient pas l'une des équations

(18) $$M = 0, \qquad N = 0.$$

Donc, si l'on a, pour des valeurs de x et de y comprises entre certaines limites,

(19) $$\left(\frac{4PQ}{M}\right)^2 > \left\{\frac{1-(P^2+Q^2)^2}{N}\right\}^2,$$

alors, dans toutes les racines de l'équation (1), la partie réelle et le coëfficient de $\sqrt{-1}$, devront être situés hors de ces limites, ou vérifier l'une des équations (18). Ajoutons que l'une des conditions (5) ou (19) sera nécessairement remplie, si l'on a

(20) $$\frac{4PQ}{M}+\frac{P^2+Q^2-1}{N}>0.$$

On pourrait encore joindre aux formules (5), (19) et (20) une multitude d'autres formules qui seraient également propres à signaler, dans l'équation (1), l'absence de certaines racines, et que l'on découvrirait à l'aide de considérations semblables à celles dont nous avons fait usage dans le § 6. Au reste, l'utilité de ces formules dépendrait surtout de leur simplicité; et, sous ce rapport, les conditions (5), (19) et (20) paraissent devoir être employées de préférence.

Pour montrer une application des principes ci-dessus exposés, supposons que l'équation (1) coïncide avec la suivante

(21) $$e^{z\sqrt{-1}}=\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\,\frac{z+b\sqrt{-1}}{z-b\sqrt{-1}}\,\frac{z+c\sqrt{-1}}{z-c\sqrt{-1}}\cdots,$$

$a, b, c\ldots$ désignant des constantes réelles. On aura, dans cette hypothèse,

(22) $$M=x,\qquad N=y.$$

De plus, les conditions (13) donneront simplement

(23) $$a>0,\qquad b>0,\qquad c>0,\qquad \text{etc.}\ldots;$$

et par conséquent, si les constantes $a, b, c\ldots.$ sont toutes positives, l'équation (21) n'admettra pas de racines imaginaires. C'est ce qui aura lieu en particulier pour les équations

(24) $$\left\{\begin{array}{l} e^{z\sqrt{-1}}=\dfrac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}},\qquad e^{z\sqrt{-1}}=\dfrac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\,\dfrac{z+b\sqrt{-1}}{z-b\sqrt{-1}}, \\ e^{z\sqrt{-1}}=\dfrac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\,\dfrac{z+b\sqrt{-1}}{z-b\sqrt{-1}}\,\dfrac{z+c\sqrt{-1}}{z-c\sqrt{-1}},\ \text{etc.}, \end{array}\right.$$

qui peuvent s'écrire comme il suit

(25) $$\operatorname{tang}\frac{1}{2}z=\frac{a}{z},\quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}z=\frac{(a+b)z}{z^2-ab},\quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}z=\frac{(a+b+c)z^2-abc}{z(z^2-ab-ac-bc)},\quad \text{etc.}$$

Si l'on supposait, dans l'équation (1), $f(z) = 0$, alors, cette équation étant réduite à la forme

$$(26) \qquad e^{Z\sqrt{-1}} = 0,$$

l'équation (4) donnerait $e^{-2N} = 0$, et par conséquent

$$(27) \qquad N = \infty.$$

Si cette dernière ne peut être vérifiée que par des valeurs infinies des variables x et y, l'équation (26) n'aura point de racines finies. C'est ce qui arrivera, si l'on prend pour Z une fonction entière de z, soit réelle, soit imaginaire. Ainsi, par exemple, les équations

$$(28) \qquad e^{z\sqrt{-1}} = 0, \quad e^{z} = 0, \quad e^{z^2} = 0, \quad \text{etc...},$$

que l'on déduit de la formule (26), en posant successivement

$$Z = z, \quad Z = -z\sqrt{-1}, \quad Z = -z^2\sqrt{-1}, \quad \text{etc...},$$

sont du nombre de celles qui ne peuvent être vérifiées par aucune valeur finie réelle ou imaginaire de la variable z.

Post scriptum. Après avoir terminé les premiers paragraphes de l'article qu'on vient de lire, nous avons reconnu que, pour démontrer, comme on l'a fait plus haut [pag. 300 et 301], la réalité de toutes les racines de l'équation $\tang z = az$, dans le cas où l'on suppose $\frac{1}{a} < 1$, il suffit de développer une observation de M. Fourier. En effet, dans le chap. V de sa théorie de la chaleur (pag. 366), ce géomètre indique la substitution de $x + y\sqrt{-1}$, au lieu de z, comme propre à constater, dans le cas dont il s'agit, l'absence des racines imaginaires. Quant à l'idée qu'a eue le même géomètre d'appliquer aux équations transcendantes des règles établies pour les équations algébriques, elle donne naissance à plusieurs difficultés dont l'examen pourra faire quelque jour le sujet d'un autre article.



USAGE DU CALCUL DES RÉSIDUS

POUR DÉTERMINER LA SOMME DES FONCTIONS SEMBLABLES

DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE OU TRANSCENDANTE.

Supposons que l'on désigne par x, y deux variables réelles, par $z = x + y\sqrt{-1}$ une variable imaginaire, et par $f(z)$, $F(z)$ deux fonctions quelconques de z. Soient de plus

(1) $$z_1, \quad z_2, \ldots \quad z_m,$$

celles des racines de l'équation

(2) $$F(z) = 0,$$

dans lesquelles la partie réelle demeure comprise entre les limites x_0, X, et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y. On aura, en vertu des principes du calcul des résidus,

(3) $$\sideset{_{x_0}^{Y}}{_{y_0}^{X}}{\mathcal{E}} \frac{f(z)}{((F(z)))} = \frac{f(z_1)}{F'(z_1)} + \frac{f(z_2)}{F'(z_2)} + \ldots + \frac{f(z_m)}{F'(z_m)}.$$

Le second membre de l'équation (3) est évidemment la somme des fonctions semblables de plusieurs des racines de l'équation (2). Si l'on veut que les différents termes, dont se compose cette somme, se réduisent aux valeurs particulières de la fonction $\varphi(z)$ qui correspondent à $z = z_1$, $z = z_2 \ldots$, $z = z_m$, il suffira de poser

(4) $$\frac{f(z)}{F'(z)} = \varphi(z), \qquad f(z) = \varphi(z) . F'(z),$$

ou plus généralement

(5) $$f(z) = \varphi(z) F'(z) - \psi(z) F(z),$$

$\psi(z)$ désignant une fonction de z qui ne devienne pas infinie quand on attribue à la variable z une des valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Cela posé, on trouvera

(6) $$\varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \ldots + \varphi(z_m) = \sideset{_{x_0}^{X}}{_{y_0}^{Y}}{\mathcal{E}} \frac{\varphi(z) . F'(z)}{((F(z)))}.$$

et

(7) $$\varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)={}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}\frac{\varphi(z).F'(z)-\psi(z)F(z)}{((F(z)))}.$$

Les formules (6) et (7) s'étendent au cas même où l'équation (2) aurait des racines égales. Supposons en effet que les racines $z_1, z_2, \ldots, z_n$ deviennent égales entre elles, et désignons par ζ leur valeur commune. Les fonctions

$$F(z),\quad F'(z),\quad F''(z)\ldots\ldots F^{(n-1)}(z)$$

s'évanouiront pour $z=\zeta$, et le rapport

$$\frac{\varphi(\zeta+\varepsilon)F'(\zeta+\varepsilon)}{F(\zeta+\varepsilon)},$$

étant développé suivant les puissances ascendantes de ε, aura pour premier terme le produit

$$\varphi(\zeta)\frac{\frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(\zeta)}{\frac{\varepsilon^{n}}{1.2.3\ldots(n-1)n}F^{(n)}(\zeta)}=\frac{n}{\varepsilon}\varphi(\zeta).$$

Donc le résidu de la fonction

$$\frac{\varphi(z)F'(z)}{F(z)},$$

correspondant à la valeur $z=\zeta$, sera précisément le produit $n\varphi(\zeta)$, auquel on réduit la somme

$$\varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_n)$$

en supposant $z_1=z_2=\ldots=z_n$. Le même raisonnement est applicable à la formule (7).

Si l'on admet que la série (1) comprenne toutes les racines de l'équation (2), on pourra prendre

$$x_0=-\infty,\qquad X=\infty,\qquad y_0=-\infty,\qquad Y=\infty;$$

et les formules (6) et (7) deviendront respectivement

(8) $$\varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\mathcal{E}\frac{\varphi(z).F'(z)}{((F(z)))},$$

(9) $$\varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\mathcal{E}\frac{\varphi(z).F'(z)-\psi(z)F(z)}{((F(z)))}.$$

Il importe d'observer que les équations (6), (7), (8), (9), peuvent être en général présentées sous les formes

$$(10)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)={}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}\left(\left(\frac{\varphi(z)\,F'(z)}{F(z)}\right)\right)-{}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}\frac{((\varphi(z).F'(z)))}{F(z)},$$

$$(11)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)={}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}\left(\left(\frac{\varphi(z)F'(z)-\psi(z)F(z)}{F(z)}\right)\right)$$

$$-{}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}\frac{((\varphi(z)F'(z)-\psi(z)F(z)))}{F(z)},$$

$$(12)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\mathcal{E}\left(\left(\frac{\varphi(z)\,F'(z)}{F(z)}\right)\right)-\mathcal{E}\frac{((\varphi(z)\,F'(z)))}{F(z)},$$

$$(13)\quad \varphi(z_1)+(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\mathcal{E}\left(\left(\frac{\varphi(z)F'(z)-\psi(z)F(z)}{F(z)}\right)\right)$$

$$-\mathcal{E}\frac{((\varphi(z)F'(z)-\psi(z)F(z)))}{F(z)}.$$

Ajoutons que, si le résidu de la fonction

$$(14)\qquad \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)F'\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2F\left(\frac{1}{z}\right)},\qquad \text{ou}\qquad (15)\qquad \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)F'\left(\frac{1}{z}\right)-\left(\frac{1}{z}\right)F\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2F\left(\frac{1}{z}\right)},$$

correspondant à une valeur nulle de z, se réduit à une constante déterminée, on tirera de la formule (12) ou (13), combinée avec l'équation (6) de la page 134,

$$(16)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\mathcal{E}\,\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)F'\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))\,F\left(\frac{1}{z}\right)}-\mathcal{E}\,\frac{((\varphi(z)\,F'(z)))}{F(z)},$$

ou

$$(17)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\mathcal{E}\,\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)F'\left(\frac{1}{z}\right)-\psi\left(\frac{1}{z}\right)F\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))\,F\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$-\mathcal{E}\,\frac{((\varphi(z)\,F'(z)-\psi(z)F(z)))}{F(z)}.$$

Les équations précédentes se simplifient dans plusieurs cas qu'il est bon d'indiquer. Ainsi, par exemple, lorsque la fonction

(18) $\varphi(z)\,F'(z)$ ou (19) $\varphi(z)\,F'(z) - \psi(z)\,F(z)$

conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de z, on tire des équations (10) et (11)

$$(20)\qquad \varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \ldots + \varphi(z_m) = {}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y} \left(\left(\frac{\varphi(z)\,F'(z)}{F(z)}\right)\right),$$

ou

$$(21)\qquad \varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \ldots + \varphi(z_m) = {}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y} \left(\left(\frac{\varphi(z)\,F'(z) - \psi(z)\,F(z)}{F(z)}\right)\right),$$

des équations (12) et (13)

$$(22)\qquad \varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \ldots + \varphi(z_m) = \mathcal{E} \left(\left(\frac{\varphi(z)\,F'(z)}{F(z)}\right)\right)$$

ou

$$(23)\qquad \varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \ldots + \varphi(z_m) = \mathcal{E} \left(\left(\frac{\varphi(z)\,F'(z) - \psi(z)\,F(z)}{F(z)}\right)\right),$$

enfin des équations (16) et (17)

$$(24)\qquad \varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \ldots + \varphi(z_m) = \mathcal{E}\, \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right) F'\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))\, F\left(\frac{1}{z}\right)},$$

ou

$$(25)\qquad \varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \ldots + \varphi(z_m) = \mathcal{E}\, \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right) F'\left(\frac{1}{z}\right) - \psi\left(\frac{1}{z}\right) F\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))\, F\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

De même encore, si le produit de la variable z par la fonction

(26) $\dfrac{\varphi(z)\,F'(z)}{F(z)}$ ou (27) $\dfrac{\varphi(z)\,F'(z) - \psi(z)\,F(z)}{F(z)}$

s'évanouit pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de z, le résidu intégral de cette fonction s'évanouira, et l'on tirera de la formule (12) ou (13)

$$(28)\qquad \varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \ldots + \varphi(z_m) = -\,\mathcal{E}\, \frac{((\varphi(z)\,F'(z)))}{F(z)},$$

ou

$$(29)\qquad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=-\mathcal{E}\,\frac{((\varphi(z)\,F'(z)-\psi(z)\,F(z)\,))}{F(z)}.$$

Si les deux fonctions $F'(z)$ et $\psi(z)$ conservent des valeurs finies, pour des valeurs quelconques de z, on aura évidemment

$$\mathcal{E}\,\frac{((\varphi(z)\,F'(z)\,))}{F(z)}=\mathcal{E}\,\frac{F'(z)}{F(z)}\,((\varphi(z)\,))\,,\qquad \mathcal{E}\,((\psi(z)\,))=\mathcal{E}\,\frac{((\psi(z)\,F(z)\,))}{F(z)}=0\,;$$

et par suite l'équation (28) ou (29) donnera

$$(30)\qquad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=-\mathcal{E}\,\frac{F'(z)}{F(z)}\,((\varphi(z)\,)).$$

Concevons maintenant que, dans les formules (24) et (25), on pose

$$(31)\qquad \varphi(z)=z^n$$

n étant un nombre entier quelconque. Les premiers membres de ces formules se réduiront à la somme des n^{mes} puissances des racines de l'équation (2); et, si l'on désigne par

$$(32)\qquad s_n=z_1{}^n+z_2{}^n+\ldots\ldots+z_m{}^n$$

la somme dont il s'agit, on trouvera

$$(33)\qquad s_n=\mathcal{E}\,\frac{F'\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^{n+2}))\,F\left(\frac{1}{z}\right)}\,,$$

ou

$$(34)\qquad s_n=\mathcal{E}\,\frac{1}{((z^2))}\left\{\frac{F'\left(\frac{1}{z}\right)}{z^nF\left(\frac{1}{z}\right)}-\psi\left(\frac{1}{z}\right)\right\}.$$

Les équations (33) et (34) supposent 1.° que la fonction

$$(35)\qquad F'(z)\,,\qquad\text{ou}\qquad (36)\qquad F'(z)-\frac{\psi(z)}{z^n}\,F(z)$$

conserve une valeur finie, pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de z; 2.° que le résidu de la fonction

(37) $$\frac{F'\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{n+1}F\left(\frac{1}{z}\right)},$$ ou (38) $$\frac{F'\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{n+1}F\left(\frac{1}{z}\right)}-\frac{\psi(z)}{z^2},$$

correspondant à une valeur nulle de z, se réduit à une constante déterminée. Admettons d'ailleurs que la fraction

(39) $$\frac{\frac{1}{z}F'\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}$$

obtienne, pour une valeur nulle de z, une valeur finie a. La différence

$$\frac{\frac{1}{z}F'\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}-a$$

s'évanouira pour $z=0$, et si l'on fait

(40) $$\frac{\frac{1}{z}F'\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}-a=zZ,$$

on tirera de l'équation (33)

(41) $$s_n=\mathcal{E}\frac{a}{((z^{n+1}))}+\mathcal{E}\frac{Z}{((z^n))}=\mathcal{E}\frac{Z}{((z^n))};$$

puis, en remettant, au lieu de Z, sa valeur tirée de la formule (40), savoir

(42) $$Z=\frac{1}{z^2}\frac{F'\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}-\frac{a}{z}=-\frac{d\,\mathrm{l}F\left(\frac{1}{z}\right)}{dz}-\frac{d\,\mathrm{l}\,z^a}{dz}=-\frac{d\,\mathrm{l}\left[z^aF\left(\frac{1}{z}\right)\right]}{dz},$$

on trouvera définitivement

(43) $$s_n=-\mathcal{E}\frac{d\,\mathrm{l}\left[z^aF\left(\frac{1}{z}\right)\right]}{dz}\frac{1}{((z^n))}.$$

On arriverait au même résultat en remplaçant, dans la formule (34), la fonction $\psi(z)$ par le produit az^{n-1}.

Lorsque la fonction Z conserve une valeur finie pour $z=0$, alors, en désignant par ε une quantité infiniment petite, et ayant égard à l'équation (30) de la page 16, on tire de la formule (43)

(44) $$s_n = -\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^n l\left[\varepsilon^a F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{d\varepsilon^n}.$$

Concevons encore que, dans la formule (30), on pose $\varphi(z)=\frac{1}{z^n}$. Le premier membre offrira la somme des racines de l'équation (2), élevées chacune à la puissance du degré $-n$; et, si l'on désigne par

(45) $$s_{-n} = z_1^{-n} + z_2^{-n} + \ldots\ldots + z_m^{-n}$$

la somme dont il s'agit, on trouvera

(46) $$s_{-n} = -\mathcal{E}\,\frac{F'(z)}{((z^n))\,F(z)},$$

ou, ce qui revient au même,

(47) $$s_{-n} = -\mathcal{E}\,\frac{d\,l F(z)}{dz}\,\frac{1}{((z^n))}.$$

Ces dernières formules supposent, 1.° que la fonction $F'(z)$ conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de la variable z; 2.° que la fraction

(48) $$\frac{F'(z)}{z^n F(z)}$$

s'évanouit pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de la même variable.

Lorsque la fonction

(49) $$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{d\,l F(z)}{dz}$$

conserve une valeur finie pour $z=0$; alors, en désignant par ε une quantité infiniment petite, et ayant égard à l'équation (30) de la page 16, on tire de la formule (47)

(50) $$s_{-n} = -\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^n l F(\varepsilon)}{d\varepsilon^n}. \ldots\ldots\ldots$$

Pour rendre plus sensible l'utilité des formules que nous venons d'établir, nous allons les appliquer à quelques exemples.

Supposons d'abord que $F(z)$ se réduise à une fonction entière du degré m, et que l'on ait

$$(51) \qquad F(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z + a_m,$$

$a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, a_m$ désignant des coëfficients réels ou imaginaires. La constante représentée par a, dans la formule (44), ou la valeur que prendra la fraction

$$(39) \qquad \frac{\frac{1}{z} F'\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}$$

pour $z = 0$, se réduira évidemment au nombre m; et l'on aura par suite

$$(52) \qquad z^a F\left(\frac{1}{z}\right) = z^m F\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m.$$

Donc, si l'on désigne par s_n la somme des n^{mes} puissances des racines de l'équation algébrique

$$(53) \qquad z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z + a_m = 0,$$

on aura, en vertu de la formule (44),

$$(54) \qquad s_n = -\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \frac{d^n l(1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \ldots + a_{m-1}\varepsilon^{m-1} + a_m \varepsilon^m)}{d\varepsilon^n}.$$

En d'autres termes, la somme s_n sera le coëfficient de z^n dans le développement du produit

$$(55) \qquad -n\, l(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m).$$

D'ailleurs, on trouvera généralement

$$(56) \qquad l(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m)$$

$$= a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m - \frac{1}{2}(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m)^2 + \frac{1}{3}(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m)^3 - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{(-1)^n}{n}(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m)^n + \text{etc.};$$

et, si l'on désigne par $p, q, \dots t, N$ des nombres entiers inférieurs à n, le coëfficient de z^n dans le développement du produit

(57) $$\frac{(-1)^N}{N}(a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m)^N$$

sera la somme des expressions de la forme

(58) $$\frac{(-1)^N}{N}\,\frac{1.2.3\dots N}{(1.2.3\dots p)(1.2.3\dots q)\dots(1.2.3\dots t)}\,a_1^p a_2^q \dots a_m^t,$$

qui correspondent à des valeurs do $p, q, \dots t$ propres à vérifier les deux conditions

(59) $$p + q + \dots + t = N,$$ (60) $$p + 2q + \dots + mt = n.$$

Cela posé, on aura évidemment

(61) $$s_n = n\,\Sigma\left\{\frac{(-1)^{p+q\dots+t}}{p+q+\dots+t}\,\frac{1.2.3\dots(p+q+\dots+t)}{(1.2.3\dots p)(1.2.3\dots q)\dots(1.2.3\dots t)}\,a_1^p a_2^q \dots a_m^t\right\},$$

le signe Σ indiquant une somme de termes semblables à celui qui est renfermé entre les accolades, et devant s'étendre à tous les systèmes de valeurs de $p, q, \dots t$ qui vérifient la condition (60). L'équation (61) était déjà connue. Si l'on y pose successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, etc..., on trouvera

(62) $$s_1 = -a_1, \qquad s_2 = a_1^2 - 2a_2, \qquad s_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3, \qquad \text{etc...}$$

Concevons maintenant que l'on demande la valeur de la somme

(63) $$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc...},$$

n étant un nombre pair quelconque, il suffira évidemment de chercher la demi-somme des racines de l'équation

(64) $$\sin \pi z = 0,$$

élevées chacune à la puissance du degré $-n$, en ayant soin toutefois d'exclure la racine $z = 0$, ce que l'on fera en remplaçant l'équation (64) par la suivante

(65) $$\frac{\sin \pi z}{z} = 0.$$

Cela posé, on aura, en vertu de la formule (50),

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}\ldots$$

$$=-\frac{\frac{1}{2}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^n \mathrm{l}\frac{\sin \pi\varepsilon}{\varepsilon}}{d\varepsilon^n}=-\frac{\frac{1}{2}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^n \mathrm{l}\frac{\sin \pi\varepsilon}{\pi\varepsilon}}{d\varepsilon^n},$$

ou, ce qui revient au même,

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}\ldots=-\frac{\frac{1}{2}\pi^n}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^n \mathrm{l}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}}{d\varepsilon^n}. \tag{66}$$

En d'autres termes, la somme dont on demande la valeur sera le coëfficient de z^n dans le développement du produit

$$-\frac{n}{2}\pi^n \mathrm{l}\frac{\sin z}{z} \tag{67}$$

en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de z. Comme on aura d'ailleurs

$$\mathrm{l}\frac{\sin z}{z}=\mathrm{l}\left(1-\frac{1}{1.2.3}z^2+\frac{1}{1.2.3.4.5}z^4-\text{etc.}\ldots\right) \tag{68}$$

$$=-\left(\frac{1}{1.2.3}z^2-\frac{1}{1.2.3.4.5}z^4+..\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2.3}z^2-\frac{1}{1.2.3.4.5}z^4+..\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}z^2-\frac{1}{1.2.3.4.5}z^4+..\right)^3-..$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1.2.3}z^2-\frac{1}{1.2.3.4.5}z^4+\ldots\right)^n-\text{etc.}\ldots,$$

on trouvera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage pour établir la formule (61),

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}\ldots= \tag{69}$$

$$\frac{n}{2}\pi^n\Sigma\left\{\frac{1}{p+q+r+\ldots}\,\frac{1.2.3\ldots(p+q+r+\ldots)}{(1.2.3\ldots q)(1.2.3\ldots q)(1.2.3\ldots r)\ldots}\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^p\left(-\frac{1}{1.2.3.4.5}\right)^q\left(\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\right)^r\ldots\right\},$$

le signe Σ indiquant une somme de termes semblables à celui qui est renfermé entre les accolades, et devant s'étendre à tous les systèmes de valeurs entières, nulles ou positives, de $p, q, r\ldots,$ qui vérifient la condition

$$2p+4q+6r+\ldots=n. \tag{70}$$

Si l'on pose successivement $n=2$, $n=4$, $n=6\ldots$, on tirera de la formule (69)

$$(71)\quad \left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\text{etc.}\ldots=\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{6}\,\frac{2\pi^2}{1.2}, \\ 1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\text{etc.}\ldots=\frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{30}\,\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4}, \\ 1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\text{etc.}\ldots=\frac{\pi^6}{945}=\frac{1}{42}\,\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6}, \\ \text{etc.}\ldots.. \end{array}\right.$$

Dans ces dernières équations, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, etc..., sont ce qu'on appelle les nombres de Bernoulli. Si l'on désigne par A_2, A_4, A_6, etc.... ces mêmes nombres, la valeur de A_n, déduite des calculs qui précèdent, se présentera sous la forme que M. Libri lui a donnée, savoir,

$$(72)\qquad A_n=-\frac{n}{2^n}\,\frac{d^n\,\mathrm{l}\frac{\sin z}{z}}{dz^n}$$

$$=\frac{n(1.2.3\ldots n)}{2^n}\,\Sigma\left\{\frac{1}{p+q+r+\ldots}\,\frac{1.2.3\ldots(p+q+r+\ldots)}{(1.2.3..p)(1.2.3..q)(1.2.3..r)\ldots}\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^p\left(-\frac{1}{1.2.3.4.5}\right)^q\left(\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\right)^r\ldots\right\}$$

Concevons encore que l'on demande la somme des racines de l'équation

$$(73)\qquad \operatorname{tang} z=z,$$

élevées chacune à la puissance du degré $-n$, en ayant soin toutefois d'exclure la racine $z=0$. Comme, pour opérer cette exclusion, il suffira de remplacer l'équation (73) par la suivante

$$(74)\qquad \frac{\sin z - z\cos z}{z^3}=0,$$

il est clair qu'on devra chercher la valeur de s_{-n} que détermine la formule (50), lorsqu'on pose dans cette formule

$$\mathrm{F}(z)=\frac{\sin z - z\cos z}{z^3}.$$

On trouvera ainsi, pour la valeur de la somme demandée,

$$(75)\qquad s_{-n} = -\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^n\,\mathrm{l}\,\dfrac{\sin z - z\cos z}{z^3}}{dz^n}.$$

En d'autres termes, cette somme sera le coëfficient de z^n dans le développement du produit

$$(76)\qquad -n\,\mathrm{l}\,\frac{\sin z - z\cos z}{z^3}.$$

On aura d'ailleurs

$$(77)\qquad \frac{\sin z - z\cos z}{z^3} = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3}\right) - \left(\frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{1.2.3.4.5}\right)z^2 + \text{etc.}\ldots,$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\,\frac{z^2}{1.2.3} + \frac{1}{7}\,\frac{z^4}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\ldots,$$

et par suite

$$(78)\qquad \mathrm{l}\,\frac{\sin z - z\cos z}{z^3} = \mathrm{l}\left(\frac{1}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{5}\,\frac{z^2}{1.2.3} - \frac{1}{7}\,\frac{z^4}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)$$

$$- \frac{3^2}{2}\left(\frac{1}{5}\,\frac{z^2}{1.2.3} - \frac{1}{7}\,\frac{z^4}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)^2$$

$$- \frac{3^3}{3}\left(\frac{1}{5}\,\frac{z^2}{1.2.3} - \frac{1}{7}\,\frac{z^4}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)^3;$$

$$- \text{etc.}\ldots;$$

puis l'on en conclura, par des raisonnements pareils à ceux dont nous avons fait usage pour établir la formule (61),

$$(79)\qquad s_{-n} =$$

$$n\,\Sigma\left\{\frac{3^{p+q+r..}}{p+q+r..}\,\frac{1.2.3\ldots(p+q+r..)}{(1.2..p)(1.2..q)(1.2..r)..}\left(\frac{1}{5}\,\frac{1}{1.2.3}\right)^p\left(-\frac{1}{7}\,\frac{1}{1.2.3.4.5}\right)^q\left(\frac{1}{9}\,\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\right)^r..\right\},$$

le signe Σ indiquant une somme de termes semblables à celui qui est renfermé entre les accolades, et relatifs aux divers systèmes de valeurs entières, nulles ou positives, de $p, q, r, \ldots$, qui vérifient la condition

$$(80)\qquad 2p + 4q + 6r + \ldots = n.$$

Si, pour fixer les idées, on prend successivement $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$, etc..., on tirera de l'équation (79)

(81) $s_{-2} = \frac{1}{2}$, $s_{-4} = \frac{1}{5^2 . 7}$, $s_{-6} = \frac{2}{3^2 . 5^3 . 7}$, $s_{-8} = \frac{37}{3^2 . 5^4 . 7^2 . 11}$, etc...,

ou, ce qui revient au même,

(82) $s_{-2} = \frac{1}{5}$, $s_{-4} = \frac{1}{175}$, $s_{-6} = \frac{2}{7875}$, $s_{-8} = \frac{37}{3031875}$, etc...,

D'ailleurs, nous avons reconnu [page 300] que les racines de l'équation (73) sont toutes réelles, mais deux à deux égales et de signes contraires. Donc, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ les racines positives de cette équation, les racines négatives seront représentées par $-\alpha, -\beta, -\gamma, \ldots$ et l'on aura généralement

(83) $$s_{-2n} = 2 \left\{ \frac{1}{\alpha^{2n}} + \frac{1}{\beta^{2n}} + \frac{1}{\gamma^{2n}} + \ldots \right\},$$

en sorte que les équations (82) se réduiront aux suivantes

(84) $$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{10}, \\ \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\gamma^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{350}, \\ \frac{1}{\alpha^6} + \frac{1}{\beta^6} + \frac{1}{\gamma^6} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{7875}, \\ \frac{1}{\alpha^8} + \frac{1}{\beta^8} + \frac{1}{\gamma^8} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{37}{6063750}, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Si l'on voulait tirer directement des formules (84) les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ il suffirait d'observer que, pour des valeurs croissantes de n, le rapport

$$\frac{s_{-2n}}{s_{-2n-2}}$$

converge vers la limite α^2, le rapport

$$\frac{s_{-2n} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n}}{s_{-2n-2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n+2}}$$

vers la limite β^2, etc... On en conclurait que la racine α coïncide avec la limite vers laquelle convergent les termes de la série

(85) $$\sqrt{35}=5,9\ldots,\quad \sqrt{22,5}=4,7\ldots,\quad \sqrt{\frac{22.35}{37}}=4,5\ldots,\ \text{etc.}\ldots$$

C'est effectivement ce qui arrive, et l'on doit même observer que le troisième terme de la série (85) fournit déjà une valeur très-approchée de la racine α, dont la valeur exacte, calculée avec sept décimales, est $4,4934118\ldots$ [voyez la page 299]. On obtiendrait avec la même facilité les valeurs approchées de $\beta, \gamma, \ldots$

Supposons enfin que, la lettre a désignant une quantité réelle, on demande la somme à laquelle on parviendrait en ajoutant les racines de l'équation

(86) $$\operatorname{tang} z = az,$$

élevées chacune à la puissance du degré $-n$, et en excluant toujours la racine $z=0$. Il suffira évidemment de remplacer l'équation (86) par la suivante

(87) $$\frac{\sin z - az\cos z}{z}=0,$$

et de chercher la valeur de s_{-n} que détermine la formule (50), lorsqu'on pose dans cette formule

(88) $$F(z)=\frac{\sin z - az\cos z}{z}.$$

On trouvera ainsi, pour la valeur de la somme demandée,

(89) $$s_{-n}=-\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\;\frac{d^n \mathrm{l}\dfrac{\sin z - az\cos z}{z}}{dz^n}.$$

En d'autres termes, cette somme sera le coëfficient de z^n dans le développement du produit

(90) $$-n\,\mathrm{l}\,\frac{\sin z - az\cos z}{z}.$$

On aura d'ailleurs

(91) $$\frac{\sin z - az\cos z}{z}=1-a-\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{a}{1.2}\right)z^2+\left(\frac{1}{1.2.3.4.5}-\frac{a}{1.2.3.4}\right)z^4-\text{etc.}$$
$$=1-a-\left(\frac{1}{3}-a\right)\frac{z^2}{1.2}+\left(\frac{1}{5}-a\right)\frac{z^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}\ldots,$$

et par suite

$$(92)\qquad \mathrm{l}\,\frac{\sin z - az\cos z}{z} = \mathrm{l}(1-a) - \left\{\frac{3a-1}{3(a-1)}\frac{z^2}{1.2} - \frac{5a-1}{5(a-1)}\frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots\right\}$$
$$- \frac{1}{2}\left\{\frac{3a-1}{3(a-1)}\frac{z^2}{1.2} - \frac{5a-1}{5(a-1)}\frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots\right\}^2$$
$$- \frac{1}{3}\left\{\frac{3a-1}{3(a-1)}\frac{z^2}{1.2} - \frac{5a-1}{5(a-1)}\frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots\right\}^3$$
$$-\ \text{etc.}\dots$$

puis l'on en conclura

$$(93)\qquad s_{-n} =$$
$$n\Sigma\left\{\frac{1}{p+q+r+\dots}\,\frac{1.2\dots(p+q+r\dots)}{(1.2\dots p)(1.2\dots q)(1.2\dots r)\dots}\left(\frac{3a-1}{3(a-1)}\frac{1}{1.2}\right)^p\left(-\frac{5a-1}{5(a-1)}\frac{1}{1.2.3.4}\right)^q\left(\frac{7a-1}{7(a-1)}\frac{1}{1.2.3.4.5.6}\right)^r\dots\right\}$$

le signe Σ indiquant une somme de termes semblables à celui qui est renfermé entre les accolades, et relatifs aux divers systèmes de valeurs entières, nulles ou positives, de $p, q, r\dots$, qui vérifient l'équation

$$(80)\qquad 2p + 4q + 6r + \dots = n.$$

Si, pour fixer les idées, on prend successivement $n=2$, $n=4$, $n=6$, etc...., on tirera de l'équation (93)

$$(94)\qquad \begin{cases} s_{-2} = \dfrac{3a-1}{3(a-1)}, \quad s_{-4} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{3a-1}{3(a-1)}\right\}^2 - \dfrac{1}{6}\,\dfrac{5a-1}{5(a-1)}, \\ s_{-6} = \dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{3a-1}{3(a-1)}\right\}^3 - \dfrac{1}{16}\,\dfrac{3a-1}{3(a-1)}\,\dfrac{5a-1}{5(a-1)} + \dfrac{1}{120}\,\dfrac{7a-1}{7(a-1)},\ \text{etc.}\dots \end{cases}$$

D'ailleurs, nous avons reconnu [page 301] que les racines de l'équation (86) sont toutes réelles, mais deux à deux égales et de signes contraires, lorsque la constante a est négative, ou bien positive, mais supérieure à l'unité. Donc alors, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma\dots$ les racines positives de cette équation, les racines négatives seront représentées par $-\alpha, -\beta, -\gamma, \dots$ et les formules (94) donneront

$$(95)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} + \dots = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{3a-1}{3(a-1)}, \\ \dfrac{1}{\alpha^4} + \dfrac{1}{\beta^4} + \dfrac{1}{\gamma^4} + \dots = \dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{3a-1}{3(a-1)}\right\}^2 - \dfrac{1}{12}\,\dfrac{5a-1}{5(a-1)}, \\ \dfrac{1}{\alpha^6} + \dfrac{1}{\beta^6} + \dfrac{1}{\gamma^6} + \dots = \dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{3a-1}{3(a-1)}\right\}^3 - \dfrac{1}{32}\,\dfrac{3a-1}{3(a-1)}\,\dfrac{5a-1}{5(a-1)} + \dfrac{1}{240}\,\dfrac{7a-1}{7(a-1)}, \\ \text{etc.}\dots \end{cases}$$

Si l'on supposait en particulier $a=2$, $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ seraient les racines positives de l'équation

(96)
$$\operatorname{tang} z = 2z,$$

et l'on tirerait des formules (95)

(97)
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\ldots\ldots = \frac{5}{6},\\ &\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}+\frac{1}{\gamma^4}+\ldots\ldots = \frac{49}{90},\\ &\frac{1}{\alpha^6}+\frac{1}{\beta^6}+\frac{1}{\gamma^6}+\ldots\ldots = \frac{15619}{30240},\\ &\text{etc.}\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si la constante a était positive, mais inférieure à l'unité, alors l'équation (86) admettrait deux racines imaginaires de la forme

(98)
$$z=\zeta\sqrt{-1}, \qquad z=-\zeta\sqrt{-1},$$

la quantité réelle ζ étant déterminée par la formule

(99)
$$\frac{e^{\zeta}-e^{-\zeta}}{\zeta\left(e^{\zeta}+e^{-\zeta}\right)}=a;$$

et l'on trouverait, en désignant toujours par $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ les racines réelles et positives de la proposée,

(100)
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\ldots-\frac{1}{\zeta^2}=\frac{1}{2}\,\frac{3a-1}{3(a-1)},\\ &\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}+\frac{1}{\gamma^4}+\ldots+\frac{1}{\zeta^4}=\frac{1}{4}\left\{\frac{3a-1}{3(a-1)}\right\}^2-\frac{1}{12}\,\frac{5a-1}{5(a-1)},\\ &\frac{1}{\alpha^6}+\frac{1}{\beta^6}+\frac{1}{\gamma^6}+\ldots-\frac{1}{\zeta^6}=\frac{1}{8}\left\{\frac{3a-1}{3(a-1)}\right\}^3-\frac{1}{32}\,\frac{3a-1}{3(a-1)}\,\frac{5a-1}{5(a-1)}+\frac{1}{240}\,\frac{7a-1}{7(a-1)},\\ &\text{etc.}\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si a était renfermé entre les limites 1 et $\frac{1}{3}$, la première des formules (100) aurait pour second membre une quantité négative, et l'on tirerait de cette formule

(101) $$\zeta < \sqrt{\frac{6(1-a)}{3a-1}}.$$

On obtiendrait ainsi une limite supérieure de la quantité ζ, que l'on peut, au reste, déduire facilement de l'équation (99), attendu que le premier membre de cette équation décroît sans cesse, en passant de l'unité à zéro, tandis que l'on fait varier ζ depuis $\zeta = 0$, jusqu'à $\zeta = \infty$.

Les formules (6), (7), (8) et (9), dont les calculs que nous venons de faire indiquent suffisamment les nombreuses applications, supposent que la suite

(1) $$z_1, \quad z_2, \ldots \quad z_m$$

renferme toutes les racines de l'équation (2), ou du moins toutes celles dans lesquelles la partie réelle demeure comprise entre les limites x_0, X, et le coëfficient de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y. Si l'on désignait, au contraire, par z_1, $z_2, \ldots$, z_m, les racines que l'on peut déduire de la formule

(102) $$z = u + v\sqrt{-1},$$

en prenant pour u, v deux fonctions réelles données des variables x, y, et attribuant à ces variables des valeurs respectivement comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$; alors, en adoptant les notations que nous avons déjà employées [pages 206 et suivantes], on obtiendrait, à la place des équations (6) et (7), d'autres équations du même genre, mais dont les seconds membres seraient des résidus exprimés à l'aide des notations dont il s'agit. On trouverait effectivement

(103) $$\varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \ldots + \varphi(z_m) = \underset{x=x_0}{\overset{x=X}{}} \underset{y=y_0}{\overset{y=Y}{\mathcal{E}}} \frac{\varphi(z) \cdot F'(z)}{((F(z)))}, \qquad [z = u + v\sqrt{-1}],$$

et

(104) $$\varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \ldots + \varphi(z_m) = \underset{x=x_0}{\overset{x=X}{}} \underset{y=y_0}{\overset{y=Y}{\mathcal{E}}} \frac{\varphi(z) . F'(z) - \psi(z) F(z)}{((F(z)))}, [z = u + v\sqrt{-1}],$$

la fonction $\psi(z)$ étant toujours assujétie à la seule condition de conserver une valeur finie, tandis que la variable z recevrait une des valeurs z_1, $z_2, \ldots$ z_m. De même, si les racines de l'équation (1), désignées par z_1, $z_2, \ldots$ z_m, étaient précisément celles que l'on peut déduire de la formule

(105) $$z = r(\cos p + \sqrt{-1} \sin p),$$

en attribuant aux variables r et p des valeurs respectivement comprises entre les quantités positives $r=r_0$, $r=R$, et les quantités positives ou négatives $p=p_0$, $p=P$; on aurait

$$(106)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\overset{r=R}{\underset{r=r_0}{\mathcal{E}}}\ \overset{p=P}{\underset{p=p_0}{}}\frac{\varphi(z)F'(z)}{((F(z)))},\ [z=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)],$$

ou, plus simplement, en faisant usage de la notation établie page 207,

$$(107)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\overset{(R)}{\underset{(r_0)}{\mathcal{E}}}\ \overset{(P)}{\underset{(p_0)}{}}\frac{\varphi(z)F'(z)}{((F(z)))};$$

et l'on trouverait encore

$$(108)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\overset{(R)}{\underset{(r_0)}{\mathcal{E}}}\ \overset{(P)}{\underset{(p_0)}{}}\frac{\varphi(z)F'(z)-\psi(z)F'(z)}{((F(z)))}$$

Ainsi, par exemple, si la suite $z_1, z_2, \ldots z_m$ renferme seulement les racines dont le module est inférieur à l'unité, on aura

$$(109)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\overset{(1)}{\underset{(0)}{\mathcal{E}}}\ \overset{(\pi)}{\underset{(-\pi)}{}}\frac{\varphi(z).F'(z)}{((F(z)))},$$

et

$$(110)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_m)=\overset{(1)}{\underset{(0)}{\mathcal{E}}}\ \overset{(\pi)}{\underset{(-\pi)}{}}\frac{\varphi(z).F'(z)-\psi(z)F(z)}{((F(z)))}.$$

Lorsque la fonction

$$(8)\quad \varphi(z)F'(z),\qquad \text{ou}\qquad (9)\quad \varphi(z)F'(z)-\psi(z)F(z)$$

conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de z, ou du moins pour celles dont le module est inférieur à l'unité, alors les formules (107) et (108), ou (109) et (110), peuvent être remplacées par d'autres, dans lesquelles les doubles parenthèses renferment les deux termes de chacune des fractions

$$\frac{\varphi(z)F'(z)}{F(z)},\qquad \frac{\varphi(z)F'(z)-\psi(z)F(z)}{F(z)}.$$

Par conséquent, dans cette hypothèse, les équations (109) et (110) peuvent s'écrire comme il suit:

$$(111)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\dots+\varphi(z_m)=\mathop{\mathcal{E}}_{(0)}^{(1)}\,\mathop{}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{\varphi(z)F'(z)}{F(z)}\right)\right),$$

$$(112)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\dots+\varphi(z_m)=\mathop{\mathcal{E}}_{(0)}^{(1)}\,\mathop{}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{\varphi(z)F'(z)-\psi(z)F(z)}{F(z)}\right)\right).$$

On a vu dans cet article combien il est facile de calculer, à l'aide du signe $\mathcal{E}$, la somme des fonctions semblables de plusieurs racines d'une équation algébrique ou transcendante. Cette somme étant une fois exprimée en résidus, on peut aisément transformer son expression en intégrales définies, ou la développer en série. En effet, pour y parvenir, il suffit, dans un grand nombre de cas, de combiner les formules qui précèdent avec les équations que nous avons précédemment obtenues [voyez les deux articles qui s'étendent de la page 95 à la page 113, et de la page 205 à la page 232], ou de développer en séries convergentes les fonctions renfermées sous le signe $\mathcal{E}$. Ainsi, par exemple, en combinant la formule (111) avec la formule (65) de la page 213, on trouvera

$$(113)\quad \varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\dots+\varphi(z_m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{p\sqrt{-1}}\,\frac{\varphi\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)F'\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}{F\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)}\,dp.$$

L'équation (113) suppose, 1.° que la suite $z_1, z_2, \dots z_m$, renferme seulement celles des racines de l'équation (2), dont le module est compris entre les limites 0, 1; 2.° que le produit $\varphi(z)F'(z)$ conserve une valeur finie pour les valeurs finies réelles ou imaginaires de z, ou du moins pour celles dont le module est inférieur à l'unité.

Les formules analogues à l'équation (113), et celles que l'on déduit des équations (6), (7), (8), etc., par le développement des fonctions en séries, méritent d'être remarquées, et nous fourniront le sujet de quelques nouveaux articles.



TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

i.	LIGNES.	FAUTES.	CORRECTIONS.
	4	$l(z)$	$l(r)$
	7 et 12	$\frac{\mu}{2}$ .... (8) ou (9)	$\frac{\mu}{1}$ .... (7) ou (8)
	7	$\mu(^2-1)$	(μ^2-1)
	1	$\left(e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)$	$\left(e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^\mu$
	3	$\frac{f_{(m)}(x_1+\theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m)}$	$\frac{f^{(m)}(x_1+\theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m}$
	19 et 21	${}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y} f((x)) \ldots {}_{\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((f(x)))$	${}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(x))) \ldots {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((f(x)))$
	11	$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}$	$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}=$
	5	$\frac{df(x,z)}{dx}$	$\frac{df(x,z)}{dz}$
	20	$(z+1)^2$	$(z-1)^2$
	16	$\mathcal{E}\frac{((f(x)))}{1-\frac{z}{x}}$	$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{1-\frac{z}{x}}$
	14	$f'(x+h)$	$f'(x+\theta h)$
	1 et 4	Qy .... m et n	Qx .... n et m
	2 et 12	seront ... l'aut. de la mécan. cél.	sont ... Daniel Bernoulli.
	19	$Q^2=P^2$	$Q^2=2P^2$
	3, 5, 15	$2\cos\frac{\tau}{2} \ldots 2\cos\frac{\pi-\tau}{2} \ldots -\frac{\pi}{16}$	$2P\cos\frac{\tau}{2} \ldots 2P\cos\frac{\pi-\tau}{2} \ldots -\frac{\pi}{8}$
	18 et 19	$(n-2)^{n-2} \ldots (x-1)^{n-1}(y-n+1)$	$(x-2)^{n-2} \ldots (y-1)^{n-1}(x-n+1)$
	7 et 8	$P'p'\cos\lambda \ldots P'p'\cos\mu$	$P'p'\cos\lambda' \ldots P'p'\cos\mu'$
	22, 23, 24	$-\cos\beta),\ -\cos\gamma),\ -\cos\alpha),$	$-z\cos\beta),\ -x\cos\gamma),\ -y\cos\alpha),$
	15	$\frac{y\cos\gamma-z\cos\beta}{\cos\gamma}$	$\frac{y\cos\gamma-z\cos\beta}{\cos\lambda}$
	6	les équations (4)	les équations (1)
	15	$\frac{d\varphi(x,y)}{dx}=\frac{d\chi(x,y)}{dy}.$	$\frac{d\varphi(x,y)}{dy}=\frac{d\chi(x,y)}{dx}.$

TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

PAGES.	LIGNES.	FAUTES.	CORRECTIONS.
2	4	$l(z)$	$l(r)$
4	7 et 12	$\frac{\mu}{2}$ .... (8) ou (9)	$\frac{\mu}{1}$ .... (7) ou (8)
5	7	$\mu(^2-1)$	(μ^2-1)
8	1	$\left(e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)$	$\left(e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^\mu$
13	3	$\frac{f_{(m)}(x_1+\theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m)}$	$\frac{f^{(m)}(x_1+\theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m}$
15	19 et 21	${}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y} f((x))\ldots {}_{\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((f(x)))$	${}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y}((f(x)))\ldots {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((f(x)))$
16	11	$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}$	$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}=$
18	5	$\frac{df(x,z)}{dx}$	$\frac{df(x,z)}{dz}$
22	20	$(z+1)^s$	$(z-1)^a$
23	16	$\mathcal{E}\frac{((f(x)))}{1-\frac{z}{x}}$	$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{1-\frac{z}{x}}$
25	14	$f'(x+h)$	$f'(x+\theta h)$
30	1 et 4	Qy .... m et n	Qx .... n et m
31	2 et 12	seront ... l'aut. de la mécan. cél.	sont ... Daniel Bernoulli.
Ibid.	19	$Q^2=P^2$	$Q^2=2P^2$
35	3, 5, 15	$2\cos\frac{\tau}{2}\ldots 2\cos\frac{\pi-\tau}{2}\ldots-\frac{\pi}{16}$	$2P\cos\frac{\tau}{2}\ldots 2P\cos\frac{\pi-\tau}{2}\ldots-\frac{\pi}{8}$
49	18 et 19	$(n-2)^{n-2}\ldots(x-1)^{n-1}(y-n+1)$	$(x-2)^{n-2}\ldots(y-1)^{n-1}(x-n+1)$
71	7 et 8	$P'p'\cos\lambda$ .... $P'p'\cos\mu$	$P'p'\cos\lambda'$ .... $P'p'\cos\mu'$
75	22, 23, 24	$-\cos\beta),\ -\cos\gamma),\ -\cos\alpha),$	$-z\cos\beta),\ -x\cos\gamma),\ -y\cos\alpha),$
76	15	$\frac{y\cos\gamma-z\cos\beta}{\cos\gamma}$	$\frac{y\cos\gamma-z\cos\beta}{\cos\lambda}$
79	6	les équations (4)	les équations (1)
85	15	$\frac{d\varphi(x,y)}{dx}=\frac{d\chi(x,y)}{dy}.$	$\frac{d\varphi(x,y)}{dy}=\frac{d\chi(x,y)}{dx}.$

PAGES.	LIGNES.	FAUTES.	CORRECTIONS.
85	23	$[\chi(X,y)-\chi(x_0,y)]dx.$	$[\chi(X,y)-\chi(x_0,y)]dy.$
86	15	$\frac{d}{dx}$	$\frac{dz}{dx}$
89	16	$\frac{dy}{x-b}$,	$\frac{dy}{y-b}$,
99	11	$[x-a+(y_0-b)\sqrt{-1}]$	$[x-a+(y_0-b)\sqrt{-1}]^m$
121	26	multipliée par X,	multipliée par K
126	18	et désignant par m, etc.	*supprimez cette ligne.*
130	28	P''', P'', etc.,	P''', P^{iv}, etc.
141	1	$\frac{dz}{d\varsigma}$	$\frac{d\zeta}{d\varsigma}$
142	11	donné	données
144	19	des formules (19)	des formules (18)
152	1 et 21	$X^2+Y^2+Z^2=0$ ... avec eux,	$X^2+Y^2+Z^2>0$ ... avec ceux
158	2	dans ce sens	dans le sens
161	1 et 2	u et x .... l'équation (8)	u et v .... l'équation (3)
177	24	représentées comme par	représentées par
178	29	du troisième degré	du quatrième degré
192	20	$\frac{d^{n+1}z}{d\varsigma^{n+1}}$	$\frac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}}$
202	7	$a_2 r^{n-1}$	$a_2 r^{n-2}$
204	1	$\psi(r)$	$\varphi(r)$
226	4 et 6	$1\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ... $\cos^{a-1}\frac{\sin^a p}{\sin p}$	$1\left(\frac{1}{2}\right)$, ... $\cos^{a-1}p\frac{\sin ap}{\sin p}$
234	7	$2A$	$2C$
236	3	$n=N+\frac{b}{\mathcal{D}}$	$n=N+\frac{b}{\mathcal{D}}s.$
237	14	$\mathrm{F}\left(x,y-\frac{ux+vy}{w}\right)$	$\mathrm{F}\left(x,y,-\frac{ux+vy}{w}\right)$
238	2	$\mathrm{F}[w,wp-(u+vp)]$	$\mathrm{F}[w,wp,-(u+vp)]$
243	11	$-en$,	$-cn$,
244	22	Bx^2	By^2
246	17 et 21	$+r\Phi(a,b,c)$, ... $z=cs-nt.$	$+r\Psi(a,b,c)$, ... $z=cs-rt.$
247	13 et 16	t^2, ... $(t+S)^2.$	s^2, ... $(s+S)^2.$
248	10	$as-nt$ .... $cs-nt$	$as-mt$ .... $cs-rt$
268	19	$(t+u-v+w)^2$	$(t+u-v-w)^2$
307	21	$\frac{b}{a}<0.$	$\frac{b}{a}<1.$
328	19, 20, 21	aura une seule racine réelle, etc.	n'aura aucune racine réelle et finie.

MÉCANIQUE.

Tableau de M. Clément-Desormes, *relatif à la théorie générale de la puissance mécanique de la vapeur.* (Extrait par M. Hachette.)

M. de Betancourt avait essayé, en 1790, de déterminer les forces élastiques de la vapeur d'eau à diverses températures, et il avait fait plusieurs remarques importantes, 1° qu'il y avait une relation et une dépendance mutuelle entre la température et la pression de la vapeur, telles que la même pression doit toujours correspondre à la même température, quelle que soit l'étendue du vase dans lequel se fait la vaporisation, pourvu toutefois que ce vase ne contienne que de l'eau à l'état liquide et de l'eau en vapeur; 2° que la force élastique de la vapeur augmente plus rapidement que la température de l'eau qui la produit. En 1810, un célèbre physicien anglais, Dalton, détermina, par des expériences plus exactes, la correspondance des pressions et des températures de la vapeur d'eau. Plusieurs savants ont, depuis cette époque, confirmé les résultats obtenus par Dalton, et les ont étendus à des pressions plus élevées. M. Clément-Desormes, professeur de chimie au Conservatoire des arts et métiers, a fait imprimer un tableau qui montre la relation des pressions, des températures et des puissances mécaniques de la vapeur. Prenant pour unité de pression celle d'une colonne de mercure de 76 centimètres en hauteur, le tableau nouvellement publié (mars 1826) donne pour les pressions croissantes de 1 à 10, les températures suivantes (thermomètre centigrade, et en nombres entiers), 100°, 121°, 135°, 145°, 153°, 160°, 166°, 172°, 177°, 182°.

En supposant qu'un volume de vapeur à 100 degrés et à lapression d'une atmosphère, soit comprimé dans un vase imperméable au calorique, et réduit par la nouvelle pression à un volume dix fois moindre que le primitif, la température s'élevera-t-elle à 182° par le seul fait de l'augmentation de pression, ou une addition de chaleur sera-t-elle nécessaire pour maintenir toute la vapeur dans l'état de compression à dix atmosphères? Un physicien anglais, Southern, s'était depuis long-temps occupé de cette question, et il résulterait de ses expériences que l'on devrait considérer les deux volumes successifs de la vapeur aux pressions 1 et 10 atmosphères, comme des volumes d'eau liquide de même poids, élevés de la température zéro aux températures $t + 100°$, et $t + 100° + 82°$, t étant la chaleur latente de la vapeur, que les physiciens n'ont pas encore déterminée rigoureusement, et qui varie, d'après leurs expériences, de 530° à 567°. En admettant, avec M. Clément, qu'elle soit de 550°, et supposant qu'une masse d'eau m ait été convertie en un volume de vapeurs de même poids, à la pression de 10 atmosphères, la chaleur ajoutée à l'eau liquide à zéro, pour former la vapeur, serait, suivant Southern, m $(550° + 100° + 82°)$, ou $732°$ m, et suivant M. Clément, seulement $650°$ m, pour toutes les pressions. Ce savant affirme qu'un poids donné de vapeurs contient la même quantité de chaleur, quel que soit le volume de ces vapeurs; qu'ainsi, après avoir rempli de vapeurs un vase imperméable au calorique, et ayant eu soin qu'il en contienne la plus grande quantité possible sous une température quelconque, on pourra, si le vase est flexible et extensible, augmenter ou diminuer à volonté le volume de vapeurs; ces vapeurs prendront naturellement, sans addition ni soustraction de chaleur, la température qui leur convient pour conserver en totalité l'état de vapeur, et pour saturer l'espace dans lequel elles sont répandues.

Une Commission, nommée par l'Académie Royale des Sciences, s'occupe en ce moment d'un travail fort important, qui comprendra la loi de Mariote sur les gaz permanents, celle de Dalton sur les vapeurs, et les conséquences de ces deux lois.

De la puissance mécanique de la vapeur d'eau.

Quoique la vapeur d'eau ne soit une puissance mécanique que lorsqu'on l'emploie dans une machine qui se complique d'un grand nombre de mécanismes, cependant on peut facilement avoir une idée exacte de cette puissance, en ne considérant que la pièce principale d'une machine à vapeurs, qui est un cylindre creux dans lequel un piston de même diamètre peut se mouvoir à frottement, et dont la tige qui traverse le couvercle supérieur du cylindre, glisse dans un fourreau, qu'on nomme *boîte à cuir :* l'objet de ce fourreau est de fermer la communication de l'intérieur du cylindre et de l'air atmosphérique. Le piston, dans une position quelconque, divise le cylindre en deux capacités, et lorsque le piston est au milieu du cylindre, ces deux capacités sont égales. Admettons qu'il soit dans cette position, et que chaque capacité du cylindre soit remplie d'une vapeur d'eau à la température 100° et à la pression d'une colonne de mercure de 76 centimètres ; il est évident que si l'on refroidit seulement l'une des deux capacités, de manière que la vapeur d'eau y passe à l'état liquide, la vapeur qui conservera son état de fluide élastique dans l'autre capacité, pressera le piston, vaincra la résistance appliquée à la tige de ce piston, et le piston arrivera vers l'un des fonds du cylindre, dont elle ne sera séparée que par la couche d'eau liquide provenant de la vapeur condensée : échauffant extérieurement cette couche liquide, pour la convertir de nouveau en vapeurs, et refroidissant en même temps la vapeur dans la capacité opposée, le piston sera poussé vers le fond de cette dernière capacité, et, à chaque coup de piston, on produira un effet dynamique qui aura pour mesure le volume de l'espace parcouru par le piston, multiplié par la pression moyenne de la vapeur pendant la course du piston. Des effets semblables auraient lieu, si l'on substituait à la vapeur un fluide élastique, tel que le gaz fement ou un refroidissement extérieur, ce qui a été tenté nouvellement par M. Brunel, acide carbonique, qui prendrait successivement l'état gazeux et l'état liquide par un échauf-ingénieur français domicilié à Londres. Dans les machines à feu ordinaires, le cylindre à piston moteur est alternativement en communication, d'un côté, avec une chaudière, et, de l'autre côté, avec un condenseur dans lequel la vapeur passe à l'état liquide en se combinant avec un courant d'eau froide. On enlève du condenseur, au moyen d'une pompe dite *pompe à air*, l'eau d'injection et l'air dégagé de cette eau ; le jeu du piston dans le cylindre, est entretenu par un courant continuel de vapeurs qui remplissent l'une des capacités du cylindre, pendant que les vapeurs de la capacité opposée passent au condenseur. L'effet dynamique de la vapeur, transmis de cette manière au piston, se calcule pour chaque coup, de la même manière que dans l'hypothèse d'un échauffement et d'un refroidissement extérieurs.

Une machine à vapeurs est dite *à simple ou haute pression*, selon que la vapeur qui se forme dans la chaudière est à la pression d'une ou plusieurs atmosphères. Lorsque la vapeur est à la pression d'une seule atmosphère, les parois de la chaudière dans laquelle se forme cette vapeur, sont autant comprimées en dedans qu'en dehors ; mais pour des vapeurs à haute pression, elles sont poussées du dedans en dehors. Cette cause de rupture, qui n'existe pas pour les machines à simple pression, est augmentée par l'emploi de la fonte de fer dans la construction des chaudières. Cependant, on a reconnu que les machines à haute pression consomment, pour les mêmes effets, moins de combustibles, et, malgré les dangers de rupture, elles sont recherchées partout où le prix du charbon de terre est élevé. Les premières machines à haute pression et à condensation d'une bonne exécution, sont dues à l'ingénieur anglais Woolf, dont la patente pour cette invention est de l'année 1804 ; l'importation en a été faite en France par un habile mécanicien, M. Edwards, actuellement directeur de la fonderie de Chaillot (près Paris). Woolf avait imaginé un nouveau moyen de dilater

la vapeur avant de la condenser; il emploie deux cylindres, dont l'un est plus petit que l'autre; la vapeur de la chaudière passe d'abord dans le petit cylindre, de là dans le grand, où elle se dilate avant la condensation : ces deux cylindres ont chacun leur piston, qui communique à la résistance, et de plus ils sont réunis dans un seul cylindre enveloppe, qui communique avec la chaudière. Ce cylindre enveloppe a été depuis ajouté aux cylindres des machines à simple pression.

L'idée d'employer la force développée par la dilatation de la vapeur, avant la condensation, appartient à Watt; mais ce développement diminue la régularité du mouvement des pistons, lorsqu'il n'y a qu'un seul cylindre à vapeur; l'emploi de deux cylindres contigus pour produire la dilatation de la vapeur sans trop nuire à la régularité du mouvement des pistons, est de l'invention de Woolf.

L'importation des machines de Woolf par M. Edwards s'est faite en 1815; et en 1817, une machine de cette espèce, de la force de six chevaux, faisait mouvoir des mécaniques à carder la laine, chez M. Richard, rue Charonne, n° 95 (Voyez le rapport de M. Molard, de l'Académie royale des Sciences, *Bulletin de la Société d'Encouragement*, année 1817, page 267). Aucune expérience authentique n'avait été faite pour constater la dépense du charbon; mais les propriétaires de ces nouvelles machines s'accordaient à dire qu'elles économisaient le combustible. A cette époque, on n'avait aucune opinion fixe sur la cause de cette économie. Le 6 juin 1817, M. Hachette lut à la *Société Philomatique* un mémoire sur la manière de comparer les effets dynamiques des machines à haute et à simple pression. Quoiqu'il n'eût alors aucune connaissance des expériences de Southern, il admettait, comme un résultat suffisamment exact pour la pratique, que des poids égaux de vapeur contenaient, à très-peu près, des quantités égales de calorique; et comme des vapeurs à haute pression sont, à poids égal, des ressorts dont la tension est mesurée par la pression, il fit voir que la détente des ressorts devait produire un effet dynamique d'autant plus grand, que la tension primitive était plus considérable. On objecta à M. Hachette, dans la même séance (6 juin 1817), qu'il admettait un principe qui n'était pas prouvé, que la capacité en calorique des vapeurs élevées n'était pas connue; que l'on ignorait ce qui se passait lorsque la vapeur se dilatait en passant du petit cylindre de la machine de Woolf dans le grand; ces objections n'infirmaient pas la proposition démontrée par M. Hachette, que l'augmentation des effets dynamiques de la vapeur, provenant de la détente de cette vapeur, suffisait pour expliquer l'économie du combustible dans les machines à haute pression.

Sur la proposition de M. Hachette, le Conseil d'administration de la Société d'encouragement avait arrêté, dans sa séance du 16 décembre 1818, qu'on se servirait de la chaudière de l'une des machines à vapeurs de M. Edwards pour comparer, à poids égal de combustible employé, les quantités d'eau évaporées à diverses pressions. (Voyez le *Bulletin* de cette Societé, année 1818, page 385, et année 1819, pages 252-255.) MM. Desormes et Clément ont fait cette expérience, et en août 1819, ils ont présenté, à l'Académie royale des Sciences, un Mémoire sur la théorie des machines à feu, dont on a publié un extrait dans le *Bulletin de la Société Philomatique* de la même année, page 115. Ils ont cru pouvoir conclure de leurs expériences, cette loi générale, savoir : qu'une masse donnée de vapeurs constituée jusqu'à la saturation de l'espace, contient la même quantité de calorique, quelles que soient la température et la tension. Le tableau, que nous avons cité au commencement de cet article, contient les résultats des expériences et des calculs de MM. Desormes et Clément, sur la théorie générale de la puissance mécanique de la vapeur d'eau; on y trouve une expression numérique de cette puissance, tant pour le cas où la vapeur est à force élastique constante, que pour celui où elle se détend.

EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

SECONDE ANNÉE.



A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI,

RUE SERPENTE, N.° 7.

1827.

IMPRIMERIE DE BÉTHUNE, HOTEL PALATIN, PRÈS SAINT-SULPICE.

EXERCICES

DE MATHÉMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

AVERTISSEMENT.

L'ACCUEIL favorable que les douze livraisons des Exercices, publiées en 1826, ont reçu des Géomètres, détermine l'auteur à en faire paraître de nouvelles. Il y développera les diverses théories dont il a posé les bases dans les premières livraisons, et traitera plusieurs objets que le défaut d'espace l'avait obligé de passer sous silence. Il s'occupera particulièrement des applications de l'analyse à la physique, et montrera les facilités que présente à cet égard le calcul des résidus. Le premier volume des Exercices faisait déjà connaître une partie des avantages que l'on peut retirer de ce calcul pour la détermination des intégrales définies, pour la sommation des suites, et pour l'intégration des équations différentielles linéaires. On verra maintenant le même calcul fournir des méthodes générales pour la solution des problêmes de physique mathématique, et acquérir ainsi une importance qu'on aurait pu ne pas soupçonner au premier abord. Ces méthodes contribueront d'ailleurs aux progrès de l'analyse infinitésimale, et serviront non-seulement à intégrer des équations linéaires aux différences partielles, mais encore à déterminer les fonctions arbitraires

introduites par l'intégration, d'après des conditions données, à développer des fonctions quelconques en séries d'exponentielles dont les exposants soient respectivement proportionnels aux diverses racines d'une équation transcendante, et à fixer des limites entre lesquelles se trouvent renfermés les restes propres à compléter ces mêmes séries.



RECHERCHE DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉQUILIBRE

POUR UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

ASSUJETTIS A DES LIAISONS QUELCONQUES.

§ 1.er *Considérations générales.*

On peut arriver par deux routes différentes aux équations d'équilibre de plusieurs forces dont les points d'application sont assujettis à des liaisons quelconques. Le plus souvent on déduit ces équations du principe des vitesses virtuelles. Mais on peut aussi les établir directement à l'aide de diverses méthodes, entre lesquelles je vais en signaler une qui, à cause de sa simplicité, paraît digne de fixer un moment l'attention des géomètres.

Considérons un système de points matériels A, A', A'', etc...., sollicités par certaines forces. Si ces points matériels sont libres et indépendants les uns des autres, il sera nécessaire pour l'équilibre qu'après avoir réduit à une résultante unique toutes les forces appliquées à chaque point, on trouve chaque résultante égale à zéro. Mais, si les mêmes points sont assujettis à certaines liaisons, comme ces liaisons opposeront au mouvement du système certaines résistances, il ne sera plus nécessaire pour l'équilibre que la résultante des forces appliquées à chaque point s'évanouisse.

Il s'agit maintenant de faire voir comment on peut déduire les formules d'équilibre de la nature des liaisons supposées connues. Nous commencerons par examiner le cas particulier où il n'existe qu'une seule liaison, représentée par une seule équation entre les coordonnées des différents points. Nous traiterons ensuite le cas général où les liaisons sont en nombre quelconque.

§ 2.e *Équilibre de plusieurs points assujettis à une seule liaison.*

Supposons d'abord que les différents points se trouvent assujettis à une seule liaison. Soient dans cette hypothèse

$$x,\ y,\ z;\qquad x',\ y',\ z';\qquad \text{etc.}\dots,$$

les coordonnées rectangulaires des différents points A, A', A'', etc.... ;

$$P, P', \text{etc}....$$

les forces qui leur sont appliquées, réduites pour chaque point à une résultante unique, et

$$L = 0$$

l'équation de condition qui exprime la liaison donnée, L étant une fonction des variables x, y, z, x', y', z', etc. Je dis que l'équilibre pourra s'établir au moyen de la liaison, sans que la force P s'évanouisse, et même en général, quelle que soit l'intensité de cette force. Pour le démontrer, commençons par imaginer que l'on fixe tous les points du système à l'exception du point A qui a pour coordonnées x, y, z, et qu'en même temps on supprime les forces P'; P'', etc., appliquées aux points A', A'', etc.... Les coordonnées x, y, z demeurant seules variables dans l'équation $L = 0$, la liaison exprimée par cette équation n'aura plus d'autre effet que d'assujettir le point A à rester constamment sur une certaine surface courbe; et, si cette surface présente une résistance indéfinie, comme cette résistance a lieu suivant la normale, il suffira, pour que la force P ne trouble pas l'équilibre, qu'elle soit elle-même dirigée perpendiculairement à la surface. Supposons maintenant que l'on restitue au second point A' sa mobilité primitive. L'équilibre sera troublé en général, et le système des deux points mobiles se mettra en mouvement. Mais il est clair qu'on pourra toujours empêcher ce mouvement par le moyen d'une nouvelle force P' appliquée au point A' dans une certaine direction. La force P' étant choisie comme on vient de le dire, restituons encore au point A'' sa mobilité primitive. Pour retenir ce troisième point à sa place, il suffira évidemment de lui appliquer une troisième force P'' dans une direction déterminée. En continuant de même, on conclura définitivement que tous les points redevenus mobiles, et liés seulement par l'équation $L = 0$, pourront être maintenus en équilibre à l'aide de certaines forces $P, P', P''...$ appliquées à ces mêmes points suivant des directions données. Dans ce cas, la direction de chaque force sera perpendiculaire à la surface, que son point d'application est obligé de décrire, en vertu de l'équation $L = 0$, lorsqu'on fixe tous les autres points du système. De plus, l'intensité d'une force P pourra être choisie arbitrairement. Mais les intensités de toutes les autres forces dépendront nécessairement de l'intensité de la première.

Pour appliquer ces principes à un exemple, concevons que le système donné se compose seulement de deux points A, A' sollicités par les forces P, P', et liés par une droite $\overline{AA'}$ de longueur invariable; auquel cas l'équation $L = 0$ sera de la forme

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \text{constante}.$$

Alors, si l'on vient à fixer le point A', le point A ne pourra plus se mouvoir que sur la surface d'une sphère décrite du point A' comme centre avec la longueur $\overline{AA'}$ pour rayon; et par suite, pour que le point A demeure en repos, la force P devra être perpendiculaire à la surface de la sphère, par conséquent dirigée suivant le rayon $\overline{AA'}$, ou suivant son prolongement. Comme on peut faire un raisonnement semblable à l'égard de la force P', il est permis de conclure que, dans le cas d'équilibre, chacune des forces P, P' agira suivant la droite $\overline{AA'}$ prolongée dans un sens ou dans un autre. De plus, afin que la tendance de cette droite au mouvement reste la même dans les deux sens, il sera évidemment nécessaire que les forces P, P' aient les mêmes intensités et agissent en sens contraires. Réciproquement, si les forces P, P' sont égales et agissent en sens contraires suivant la droite $\overline{AA'}$, il est clair qu'elles se feront équilibre aux extrémités de cette droite.

Revenons maintenant au cas où plusieurs points A, A', A'', ... se trouvent assujettis à une liaison représentée par l'équation

$$L = 0. \tag{1}$$

Soient toujours $x, y, z;\ x', y', z';$ etc......, les coordonnées de ces points; $P, P', P'', \ldots$ les forces qui leur sont appliquées; et désignons par

$$X,\ Y,\ Z;\quad X'\ Y'\ Z';\quad \text{etc.} \ldots$$

les projections algébriques des forces P, P' P'',... sur les axes des x, des y et des z. Chaque force devant être perpendiculaire à la surface que son point d'application est assujetti à décrire, en vertu de la liaison $L = 0$, lorsque tous les autres points deviennent fixes; on aura nécessairement

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{X}{\left(\dfrac{dL}{dx}\right)} = \dfrac{Y}{\left(\dfrac{dL}{dy}\right)} = \dfrac{Z}{\left(\dfrac{dL}{dz}\right)} \\[2ex] \dfrac{X'}{\left(\dfrac{dL}{dx'}\right)} = \dfrac{Y'}{\left(\dfrac{dL}{dy'}\right)} = \dfrac{Z'}{\left(\dfrac{dL}{dz'}\right)}, \\[2ex] \text{etc.} \ldots ; \end{array}\right. \tag{2}$$

et par suite

$$(3)\quad \begin{cases} X=\lambda\dfrac{dL}{dx}, & Y=\lambda\dfrac{dL}{dy}, & Z=\lambda\dfrac{dL}{dz}; \\ X'=\lambda'\dfrac{dL}{dx'}, & Y'=\lambda'\dfrac{dL}{dy'}, & Z'=\lambda'\dfrac{dL}{dz'}; \\ \text{etc.}\dots, \end{cases}$$

λ, λ' etc.... désignant des coëfficients dont le premier dépendra de l'intensité de la force P, le second de l'intensité de la force P', etc.... De plus, comme l'intensité de la force P est une quantité arbitraire, mais de laquelle dépendent nécessairement les intensités des forces P', P'', etc....; il est clair qu'on pourra choisir à volonté la valeur du coëfficient λ, mais que, la valeur de λ étant donnée, celles de λ', λ'', etc......, devront s'en déduire immédiatement. Pour découvrir la relation qui existe entre λ' et λ, supposons que tous les points deviennent fixes à l'exception des deux points A, A'. Alors ces deux derniers points restant seuls mobiles, si la liaison $L=0$ a pour effet de les maintenir constamment à la même distance l'un de l'autre, il faudra que les forces P, P' soient égales et dirigées en sens contraires, ou, en d'autres termes, que l'on ait

$$(4)\qquad X'=-X,\quad Y'=-Y,\quad Z'=-Z.$$

Or, dans la même hypothèse, l'équation $L=0$ se réduisant à la forme

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\text{constante},$$

on en conclura

$$(5)\qquad \frac{dL}{dx'}=-\frac{dL}{dx},\quad \frac{dL}{dy'}=-\frac{dL}{dy},\quad \frac{dL}{dz'}=-\frac{dL}{dz}.$$

Par suite les formules (3) donneront

$$(6)\quad \begin{cases} X=\lambda\dfrac{dL}{dx}, & Y=\lambda\dfrac{dL}{dy}, & Z=\lambda\dfrac{dL}{dz}, \\ X'=-\lambda'\dfrac{dL}{dx}, & Y'=-\lambda'\dfrac{dL}{dy}, & Z'=-\lambda'\dfrac{dL}{dz}; \end{cases}$$

et les valeurs de X, Y, Z, X', Y', Z' satisferont aux équations (4), si l'on a

$$(7)\qquad \lambda'=\lambda.$$

Supposons maintenant que, dans le cas où les points A, A' restent seuls mobiles, la liaison

$$L=0 \tag{8}$$

n'oblige plus ces deux points à rester constamment à la même distance l'un de l'autre. On pourra joindre à la liaison $L=0$, celles qu'on établit entre les deux points, en les unissant par une droite invariable, et fixant le milieu de cette droite. Cela posé, si l'on désigne par a, b, c les coordonnées du point milieu, et par $\mathcal{D}$ la longueur de la droite, on aura entre les six variables

$$x, y, z; \quad x', y', z',$$

les cinq équations

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{c} L=0; \\ x+x'=2a, \quad y+y'=2b, \quad z+z'=2c; \\ (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\mathcal{D}^2; \end{array} \right.$$

dont la dernière peut être remplacée par la suivante

$$(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=\frac{\mathcal{D}^2}{4}. \tag{10}$$

En vertu des cinq équations (9), les positions des points A, A' ne seront pas complètement déterminées; mais ils pourront décrire deux courbes correspondantes tracées sur la surface d'une même sphère, de manière à se trouver toujours situés aux extrémités d'un même diamètre. Dans ces courbes, les cordes correspondantes, et par suite les tangentes menées par des points correspondants seront évidemment parallèles. Si l'on suppose

$$L=f(x, y, z, x', y', z' \ldots),$$

la courbe décrite par le point A en particulier sera déterminée par le système des deux équations

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{c} f(x, y, z, \quad 2a-x, \quad 2b-y, \quad 2c-z, \ldots)=0, \\ (a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=\frac{\mathcal{D}^2}{4}. \end{array} \right.$$

De plus, si l'on décompose la force P en deux autres, l'une perpendiculaire à la courbe que peut décrire le point A, l'autre dirigée suivant la tangente à cette courbe, la force perpendiculaire étant incapable de produire aucun effet, on pourra en faire abs-

traction, et ne considérer que la force dirigée suivant la tangente. On pourra de même remplacer la force P' par sa composante suivant la tangente à la courbe que peut décrire le point A'. Cela posé, comme les points A, A' sont situés à l'extrémité d'une droite invariable dont le milieu est fixe, et que les tangentes menées par ces points aux courbes qu'ils peuvent décrire sont parallèles, il est clair que les forces dirigées suivant ces tangentes, pour maintenir en équilibre les points A, A', devront être égales et agir dans le même sens; ce qui exige que les forces P, P', respectivement multipliées par les cosinus des angles que forment leurs directions avec la direction de l'une des tangentes prolongée dans un sens déterminé, fournissent des produits égaux et de même signe. Or la tangente à la courbe que peut décrire le point A, prolongée dans un certain sens, forme avec les axes des angles qui ont pour cosinus

$$\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \quad \frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}};$$

tandis que les cosinus des angles formés avec les mêmes axes par les directions des forces P, P' sont respectivement

$$\frac{X}{P}, \quad \frac{Y}{P}, \quad \frac{Z}{P},$$

$$\frac{X'}{P'}, \quad \frac{Y'}{P'}, \quad \frac{Z'}{P'}.$$

Par suite les cosinus des angles compris entre la direction de la tangente et celles des forces P, P' seront respectivement égaux, le premier à

$$\frac{X dx+Y dy+Z dz}{P\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}},$$

et le second à

$$\frac{X' dx+Y' dy+Z' dz}{P'\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

En multipliant le premier par la force P, le second par la force P', et égalant les produits, on trouvera

$$\frac{X dx+Y dy+Z dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{X' dx+Y' dy+Z' dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12) \qquad X dx + Y dy + Z dz = X' dx + Y' dy + Z' dz.$$

Si dans cette dernière équation on remet pour X, Y, Z, X', Y', Z' leurs valeurs tirées des formules (3), elle deviendra

(13) $$\lambda\left\{\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz\right\}=\lambda'\left\{\frac{dL}{dx'}dx+\frac{dL}{dy'}dy+\frac{dL}{dz'}dz\right\}.$$

D'ailleurs, en différenciant la première des équations (11), on en conclut

(14) $$\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz=\frac{dL}{dx'}dx+\frac{dL}{dy'}dy+\frac{dL}{dz'}dz.$$

Donc par suite on aura généralement

(15) $$\lambda=\lambda';$$

on trouvera de même $\lambda=\lambda''$, $\lambda=\lambda'''$, etc.... Cela posé, les équations (3) prendront la forme

(16) $$\left\{\begin{array}{lll} X=\lambda\dfrac{dL}{dx}, & Y=\lambda\dfrac{dL}{dy}, & Z=\lambda\dfrac{dL}{dz}, \\ X'=\lambda\dfrac{dL}{dx'}, & Y'=\lambda\dfrac{dL}{dy'}, & Z'=\lambda\dfrac{dL}{dz'}, \\ \text{etc.}\ldots; & & \end{array}\right.$$

et l'on en conclura

(17) $$\frac{X}{\left(\frac{dL}{dx}\right)}=\frac{Y}{\left(\frac{dL}{dy}\right)}=\frac{Z}{\left(\frac{dL}{dz}\right)}=\frac{X'}{\left(\frac{dL}{dx'}\right)}=\frac{Y'}{\left(\frac{dL}{dy'}\right)}=\frac{Z'}{\left(\frac{dL}{dz'}\right)}=\text{etc.}\ldots$$

Donc, pour qu'il y ait équilibre entre les forces P, P', P''..., dans le cas où leurs points d'application A, A', A'',... se trouvent assujettis à la seule liaison $L=0$, il est nécessaire et il suffit que les projections algébriques de ces forces sur les axes coordonnés soient respectivement proportionnelles aux dérivées de la fonction L prises par rapport aux variables x, y, z; x', y', z'; etc..... Alors, si l'on désigne par n le nombre des points A, A', A'',... la formule (17) fournira $3n-1$ équations distinctes qui seront précisément les équations d'équilibre. Ajoutons que les résistances opposées par la liaison $L=0$ aux mouvements des points A, A', A'',... seront employées à détruire les forces P, P'.... Donc ces résistances seront égales et directement opposées aux forces dont il s'agit. Donc les projections algébriques de ces résistances sur les axes coordonnés seront respectivement égales aux seconds membres des équations (16), pris avec le signe $-$, c'est-à-dire aux quantités

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{lll} -\lambda\dfrac{dL}{dx}, & -\lambda\dfrac{dL}{dy}, & -\lambda\dfrac{dL}{dz}, \\ -\lambda\dfrac{dL}{dx'}, & -\lambda\dfrac{dL}{dy'}, & -\lambda\dfrac{dL}{dz'}, \\ \text{etc.}\ldots & & \end{array}\right.$$

Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, supposons qu'en vertu de l'équation $L=0$, la somme des distances $\overline{AA'}$, $\overline{A'A''}$, $\overline{A''A'''}$, etc...., respectivement comprises entre les points A, A', A''... rangés dans un certain ordre, doive demeurer constante. Dans cette hypothèse, l'équation $L=0$ pourra être présentée sous la forme

$$(19)\quad \sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}+\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2]}+\text{etc.}=\text{constante};$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$(20)\quad r'=\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]},\ r''=\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2]},\ \text{etc.}\ldots$$

la formule (17) donnera

$$(21)\quad \frac{X}{\left(\frac{x-x'}{r'}\right)}=\frac{Y}{\left(\frac{y-y'}{r'}\right)}=\frac{Z}{\left(\frac{z-z'}{r'}\right)}=\frac{X'}{\frac{x'-x}{r'}+\frac{x'-x''}{r''}}=\frac{Y'}{\frac{y'-y}{r'}+\frac{y'-y''}{r''}}=\frac{Z'}{\frac{z'-z}{r'}+\frac{z'-z''}{r''}}=\text{etc.}\ldots$$

En égalant les trois premières fractions entre elles, on trouve

$$(22)\qquad \frac{X}{x-x'}=\frac{Y}{y-y'}=\frac{Z}{z-z'},$$

et l'on en conclut que, dans le cas d'équilibre, la force P est nécessairement dirigée suivant la droite $\overline{AA'}$. En égalant les trois fractions suivantes, on trouve

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{X'}{\frac{x'-x}{r'}+\frac{x'-x''}{r''}}=\frac{Y'}{\frac{y'-y}{r'}+\frac{y'-y''}{r''}}=\frac{Z'}{\frac{z'-z}{r'}+\frac{z'-z''}{r''}} \\ &=\frac{X'\left(\frac{x'-x}{r'}-\frac{x'-x''}{r''}\right)+Y'\left(\frac{y'-y}{r'}-\frac{y'-y''}{r''}\right)+Z'\left(\frac{z'-z}{r'}-\frac{z'-z''}{r''}\right)}{\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}{r'^2}-\frac{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}{r''^2}}; \end{aligned}\right.$$

et comme on a, en vertu des équations (20),

$$\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}{r'^2}-\frac{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}{r''^2}=0,$$

on tire évidemment de la formule (23)

$$X'\left(\frac{x'-x}{r'}-\frac{x''-x'}{r''}\right)+Y'\left(\frac{y'-y}{r'}-\frac{y''-y'}{r''}\right)+Z'\left(\frac{z'-z}{r'}-\frac{z''-z'}{r''}\right)=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(24)\quad \frac{X'}{P'}\,\frac{x'-x}{r'}+\frac{X'}{P'}\,\frac{y'-y}{r'}+\frac{Z'}{P'}\,\frac{z'-z}{r'}=\frac{X'}{P'}\,\frac{x''-x'}{r''}+\frac{Y'}{P'}\,\frac{y''-y'}{r''}+\frac{Z'}{P'}\,\frac{z''-z'}{r''}.$$

Cette dernière équation exprime que la force P' forme avec les deux droites $\overline{AA'}$ $\overline{A'A''}$ des angles égaux. De plus, comme, en prenant pour plan des x, y celui qui renferme ces deux droites, on a

$$z=0,\quad z'=0,\quad z''=0,$$

et qu'alors on tire de la formule (21)

$$Z'=0;$$

il est clair que la direction de la force P' est comprise dans le plan de ces mêmes droites. Par suite, elle est dirigée de manière à diviser l'angle des droites AA', $A'A''$ en parties égales.

On se trouverait conduit aux mêmes conclusions par la géométrie, en observant que la force P' doit être perpendiculaire à la surface que le point A' est obligé de décrire quand il demeure seul mobile. Or, dans cette hypothèse, il ne reste de variables que les longueurs $\overline{AA'}$, $\overline{A'A''}$ dont la somme doit être constante. Le point A' décrit donc alors un ellipsoïde de révolution engendré par une ellipse dont les points fixes A', A'' sont précisément les deux foyers; et la force P', devant être normale à l'ellipsoïde, par conséquent à l'ellipse génératrice, divisera nécessairement l'angle formé par les rayons vecteurs menés aux foyers, en deux parties égales.

§ 3.e *Équilibre de plusieurs points assujettis à diverses liaisons.*

Considérons maintenant des forces P, P', P'',.... dont les points d'application A, A', A''... soient assujettis à des liaisons quelconques. Soient toujours x, y, z; x', y', z',... les coordonnées des différents points; X, Y, Z; X', Y', Z',... les projections algébriques des forces P, P',... sur les axes coordonnés; et supposons que les diverses liaisons soient exprimées par les équations

$$(1) \qquad L=0, \quad M=0, \quad N=0, \quad \text{etc.}\ldots,$$

L, M, N,... désignant des fonctions des variables x, y, z; x', y', z'; etc.... Si l'équilibre a lieu, en vertu des liaisons données, entre les forces P, P', P'',... on pourra, sans troubler cet équilibre, substituer à la première liaison $L=0$, le système des résistances qu'elle oppose aux mouvements des différents points, c'est-à-dire, un système de forces dont les projections algébriques sur les axes seraient des quantités de la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} -\lambda\dfrac{dL}{dx}, & -\lambda\dfrac{dL}{dy}, & -\lambda\dfrac{dL}{dz}, \\ -\lambda\dfrac{dL}{dx'}, & -\lambda\dfrac{dL}{dy'}, & -\lambda\dfrac{dL}{dz'}, \\ -\text{etc.}\ldots, & & \end{array} \right.$$

On pourra ensuite supprimer la seconde liaison, pourvu qu'on la remplace par un système équivalent de forces dont les projections algébriques sur les axes seraient de la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} -\mu\dfrac{dM}{dx}, & -\mu\dfrac{dM}{dy}, & -\mu\dfrac{dM}{dz}, \\ -\mu\dfrac{dM}{dx'}, & -\mu\dfrac{dM}{dy'}, & -\mu\dfrac{dM}{dz'}, \\ -\text{etc.}\ldots & & \end{array} \right.$$

En continuant de même, on finira par supprimer toutes les liaisons, dont chacune se trouvera remplacée par le système des résistances qu'elle oppose aux mouvements des différents points. Alors, ces points étant redevenus libres et indépendants les uns des autres, il devra y avoir séparément équilibre entre la force et les résistances appliquées à chacun d'eux. Cela posé, l'équilibre entre la force et les résistances appliquées au point A fournira les équations

$$X - \lambda \frac{dL}{dx} - \mu \frac{dM}{dx} - \nu \frac{dN}{dx} - \text{etc.} = 0,$$

$$Y - \lambda \frac{dL}{dy} - \mu \frac{dM}{dy} - \nu \frac{dN}{dy} - \text{etc.} = 0,$$

$$Z - \lambda \frac{dL}{dz} - \mu \frac{dM}{dz} - \nu \frac{dN}{dz} - \text{etc.} = 0;$$

ou, ce qui revient au même, les suivantes

$$(4) \quad \begin{cases} X = \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \nu \frac{dN}{dx} + \text{etc.} \ldots, \\ Y = \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \nu \frac{dN}{dy} + \text{etc.} \ldots, \\ Z = \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \nu \frac{dN}{dz} + \text{etc.} \ldots . \end{cases}$$

On trouvera pareillement, en considérant l'équilibre des forces appliquées au point A',

$$(5) \quad \begin{cases} X' = \lambda \frac{dL}{dx'} + \mu \frac{dM}{dx'} + \nu \frac{dN}{dx'} + \text{etc.} \ldots, \\ Y' = \lambda \frac{dL}{dy'} + \mu \frac{dM}{dy'} + \nu \frac{dN}{dy'} + \text{etc.} \ldots, \\ Z' = \lambda \frac{dL}{dz'} + \mu \frac{dM}{dz'} + \nu \frac{dN}{dz'} + \text{etc.} \ldots, \end{cases}$$

etc. ......

Si n désigne le nombre des points A, A', A'', etc...., et m le nombre des liaisons $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc....; $3n$ sera le nombre des équations (4), (5), etc....; et, lorsqu'on aura éliminé entre ces équations les inconnues λ, μ, ν, etc..., il restera $3n - m$ équations d'équilibre. Les variables x, y, z; x', y', z', etc..., étant elles-mêmes au nombre de $3n$, et liées par m équations, $3n - m$ sera encore le nombre des variables indépendantes.

Les $3n - m$ équations que nous venons d'indiquer, et qui sont nécessaires dans le cas d'équilibre, suffisent évidemment pour l'assurer. En effet, ces $3n - m$ équations expriment qu'on peut satisfaire simultanément par des valeurs convenables de λ, μ, ν, etc....., aux formules (4), (5), etc.... Or, dans cette hypothèse, la force P pourra être remplacée par des forces Q, R, etc...., dont les projections algébriques sur les axes soient respectivement

$$\lambda \frac{dL}{dx}, \quad \lambda \frac{dL}{dy}, \quad \lambda \frac{dL}{dz}; \qquad \mu \frac{dM}{dx}, \quad \mu \frac{dM}{dy}, \quad \mu \frac{dM}{dz}; \quad \text{etc...},$$

la force P' par des forces Q', R', etc...., dont les projections algébriques sur les axes soient respectivement

$$\lambda \frac{dL}{dx'}, \quad \lambda \frac{dL}{dy'}, \quad \lambda \frac{dL}{dz'}; \qquad \mu \frac{dM}{dx'}, \quad \mu \frac{dM}{dy'}, \quad \mu \frac{dM}{dz'}; \quad \text{etc...};$$

etc... En conséquence, au système des forces P, P', etc...., on pourra en substituer plusieurs autres, savoir, 1.° le système des forces Q, Q', etc...., qui seront détruites par la liaison $L=0$; 2.° le système des forces R, R', etc........, qui seront détruites par la liaison $M=0$, etc.... Donc le système des points A, A', etc.,... sera dans le même cas que s'il n'était sollicité par aucune force. Donc il y aura équilibre.

Nous avons remarqué ci-dessus que le nombre des équations d'équilibre était toujours égal au nombre des variables indépendantes. On vérifie cette proposition dans le cas d'équilibre d'un polygone dont les côtés sont invariables. Il est également facile de s'assurer qu'elle est vraie pour un point libre, ou assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe, et pour un système invariable libre dans l'espace, ou assujetti à tourner autour d'un point fixe; etc.... Lorsqu'il n'y a qu'une seule liaison entre n points, le nombre des équations d'équilibre se réduit, ainsi que le nombre des variables indépendantes, à $3n-1$; et ces équations coïncident avec les formules (3) du § 2.

§ 4.° *Principe des vitesses virtuelles.*

La recherche des équations d'équilibre de plusieurs forces P, P', P'',... dont les points d'application (x, y, z), (x', y', z'), etc...., sont assujettis à des liaisons représentées par les formules $L=0$, $M=0$, etc...., peut être réduite, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, à l'élimination des inconnues λ, μ, ν,........ entre les équations (4), (5), etc..... Or, un moyen fort simple d'effectuer cette élimination est de recourir à la considération des vitesses virtuelles, en opérant comme l'a fait M. Poinsot dans le 13.° cahier du journal de l'École polytechnique. Je vais rappeler en peu de mots les résultats auxquels on parvient de cette manière.

Lorsqu'un point matériel se meut sur un plan ou dans l'espace, les coordonnées x, y, z, ainsi que l'arc s de la courbe décrite, varient avec le temps t; et, si

l'on suppose cet arc compté de manière à prendre un accroissement positif Δs, dans le cas où l'on attribue au temps t un accroissement positif Δt, la limite vers laquelle convergera le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, tandis que ses deux termes recevront des valeurs de plus en plus petites, ou, ce qui revient au même, le rapport entre les accroissements infiniment petits et simultanés de l'arc s et du temps t, sera ce qu'on nomme la *vitesse* du point matériel à la fin du temps t. Donc, si l'on désigne par ω cette vitesse, on aura

(1) $$\omega = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dt}.$$

De plus, la *direction* de cette vitesse ne sera autre chose que la direction de la tangente menée par l'extrémité de l'arc s à la courbe décrite, et prolongée dans le sens du mouvement; d'où il résulte que les cosinus des angles α, β, γ, formés par cette direction avec les demi-axes des coordonnées positives, seront respectivement

(2) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Cela posé, si l'on imagine que la vitesse ω soit représentée par une longueur portée sur sa direction à partir de l'extrémité de l'arc s, les trois produits

$$\omega\cos\alpha, \qquad \omega\cos\beta, \qquad \omega\cos\gamma,$$

exprimeront ce qu'on doit appeler les *projections algébriques* de la vitesse sur les axes des x, y, et z [voy. le 1.er volume, page 39], et se trouveront déterminés par les équations

(3) $$\omega\cos\alpha = \frac{dx}{dt}, \qquad \omega\cos\beta = \frac{dy}{dt}, \qquad \omega\cos\gamma = \frac{dz}{dt}.$$

Supposons maintenant que plusieurs points A, A', A'',....... soient assujettis à certaines liaisons

(4) $$L = 0, \qquad N = 0, \qquad M = 0, \qquad \text{etc....},$$

L, M, N étant fonctions des coordonnées x, y, z; x', y', z', etc.... Tous les mouvements que le système de ces points pourra prendre par l'effet d'une cause quelconque, sans que les liaisons soient troublées, seront ce qu'on appelle des *mouvements virtuels*, et les vitesses des différents points dans un *mouvement virtuel* quelconque

seront ce qu'on nomme des ***vitesses virtuelles***. Or, comme il suffira de connaître les valeurs de x, y, z; x', y', z', etc...., exprimées en fonction de t, pour en déduire immédiatement celles des quantités

$$(5)\qquad \frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt};\quad \frac{dx'}{dt},\quad \frac{dy'}{dt},\quad \frac{dz'}{dt};\quad \text{etc.}\ldots,$$

il est clair que les projections algébriques des vitesses virtuelles seront liées entre elles par autant d'équations que les coordonnées des différents points. En effet, on aura, dans tout mouvement compatible avec les liaisons données,

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dL}{dx}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dL}{dy}\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dL}{dz}\dfrac{dz}{dt}+\dfrac{dL}{dx'}\dfrac{dx'}{dt}+\text{etc.}\ldots=0,\\[2ex] \dfrac{dM}{dx}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dM}{dy}\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dM}{dz}\dfrac{dz}{dt}+\dfrac{dM}{dx'}\dfrac{dx'}{dt}+\text{etc.}\ldots=0,\\[2ex] \text{etc.}\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Cela posé, concevons que les différents points, étant parvenus au bout du temps t dans de certaines positions, puissent y être maintenus en équilibre par le moyen de forces

$$P,\quad P',\quad P'',\ldots.$$

dont les projections algébriques sur les axes des x, y, z soient respectivement X, Y, Z; X', Y', Z'; etc..... Alors, pour obtenir les équations d'équilibre, il suffira d'éliminer les inconnues $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ entre les formules (4), (5) du § 3. Or on y parviendra évidemment, si l'on ajoute ces formules, après avoir multiplié la première par $\frac{dx}{dt}$, la seconde par $\frac{dy}{dt}$, la troisième par $\frac{dz}{dt}$, la quatrième par $\frac{dx'}{dt}$, etc... On trouvera de cette manière

$$(7)\qquad X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}+X'\frac{dx'}{dt}+\text{etc.}\ldots=0.$$

Par conséquent, lorsqu'il y a équilibre, l'équation (7) subsiste dans un mouvement virtuel quelconque.

Réciproquement, si l'équation (7) subsiste dans un mouvement virtuel quelconque, je dis qu'il y aura équilibre. En effet, dans cette hypothèse, la formule (7) sera satisfaite pour tous les systèmes de valeurs des quantités

(8) $$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \quad \frac{dx'}{dt}, \quad \text{etc...},$$

qui seront propres à vérifier les équations (6). Par suite, si, au moyen des équations (6), on élimine de la formule (7) m de ces quantités, toutes les autres pouvant être choisies arbitrairement, leurs coëfficients devront se réduire à zéro. Or, pour effectuer l'élimination, il suffira d'ajouter à la formule (7), les équations (6) respectivement multipliées par des facteurs indéterminés

$$-\lambda, \quad -\mu, \quad -\nu, \quad \text{etc....};$$

et d'égaler ensuite à zéro les m premiers coëfficients de

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \quad \text{etc.....}$$

Les facteurs λ, μ, ν.... étant choisis de manière à remplir ces conditions, c'est-à-dire, de manière à faire disparaître les m premiers termes de la formule

(9) $$\left\{\begin{aligned} &\left(X-\lambda\frac{dL}{dx}-\mu\frac{dM}{dx}-\nu\frac{dN}{dx}-\text{etc.}\dots\right)\frac{dx}{dt}\\ +&\left(Y-\lambda\frac{dL}{dy}-\mu\frac{dM}{dy}-\nu\frac{dN}{dy}-\text{etc.}\dots\right)\frac{dy}{dt}\\ +&\left(Z-\lambda\frac{dL}{dz}-\mu\frac{dM}{dz}-\nu\frac{dN}{dz}-\text{etc.}\dots\right)\frac{dz}{dt}\\ +&\left(X'-\lambda\frac{dL}{dx'}-\mu\frac{dM}{dx'}-\nu\frac{dN}{dx'}+\text{etc.}\dots\right)\frac{dx'}{dt}\\ +&\text{etc.}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0, \end{aligned}\right.$$

les coëfficients des $3n-m$ derniers termes devront encore être séparément nuls. En conséquence on pourra réduire à zéro les coëfficients de tous les termes, c'est-à-dire, satisfaire aux équations (4), (5)... du § 3.[e] par des valeurs convenables des facteurs λ, μ, ν...; d'où il résulte qu'il y aura équilibre dans le système des points A, A', A'', etc. ...

L'équation (7), qui subsiste, lorsqu'il y a équilibre, pour tous les mouvements virtuels, renferme ce qu'on appelle le principe des vitesses virtuelles. Elle peut être présentée sous une autre forme qu'il est utile de connaître, et que nous allons rappeler ici.

Soit ω la vitesse virtuelle du point matériel A, et $\widehat{P,\omega}$ l'angle compris entre la direction de cette vitesse virtuelle et la direction de la force P. Comme les cosinus des angles formés par ces deux directions avec les axes sont respectivement

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\omega}, & \dfrac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\omega}, & \dfrac{\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\omega}, \\ \dfrac{X}{P}, & \dfrac{Y}{P}, & \dfrac{Z}{P}; \end{array} \right.$$

on aura évidemment

$$(11)\qquad \cos(\widehat{P,\omega}) = \frac{X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}}{P.\omega},$$

$$(12)\qquad X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = P\omega\cos(\widehat{P,\omega}).$$

On trouvera de même, en désignant par ω' la vitesse virtuelle du point A',

$$(13)\qquad X'\frac{dx'}{dt} + Y'\frac{dy'}{dt} + Z'\frac{dz'}{dt} = P'\omega'\cos(\widehat{P',\omega'}),$$

etc.... Par conséquent l'équation (7) pourra s'écrire ainsi qu'il suit

$$(14)\qquad P\omega\cos(\widehat{P,\omega}) + P'\omega'\cos(\widehat{P',\omega'}) + \text{etc.} \ldots = 0.$$

Dans cette dernière, chaque terme représente le produit d'une force par la vitesse virtuelle de son point d'application et par le cosinus de l'angle compris entre la direction de la force et la direction de la vitesse virtuelle. Un semblable produit est ce que nous nommerons le *moment virtuel* de la force. On peut l'obtenir en multipliant la force par la vitesse virtuelle projetée sur la direction de la force, ou la vitesse virtuelle par la projection de la force sur la direction de cette vitesse. Cela posé, on peut énoncer le principe des vitesses virtuelles de la manière suivante.

Pour que l'équilibre ait lieu entre plusieurs forces dont les points d'application sont assujettis à des liaisons quelconques, il est nécessaire, et il suffit que la somme des moments virtuels de ces différentes forces soit égale à zéro, dans tous les mouvements virtuels possibles, c'est-à-dire, dans tous les mouvements compatibles avec les liaisons données.

Lorsqu'on veut déduire du principe des vitesses virtuelles toutes les équations d'équilibre relatives à un système donné, il suffit de considérer successivement autant de mouvements virtuels distincts les uns des autres qu'il y a de variables indépendantes parmi les coordonnées

$$x, y, z; \quad x', y', z'; \text{ etc.} \ldots.$$

Le nombre de ces mouvements virtuels sera donc $3n - m$, si n désigne le nombre des points donnés, et m le nombre des liaisons auxquelles on les suppose assujettis.

Pour montrer une application de la formule (7), concevons que les liaisons établies entre différents points A, A', A''... permettent d'imprimer à ces mêmes points un mouvement commun de translation parallèlement à l'axe des x. Ce mouvement de translation sera un mouvement virtuel, dans lequel les vitesses virtuelles ω, ω', ω''... seront égales entre elles; et, si, pour fixer les idées, on suppose le mouvement dirigé dans le sens des x positives; on aura évidemment

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx''}{dt} = \ldots\ldots = \omega, \\ &\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy''}{dt} = \ldots\ldots = 0, \\ &\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz''}{dt} = \ldots\ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Par suite, la formule (7) donnera

$$(16)\qquad (X + X' + X'' + \ldots)\,\omega = 0;$$

et comme, par hypothèse, la quantité ω n'est pas nulle, on tirera de l'équation (16)

$$(17)\qquad X + X' + X'' + \ldots\ldots = 0.$$

De même, si un mouvement commun de translation, en vertu duquel les différents points acquerraient simultanément des vitesses égales et parallèles à l'axe des y, ou à l'axe des z, est virtuel, c'est-à-dire compatible avec les liaisons données, la formule (7) entraînera l'équation

$$(18)\qquad Y + Y' + Y'' + \ldots\ldots\ldots = 0,$$

ou la suivante:

$$(19)\qquad Z + Z' + Z'' + \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Concevons encore que, sans troubler les liaisons établies, on puisse imprimer au système des points A, A', A'', etc....., un mouvement général de rotation autour de l'axe des x; et supposons, pour fixer les idées, que ce mouvement de rotation soit direct, la courbe décrite par le point (x, y, z), dans le mouvement virtuel dont il s'agit, sera un cercle dont nous désignerons le rayon par r, et dont les équations seront de la forme

(20) $$x = \text{constante}, \qquad y^2 + z^2 = r^2.$$

Or, si l'on différencie ces équations par rapport au temps, on trouvera

(21) $$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0.$$

D'ailleurs, dans un mouvement de rotation direct autour de l'axe des x, le point (x, y, z) sera porté du côté des z positives ou du côté des z négatives, suivant que l'ordonnée y sera elle-même positive ou négative; et par conséquent le coefficient différentiel $\frac{dz}{dt}$ sera une quantité de même signe que y. Cela posé, on tirera de l'équation (21)

(22) $$\frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)}{y} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{-z} = \frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = \frac{\omega}{r}.$$

Ajoutons que, si l'on nomme s, s'... les arcs de cercle décrits par les différents points à la fin du temps t; r, r'... les rayons de ces mêmes cercles, et Δs, $\Delta s'$... les accroissements infiniment petits que prennent les arcs s, s'... pendant l'instant Δt, on aura évidemment

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{\Delta s'}{r'} = \text{etc.}\ldots, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{r'}\frac{\Delta s'}{\Delta t} = \text{etc.}\ldots,$$

et par suite

$$\frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r'}\frac{ds'}{dt} = \text{etc.}\ldots,$$

ou plus simplement

(23) $$\frac{\omega}{r} = \frac{\omega'}{r'} = \frac{\omega''}{r''} = \text{etc.}\ldots.$$

Donc les vitesses virtuelles des différents points seront proportionnelles aux rayons des

cercles décrits; et si l'on appelle ε la vitesse angulaire du système, c'est-à-dire la vitesse d'un point situé à l'unité de distance de l'axe des x, on aura

$$\frac{\omega}{r} = \frac{\omega'}{r'} = \frac{\omega''}{r''} = \ldots = \varepsilon \tag{24}$$

$$\omega = \varepsilon r, \qquad \omega' = \varepsilon r', \qquad \omega'' = \varepsilon r'', \qquad \text{etc.} \ldots \tag{25}$$

Cela posé, les équations (21) et (22) donneront

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = -\varepsilon z, \qquad \frac{dz}{dt} = \varepsilon y, \tag{26}$$

On trouvera pareillement

$$\frac{dx'}{dt} = 0, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\varepsilon z', \qquad \frac{dz'}{dt} = \varepsilon y', \tag{27}$$

etc. ...; puis l'on tirera de la formule (7)

$$(yZ - zY + y'Z' - z'Y' + \ldots)\varepsilon = 0; \tag{28}$$

et, comme par hypothèse la quantité ε n'est pas nulle, on trouvera définitivement

$$yZ - zY + y'Z' - z'Y' + \text{etc.} \ldots = 0. \tag{29}$$

De même, si un mouvement général de rotation en vertu duquel chacun des points A, A', A''... décrirait autour de l'axe des y ou des z un arc de cercle proportionnel à sa distance à cet axe, était virtuel, c'est-à-dire compatible avec les liaisons données, la formule (7) entraînerait l'équation

$$zX - xZ + z'X' - x'Z' + \text{etc.} \ldots = 0, \tag{30}$$

ou la suivante :

$$xY - yX + x'Y' - y'X' + \text{etc.} \ldots = 0. \tag{31}$$

Il est bon d'observer que les équations (17), (18) et (19), ou (29), (30) et (31) sont précisément celles qu'on obtient en égalant à zéro les sommes des projections algébriques des forces P, P', P''..., ou de leurs moments linéaires sur les axes des x, y, z. Ajoutons que chacune des sommes ainsi calculées coïncide avec l'une des projections algébriques de la force principale ou du moment linéaire principal.

Lorsque les points A, A', A''... composent un système invariable de forme, mais entièrement libre dans l'espace, les six mouvements généraux de translation parallèlement aux axes coordonnés et de rotation autour de ces axes sont compatibles avec les liaisons de ce système. Par suite, la formule (7) entraîne les six équations (17), (18), (19), (29), (30) et (31). D'ailleurs, dans la même hypothèse, celles des variables

$$x, y, z;\ x', y', z';\ x'', y'', z'';\ x''', y''', z''';\ \text{etc.} \ldots$$

que l'on peut considérer comme indépendantes, se réduisent évidemment à six. En effet, puisqu'on suppose les points A, A', A'', A'''... liés invariablement les uns aux autres, la position de chacun d'eux sera complètement déterminée dans l'espace, si l'on connaît la position des trois premiers, c'est-à-dire les neuf coordonnées x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''. De plus, les trois points A, A', A'' étant liés eux-mêmes par trois droites invariables, les neuf coordonnées dont il s'agit seront assujetties à trois équations de condition, en vertu desquelles trois de ces coordonnées deviendront fonctions des six autres. Donc il n'y aura effectivement que six variables indépendantes, et les six équations qu'on obtient en égalant à zéro les sommes des projections algébriques des forces données ou de leurs moments linéaires sur les axes des x, y et z, suffiront pour assurer l'équilibre. En d'autres termes, il suffira, pour l'équilibre, que la force principale et le moment linéaire principal s'évanouissent.

Si un système invariable de forme était retenu par un point fixe, les mouvements de translation dirigés parallèlement aux axes cesseraient d'être des mouvements virtuels, puisqu'ils ne pourraient avoir lieu sans rompre les liaisons établies. Mais, en prenant le point fixe pour origine des coordonnées, on pourrait encore imprimer au système des points A, A', A''..... un mouvement de rotation autour de l'un quelconque des axes coordonnés. Par suite la formule (7) entraînerait toujours les trois équations (29), (30), (31); et ces équations, dont le nombre serait précisément égal à celui des variables indépendantes, suffiraient pour assurer l'équilibre.

Si le système invariable était retenu par deux points fixes, un mouvement virtuel ne pourrait être qu'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe passant par ces deux points; et la formule (7) ne fournirait plus qu'une seule équation d'équilibre, relative à ce mouvement virtuel. Si l'on prenait l'axe fixe pour axe des z, l'équation unique d'équilibre serait celle qu'on obtient en ajoutant les projections algébriques des moments linéaires des forces sur cet axe, et égalant la somme à zéro, c'est-à-dire l'équation (31). Il est d'ailleurs facile de voir qu'il n'existe dans le cas présent qu'une seule variable indépendante.

Si le système invariable pouvait recevoir, non-seulement un mouvement de rotation autour de l'axe des z, mais encore un mouvement de translation dirigé parallèlement

à cet axe, ces deux mouvements virtuels fourniraient les équations (19) et (31) qui suffiraient pour assurer l'équilibre.

Enfin, si les points renfermés dans le plan des x, y sont assujettis à n'en jamais sortir, le mouvement de rotation autour de l'axe des z, et les mouvements de translation dirigés parallèlement aux axes des x et y fourniront pour le système invariable trois équations d'équilibre, savoir, les formules (17), (18) et (31). Comme, dans la même hypothèse, le nombre des variables indépendantes sera égal à trois, les équations dont il s'agit suffiront pour exprimer les conditions d'équilibre.

Les conséquences que nous venons de déduire du principe des vitesses virtuelles s'accordent évidemment avec les résultats auxquels nous étions parvenus, dans le premier volume, par la considération directe des projections algébriques des forces et de leurs moments linéaires.

Concevons maintenant que, les points A, A', A'',... étant assujettis à des liaisons quelconques, les forces P, P', P'',... qui sollicitent ces mêmes points, se réduisent à des poids. Admettons en outre que l'axe des x soit vertical, et que les x positives se comptent dans le sens de la pesanteur, on aura, dans ce cas,

$$(32)\qquad \left\{\begin{array}{llll} X=P, & X'=P', & X''=P'', & \text{etc.}\ldots, \\ Y=0, & Y'=0, & Y''=0, & \text{etc.}\ldots, \\ Z=0, & Z'=0, & Z''=0, & \text{etc.}\ldots; \end{array}\right.$$

et la formule (7) donnera

$$(33)\qquad P\frac{dx}{dt}+P'\frac{dx'}{dt}+P''\frac{dx''}{dt}+\text{etc.}\ldots=0.$$

D'ailleurs, si l'on nomme ξ l'abscisse du centre des forces parallèles P, P', P'',... respectivement appliquées aux points A, A', A'',....... c'est-à-dire, en d'autres termes, l'abscisse du centre de gravité du système, on aura

$$(34)\qquad Px+P'x'+P''x''+\ldots=(P+P'+P''+\ldots)\,\xi,$$

et par suite

$$(35)\qquad P\frac{dx}{dt}+P'\frac{dx'}{dt}+P''\frac{dx''}{dt}+\ldots=(P+P'+P''+\ldots)\frac{d\xi}{dt}.$$

Donc la formule (33) pourra être réduite à

$$\frac{d\xi}{dt} = 0. \tag{36}$$

Or, il résulte de cette dernière équation que, dans tout mouvement compatible avec les liaisons du système, la vitesse virtuelle du centre de gravité, étant projetée sur l'axe des x, donnera une projection nulle. Donc, pour qu'il y ait équilibre entre différents poids, il est nécessaire et il suffit que, dans chaque mouvement virtuel, la direction primitive de la vitesse du centre de gravité soit horizontale.

Dans ce qui précède, nous avons admis que les résistances opposées aux mouvements de différents points par des liaisons établies entre eux pouvaient croître indéfiniment et au-delà de toute limite. Concevons maintenant que ces résistances ne puissent dépasser certaines limites sans que les liaisons se trouvent rompues, alors il ne suffira plus pour l'équilibre que l'on puisse déterminer les coefficients λ, μ, ν, ... de manière à vérifier les équations (4), (5), etc.... du § 3.e Il faudra encore que les valeurs de λ, μ, ν,... tirées de ces équations, et substituées dans les produits

$$\lambda^2\left\{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right\},\quad \mu^2\left\{\left(\frac{dM}{dx}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz}\right)\right.,\quad \nu^2\left\{\left(\frac{dN}{dx}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz}\right)^2\right\}\ldots$$

fournissent des nombres dont les racines carrées ne dépassent pas les limites des résistances que la première, la seconde, la troisième .... liaison peuvent opposer, sans se rompre, au mouvement du premier point. Il sera de même nécessaire que les racines carrées des produits

$$\lambda^2\left\{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right\},\quad \mu^2\left\{\left(\frac{dM}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz'}\right)^2\right\},\quad \nu^2\left\{\left(\frac{dN}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz'}\right)^2\right\}\ldots$$

ne dépassent les limites des résistances que les diverses liaisons peuvent opposer au mouvement du second point; et ainsi de suite.



DE LA PRESSION DANS LES FLUIDES.

Dans les traités de mécanique où les équations d'équilibre des fluides ne sont pas immédiatement déduites de la formule des vitesses virtuelles, on a recours, pour démontrer ces équations, au principe de *l'égalité de pression en tout sens*. Or, ce principe lui-même peut être facilement établi à l'aide des considérations suivantes.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point pris au hasard dans une masse fluide en équilibre, dont chaque molécule est sollicitée par une certaine force accélératrice, et X, Y, Z les projections algébriques de cette force sur les axes coordonnés pour le point (x, y, z). Si l'on fait passer par ce même point une surface s plane, rigide et infiniment petite, cette surface devra rester en équilibre, et par conséquent les pressions exercées contre elles par les couches de fluide qui l'avoisinent de part et d'autre, devront se réduire à des forces égales et directement opposées. De plus, chacune de ces pressions devra être perpendiculaire au plan de la surface s. Car, si cette condition n'était pas remplie, les molécules fluides qui touchent la surface ne pourraient demeurer en repos. Cela posé, si l'on désigne par ps chacune des deux pressions dont il s'agit, le rapport $\frac{ps}{s}$ ou la quantité p sera ce qu'on nomme la *pression hydrostatique*, exercée au point (x, y, z) contre le plan de la surface s.

Considérons maintenant dans la masse fluide un second point qui ait pour coordonnées x_0, y et z. Faisons passer par ce point un nouveau plan, et traçons dans ce nouveau plan une surface infiniment petite s_0, dont la projection sur le plan des y, z se confonde avec celle de la surface s. Enfin, soit a cette projection, et p_0 la pression hydrostatique exercée au point (x_0, y, z) contre le plan de la surface s_0. L'équilibre qui a lieu dans la masse fluide ne sera pas troublé, si l'on vient à solidifier une portion de cette masse. Or, admettons que la partie solidifiée soit comprise dans le cylindre qui aurait pour génératrice une droite parallèle à l'axe des x, et pour bases les surfaces infiniment petites s_0, s. Soit d'ailleurs ρ la densité du liquide au point x, y, z, et supposons $x > x_0$. Si l'on projette sur l'axe de x les forces motrices qui sollicitent les diverses molécules du cylindre, et les pressions supportées par les deux bases, on trouvera $a\int_{x_0}^{x}\rho X\,dx$ pour la somme des projections algébriques des forces motrices appliquées aux diverses molécules, $p_0 s_0 \times \frac{a}{s_0}$, ou $p_0 a$ pour la pro-

jection algébrique de la pression $p_0 s_0$ supportée par la surface s_0, enfin $ps \times -\frac{a}{s_0}$, ou $-pa$ pour la projection algébrique de la pression ps supportée par la surface s. Quant aux pressions supportées par la surface latérale, elles seront, en chaque point de cette surface, perpendiculaires à la génératrice du cylindre, et par conséquent à l'axe des x; d'où il résulte que leurs projections algébriques sur cet axe s'évanouiront. D'ailleurs le cylindre, devenu solide, doit rester encore en équilibre au milieu de la masse fluide. Donc la somme des projections algébriques des forces appliquées à ses molécules et aux surfaces qui le terminent doit se réduire à zéro. On aura donc nécessairement

$$a\int_{x_0}^{x} \rho X\,dx + p_0 a - pa = 0,$$

et par suite

(1) $$p = p_0 + \int_{x_0}^{x} \rho X\,dx.$$

Or, si l'on vient à faire tourner le plan de la surface s autour du point (x, y, z), sans changer la position du plan qui renferme la surface s_0, la pression p, exercée contre la première surface, et déterminée par l'équation (1), ne variera pas. Donc cette pression conserve la même valeur, quel que soit le plan contre lequel elle s'exerce, ou, en d'autres termes, il y a, au point (x, y, z) choisi arbitrairement dans la masse fluide, égalité de pression en tout sens. Ajoutons que de l'équation (1) différenciée par rapport à x, on tire immédiatement

(2) $$\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho X. \quad \text{On trouvera de même} \\ \frac{dp}{dy} &= \rho Y, \\ \frac{dp}{dz} &= \rho Z; \end{aligned}\right.$$

et par suite

(3) $$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Ces dernières formules sont les équations connues, à l'aide desquelles on fixe les conditions d'équilibre d'une masse fluide, et la valeur de la pression hydrostatique en chaque point.

SUR LA DÉTERMINATION

DES CONSTANTES ARBITRAIRES

RENFERMÉES DANS LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

J'ai fait voir, dans le premier volume des Exercices de mathématiques, avec quelle facilité l'on déduit du calcul des résidus les intégrales générales des équations différentielles linéaires à coëfficients constants, et même, dans plusieurs cas, à coëfficients variables. Mais les intégrales dont il s'agit renferment des fonctions arbitraires; et de ces fonctions dérivent, après l'extraction des résidus, des constantes arbitraires, qui, dans chaque problême, doivent être déterminées de manière à vérifier des conditions particulières. Or, dans la plupart des questions qui conduisent à des équations différentielles de l'ordre n entre deux variables x, y, on connaît *a priori* les valeurs des fonctions

$$y, \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ \ldots\ldots\ y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

correspondantes à une valeur donnée x_0 de la variable x. Alors on peut fixer complètement la forme de la fonction arbitraire comprise sous le signe $\mathcal{E}$, et l'on y parvient en effet, quand l'équation est linéaire, en suivant les méthodes que nous allons indiquer.

Considérons en premier lieu l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = 0, \tag{1}$$

dans laquelle a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n désignent des coëfficients constants; et faisons, pour abréger,

$$F(r) = r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \ldots + a_{n-1}r + a_n. \tag{2}$$

L'intégrale générale de l'équation (1) sera [voyez la page 202 du premier volume]

(3) $$y = \mathcal{E}\frac{e^{rx}\varphi(r)}{((F(r)))},$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif à la lettre r, et $\varphi(r)$ représentant une fonction de r assujettie à conserver une valeur finie pour toutes les valeurs de r propres à vérifier la formule

(4) $$F(r) = 0.$$

Cela posé, concevons d'abord que les valeurs des fonctions

(5) $$y, \quad y', \quad y'', \dots \; y^{(n-1)},$$

correspondantes à $x = x_0$, doivent se réduire aux différents termes de la progression géométrique

(6) $$\eta^0 = 1, \quad \eta^1, \quad \eta^2, \dots \; \eta^{n-1},$$

η désignant une quantité constante. Comme, en nommant m un nombre entier quelconque, on tirera de la formule (3)

(7) $$y^{(m)} = \mathcal{E}\frac{r^m e^{rx}\varphi(r)}{((F(r)))},$$

il suffira évidemment d'assigner à la fonction $\varphi(r)$ une valeur telle que la condition

(8) $$\mathcal{E}\frac{r^m e^{rx_0}\varphi(r)}{((F(r)))} = \eta^m = \mathcal{E}\frac{r^m}{((r-\eta))}$$

se trouve remplie pour toutes les valeurs de m inférieures à n. En d'autres termes, il suffira que l'on ait, pour $m < n$,

$$\mathcal{E}\frac{r^m e^{rx_0}\varphi(r)}{((F(r)))} - \mathcal{E}\frac{r^m}{((r-\eta))} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

(9) $$\mathcal{E}\, r^m \frac{(r-\eta)e^{rx_0}\varphi(r) - F(r)}{(((r-\eta)F(r)))} = 0.$$

Or, le produit $(r-\eta)F(r)$ étant, par rapport à r, du degré $n-1$, on aura généralement, en vertu de la formule (64) de la page 23 du premier volume,

(10) $$\mathcal{E}\frac{r^m}{((\,(r-n)F(r)\,))}=0\,;$$

et par conséquent la condition (9) sera vérifiée, si l'on prend

(11) $$(r-n)e^{rx_0}\varphi(r)-F(r)=C\,,$$

ou, ce qui revient au même,

(12) $$\varphi(r)=\frac{F(r)+C}{r-n}e^{-rx_0}\,,$$

C désignant une quantité constante, c'est-à-dire indépendante de r. De plus, si l'on veut que, dans l'équation (1), la fonction $\varphi(r)$ conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies de r, et en particulier pour $r=n$, il est clair que le numérateur de la fraction

$$\frac{F(r)+C}{r-n}$$

devra s'évanouir avec son dénominateur. Il faudra donc que l'on ait

$$F(n)+C=0\,,\qquad\text{ou}\qquad C=-F(n)\,;$$

et par suite la formule (12) donnera

(13) $$\varphi(r)=\frac{F(r)-F(n)}{r-n}\,e^{-rx_0}.$$

En substituant cette dernière valeur de $\varphi(r)$ dans l'équation (3), on trouvera

(14) $$y=\mathcal{E}\,\frac{F(r)-F(n)}{r-n}\,\frac{e^{r(x-x_0)}}{((\,F(r)\,))}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

1.er Théorème. *Si l'on intègre l'équation* (1) *de manière que la fonction* y *et ses dérivées d'un ordre inférieur à* n, *c'est-à-dire, les quantités*

(5) $$y,\ \ y',\ \ y'',\dots\ y^{(n-3)},\ \ y^{(n-2)},\ \ y^{(n-1)}$$

se réduisent, en vertu de la supposition $x=x_0$, *aux différents termes de la progression géométrique*

(6) $$\eta^0,\ \eta^1,\ \eta^2,\ldots\ \eta^{n-3},\ \eta^{n-2},\ \eta^{n-1};$$

la valeur générale de y *sera celle que détermine la formule* (14).

Si, dans le second membre de l'équation (14), on développe la fonction $\frac{F(r)-F(\eta)}{r-\eta}$ en un polynome ordonné suivant les puissances ascendantes de η, on en conclura

(15) $$y = P + Q\eta + R\eta^2 + \ldots + U\eta^{n-3} + V\eta^{n-2} + W\eta^{n-1},$$

$P, Q, R, \ldots U, V, W$ désignant des quantités indépendantes de η, et qui renfermeront la seule variable x. Or, la valeur précédente de y devant satisfaire aux conditions énoncées dans le 1.er théorême, quelle que soit la valeur attribuée à la constante arbitraire η, il en résulte évidemment, 1.° que chacune des fonctions

$$P,\quad Q,\quad R,\ldots\ U,\quad V,\quad W,$$

substituée à la place de y dans l'équation (1), vérifiera cette même équation; 2.° que l'on aura, pour la valeur particulière x_0 de la variable x,

(16) $$\left\{\begin{array}{llll} P=1, & Q=0, & R=0,\ \ldots\ldots & W=0; \\ P'=0, & Q'=1, & R'=0,\ \ldots\ldots & W'=0; \\ P''=0, & Q''=0, & R''=1,\ \ldots\ldots & W''=0; \\ \text{etc.}\ \ldots\ldots & & & \\ P^{(n-1)}=0, & Q^{(n-1)}=0, & R^{(n-1)}=0,\ldots & W^{(n-1)}=1; \end{array}\right.$$

Concevons maintenant que les valeurs des fonctions (5), correspondantes à $x=x_0$, doivent se réduire, non plus aux différents termes de la progression (6), mais à des quantités quelconques désignées par

(17) $$\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ \eta_{n-3},\ \eta_{n-2},\ \eta_{n-1}.$$

Pour obtenir la valeur générale de y, il suffira évidemment de recourir à l'équation (15) présentée sous la forme

(18) $$y = P\eta^0 + Q\eta^1 + R\eta^2 + \ldots + U\eta^{n-3} + V\eta^{n-2} + W\eta^{n-1},$$

et de remplacer dans cette équation les exposants placés à la droite de la lettre η par des indices. En d'autres termes, on aura

(19) $$y = P_{n_0} + Q_{n_1} + R_{n_2} + \ldots + U_{n_{n-3}} + V_{n_{n-2}} + W_{n_{n-1}}.$$

Il est clair en effet que cette dernière valeur de y vérifiera l'équation (1) avec les conditions prescrites. Or, le second membre de la formule (19) est précisément ce que devient le second membre de l'équation (14) développé suivant les puissances entières de n, quand on substitue des indices aux exposants de ces puissances. On peut donc énoncer encore le théorême suivant.

2.° Théorême. *Si l'on intègre l'équation* (1) *de manière que la fonction y et ses dérivées d'un ordre inférieur à n, se réduisent, en vertu de la supposition $x = x_0$, à des quantités données $n_0, n_1, \ldots n_{n-1}$, la valeur générale de y sera celle que fournit l'équation* (14), *lorsque, dans la fonction entière de n équivalente au rapport $\frac{F(r) - F(n)}{r - n}$, on remplace les exposants des puissances de n par des indices.*

Exemple. Proposons-nous d'intégrer l'équation différentielle

(20) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0,$$

de manière que l'on ait, pour $x = 0$, $y = 1$ et $y' = 0$. On trouvera, dans ce cas particulier,

$$F(r) = r^2 + a^2, \quad \frac{F(r) - F(n)}{r - n} = \frac{r^2 - n^2}{r - n} = r n^0 + n^1, \quad n_0 = 1, \quad n_1 = 0, \quad x_0 = 0;$$

et l'on tirera de la formule (14), en remplaçant les exposants de n par des indices,

(21) $$y = \mathcal{E}\,(r n_0 + n_1)\,\frac{e^{rx}}{((r^2 + a^2))} = \mathcal{E}\,\frac{r e^{rx}}{((r^2 + a^2))},$$

ou, ce qui revient au même,

(22) $$y = \frac{1}{2}\left(e^{ax\sqrt{-1}} + e^{-ax\sqrt{-1}}\right) = \cos ax.$$

Considérons à présent l'équation différentielle

(23) $$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x).$$

L'intégrale générale de cette équation sera [voyez la page 204 du premier volume]

$$(24)\qquad y = \mathcal{E}\frac{e^{rx}\varphi(r)}{((\mathrm{F}(r)))} + \mathcal{E}\frac{\int_{x_0}^{x} e^{r(x-z)}f(z)\,dz}{((\mathrm{F}(r)))},$$

$\varphi(r)$ désignant toujours une fonction de r, assujettie à conserver une valeur finie pour toutes les valeurs de r qui vérifient la formule (4). En d'autres termes, on aura

$$(25)\qquad y = u + v,$$

u, v étant deux fonctions de x déterminées par les formules

$$(26)\qquad u = \mathcal{E}\frac{e^{rx}\varphi(r)}{((\mathrm{F}(r)))}, \qquad (27)\qquad v = \mathcal{E}\frac{\int_{x_0}^{x} e^{r(x-z)}f(z)\,dz}{((\mathrm{F}(r)))}.$$

Ajoutons que la fonction y, réduite à

$$y = u,$$

vérifiera l'équation (1), si l'on suppose $f(x) = 0$, tandis que la même fonction, réduite à

$$y = v,$$

continuera de vérifier l'équation (8), si l'on prend $\varphi(r) = 0$.

Concevons maintenant que les valeurs des fonctions

$$y,\ y',\ y'',\ldots\ y^{(n-1)},$$

correspondantes à $x = x_0$, doivent coïncider avec les différents termes de la suite

$$\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ldots\ \eta_{n-1}.$$

Comme, en désignant par m un nombre entier inférieur à n, et ayant égard à la formule (10) de la page (203) du premier volume, on tirera des équations (25) et (27)

$$(28)\qquad y^{(m)} = u^{(m)} + v^{(m)},$$

$$(29)\qquad v^{(m)} = \mathcal{E}\, r^m\frac{\int_{x_0}^{x} e^{r(x-z)}f(z)\,dz}{((\mathrm{F}(r)))},$$

et que la valeur de $v^{(m)}$, donnée par la formule (29), s'évanouira toujours pour $x = x_0$; il suffira évidemment d'assujettir les fonctions

$$u, \quad u', \quad u'', \ldots \, u^{(n-1)},$$

dont la première vérifie l'équation (1), à prendre, pour $x = x_0$, des valeurs respectivement égales aux quantités

$$\eta_0, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots \, \eta_{(n-1)}.$$

On aura donc, en vertu du 2.e théorème,

$$u = \mathcal{E} \frac{F(r) - F(\eta)}{r - \eta} \frac{e^{r(x - x_0)}}{((F(r)))}, \tag{30}$$

pourvu que, dans la fonction entière de η équivalente au rapport $\frac{F(r) - F(\eta)}{r - \eta}$, on remplace les exposants de la lettre η par des indices; et l'on tirera de l'équation (25), mais sous la même condition,

$$y = \mathcal{E} \frac{F(r) - F(\eta)}{r - \eta} \frac{e^{r(x - x_0)}}{((F(r)))} + \mathcal{E} \frac{\int_{x_0}^{x} e^{r(x-z)} f(z)\, dz}{((F(r)))}, \tag{31}$$

ou, ce qui revient au même,

$$y = \mathcal{E} \left\{ \frac{F(r) - F(\eta)}{r - \eta} e^{r(x - x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{r(x-z)} f(z)\, dz \right\} \frac{1}{((F(r)))}. \tag{32}$$

Si à l'équation (23) on substituait celle-ci

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x), \tag{33}$$

la valeur de y conserverait la forme que lui assigne l'équation (32). Seulement la fonction $F(r)$ deviendrait

$$F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n. \tag{34}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

3.e Théorème. *Si l'on intègre l'équation* (33) *de manière que la fonction* y, *et ses dérivées d'un ordre inférieur à* n, *se réduisent, en vertu de la supposition* $x = x_0$, *à des quantités données* $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$; *la valeur générale de* y

sera celle que fournit l'équation (32) *jointe à la formule* (34), *lorsque, dans le développement du rapport* $\frac{F(r)-F(\eta)}{r-\eta}$, *suivant les puissances entières de* η, *on transforme en indices les exposants de ces puissances.*

Exemple. Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=f(x)\,, \tag{35}$$

de manière que l'on ait, pour une valeur nulle de x, $y=\eta_0$ et $y'=\eta_1$. On trouvera, dans ce cas particulier,

$$F(r)=r^2+1\,,\qquad \frac{F(r)-F(\eta)}{r-\eta}=r\eta^0+\eta^1\,,\qquad x_0=0\,;$$

et l'on tirera de la formule (32), en remplaçant les exposants de η par des indices,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{E}\left\{(r\eta_0+\eta_1)e^{rx}+\int_0^x e^{r(x-z)}f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((r^2+1))} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{(\eta_1+\eta_0\sqrt{-1})e^{x\sqrt{-1}}+\int_0^x e^{(x-z)\sqrt{-1}}f(z)\,dz\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{(\eta_1-\eta_0\sqrt{-1})e^{-x\sqrt{-1}}+\int_0^x e^{-(x-z)\sqrt{-1}}f(z)\,dz\right\}, \end{aligned} \tag{36}$$

ou, ce qui revient au même,

$$y=\eta_0\cos x+\eta_1\sin x+\int_0^x \sin(x-z).f(z)\,dz\,. \tag{37}$$

2.ᵉ *Exemple.* Proposons-nous encore d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=f(x)\,, \tag{38}$$

de manière que l'on ait, pour une valeur nulle de x, $y=\eta_0$ et $y'=\eta_1$. On trouvera, dans ce cas particulier,

$$F(r)=r^2-2r+1=(r-1)^2,\quad \frac{F(r)-F(\eta)}{r-\eta}=\frac{(r-1)^2-(\eta-1)^2}{r-\eta}=(r-2)\eta^0+\eta^1,\quad x_0=0\,;$$

et l'on tirera de la formule (31)

(39) $$y = \mathcal{E}\left\{[(r-2)n_0 + n_1]e^{rx} + \int_0^x e^{r(x-z)} f(z)\,dz\right\}\frac{1}{(((r-1)^2))},$$

ou, ce qui revient au même,

(40) $$y = [n_0 + (n_1 - n_0)x]e^x + \int_0^x (x-z)e^{x-z} f(z)\,dz.$$

Considérons encore l'équation différentielle

(41) $$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a_1}{Ax+B}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{a_2}{(Ax+B)^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{(Ax+B)^{n-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{a_n}{(Ax+B)^n}y = 0,$$

dans laquelle A, B, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n désignent des quantités constantes. Si l'on fait, pour abréger,

(42) $$F(r) = A^n r(r-1)\dots(r-n+1) + a_1 A^{n-1} r(r-1)\dots(r-n+2) + \dots + a_{n-1}Ar + a_n,$$

l'intégrale générale de l'équation (41) sera [voyez la page 261 du premier volume]

(43) $$y = \mathcal{E}\frac{\varphi(r).(Ax+B)^r}{((F(r)))},$$

$\varphi(r)$ désignant une onction arbitraire de r, qui ne devienne pas infinie pour des valeurs de r propres à vérifier la formule

(44) $$F(r) = 0.$$

Cela posé, concevons d'abord que les valeurs des fonctions (5), correspondantes à $x = x_0$, doivent se réduire aux différents termes de la suite

(45) $$x^0 = 1, \quad \frac{An}{Ax_0+B}, \quad \frac{A^2 n(n-1)}{(Ax_0+B)^2}, \dots \frac{A^{n-1}n(n-1)\dots(n-n+2)}{(Ax_0+B)^{n-1}},$$

Comme, en représentant par m un nombre entier inférieur à n, on tirera de la formule (43)

(46) $$y^{(m)} = A^m \mathcal{E}\frac{r(r-1)\dots(r-m+1).\varphi(r).(Ax+B)^{r-m}}{((F(r)))},$$

il suffira évidemment d'assigner à la fonction $\varphi(r)$ une valeur telle que l'on ait, pour $m < n$,

$$(47)\quad \mathcal{E}\frac{r(r-1)..(r-m+1)\varphi(r)(Ax_0+B)^r}{((F(r)))} = n(n-1)..(n-m+1) = \mathcal{E}\frac{r(r-1)..(r-m+1)}{((r-n))},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(48)\quad \mathcal{E}\frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)[(r-n)(Ax_0+B)^r\varphi(r)-F(r)]}{(((r-n)F(r)))} = 0.$$

Or, en vertu de la formule (64) de la page 23 du premier volume, la condition (48) sera vérifiée, si l'on prend

$$(49)\quad (r-n)(Ax_0+B)^r\varphi(r) - F(r) = C,$$

ou

$$(50)\quad \varphi(r) = \frac{F(r)+C}{r-n}(Ax_0+B)^{-r},$$

C désignant une quantité constante que l'on devra réduire à $-F(n)$, si l'on veut que $\varphi(r)$ conserve une valeur finie pour $r = n$. On pourra donc supposer

$$(51)\quad \varphi(r) = \frac{F(r)-F(n)}{r-n}(Ax_0+B)^r$$

En substituant cette dernière valeur de $\varphi(r)$ dans la formule (45), l'on trouvera

$$(52)\quad y = \mathcal{E}\frac{F(r)-F(n)}{r-n}\left(\frac{Ax+B}{Ax_0+B}\right)^r\frac{1}{((F(r)))}.$$

Par conséquent on peut énoncer la proposition suivante.

4.° Théorème. *Si l'on intègre l'équation* (41) *de manière que la fonction* y *et ses dérivées d'un ordre inférieur à* n *se réduisent, pour* $x = x_0$, *aux différents termes de la suite* (45), *la valeur de* y *sera celle que détermine la formule* (52).

Concevons maintenant que la fonction y, et ses dérivées d'un ordre inférieur à n, doivent se réduire, pour $x = x_0$, non plus aux différents termes de la suite (45), mais à des quantités quelconques désignées par

$$(17)\quad n_0,\ n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_{n-1}.$$

Alors, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage pour établir

le théorême 2, on prouvera sans peine que la valeur de y coïncide encore avec celle que fournit l'équation (52), quand, après avoir développé la fraction

$$\frac{F(r)-F(\eta)}{r-\eta}, \tag{53}$$

en une série de termes proportionnels aux différents produits

$$\eta^0=1, \quad \eta, \quad \eta(\eta-1), \ \ldots \ \eta(\eta-1)\ldots(\eta-n+2), \tag{54}$$

on remplace respectivement ces mêmes produits par les quantités

$$\eta_0, \quad \eta_1\left(x_0+\frac{B}{A}\right), \quad \eta_2\left(x_0+\frac{B}{A}\right)^2, \ldots \quad \eta_{n-1}\left(x_0+\frac{B}{A}\right)^{n-1}. \tag{55}$$

Ajoutons que, pour effectuer le développement en question, il suffira d'avoir égard aux observations suivantes.

Si l'on désigne par $f(x)$ une fonction entière de le variable x, du degré m, et par n un nombre entier quelconque, on aura généralement, en supposant $\Delta x=1$,

$$f(x+n)=f(x)+\frac{n}{1}\Delta f(x)+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f(x)+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}\Delta^m f(x), \tag{56}$$

puis on en conclura, en réduisant x à zéro,

(57) $f(n)=$

$$f(0)+\frac{f(1)-f(0)}{1}n+\frac{f(2)-2f(1)+f(0)}{1.2}n(n-1)+..+\frac{f(m)-mf(m-1)+..\pm f(0)}{1.2.3\ldots m}n(n-1)..(n-m+1).$$

Or, les deux membres de la formule (57), étant des fonctions entières de n, qui demeurent égales toutes les fois qu'on prend pour n un nombre entier, ne cesseront pas d'être égaux, si l'on y remplace n par x [voyez le chap. IV de l'Analyse algébrique]. On aura donc, quel que soit x,

(58) $f(x)=$

$$f(0)+\frac{f(1)-f(0)}{1}x+\frac{f(2)-2f(1)+f(0)}{1.2}x(x-1)+\ldots+\frac{f(m)-mf(m-1)+..\pm f(0)}{1.2.3\ldots m}x(x-1)..(x-m+1).$$

Si, dans la formule (58), on substitue la lettre η à la lettre x, le rapport $\frac{F(r)-F(\eta)}{r-\eta}$ à la fonction $f(x)$, et le nombre $n-1$ au nombre m, on obtiendra immédiatement le développement demandé.

Considérons enfin l'équation différentielle

$$(59)\quad \frac{d^ny}{dx^n}+\frac{a_1}{Ax+B}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{a_2}{(Ax+B)^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{(Ax+B)^{n-1}}\frac{dy}{dx}+\frac{a_n}{(Ax+B)^n}y=f(x).$$

L'intégrale générale de cette équation sera [voyez la page 263 du premier volume]

$$(60)\qquad y=\mathcal{E}\frac{\varphi(r).(Ax+B)^r}{((\mathrm{F}(r)))}+A\,\mathcal{E}\frac{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{Ax+B}{Az+B}\right)^r(Az+B)^{n-1}f(z)\,dz}{((\mathrm{F}(r)))},$$

les fonctions $\varphi(r)$, $\mathrm{F}(r)$ ayant les mêmes valeurs que dans la formule (43); et, si l'on a recours aux raisonnements à l'aide desquels nous avons établi le théorème 3, on obtiendra immédiatement la proposition suivante.

5.° Théorème. *Si l'on intègre l'équation* (59) *de manière que la fonction* y *et ses dérivées d'un ordre inférieur à* n, *se réduisent, pour* $x=x_0$, *à des quantités données*

$$\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ldots\ \eta_{n-1},$$

la valeur générale de y *sera celle que fournit l'équation*

$$(61)\ y=\mathcal{E}\left\{\frac{\mathrm{F}(r)-\mathrm{F}(\eta)}{r-\eta}\left(\frac{Ax+B}{Ax_0+B}\right)^r+A\int_{x_0}^{x}\left(\frac{Ax+B}{Az+B}\right)^r(Az+B)^{n-1}f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((\mathrm{F}(r)))},$$

quand, après avoir développé la fraction (53) *en une série de termes proportionnels aux produits* (54), *on remplace ces mêmes produits par les quantités* (55).

Si à l'équation (1) on substituait celle-ci

$$(62)\ a_0\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{a_1}{Ax+B}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{a_2}{(Ax+B)^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{(Ax+B)^{n-1}}\frac{dy}{dx}+\frac{a_n}{(Ax+B)^n}y=f(x),$$

la valeur de y conserverait la forme que lui assigne l'équation (61). Seulement la valeur de $\mathrm{F}(r)$ deviendrait

$$(63)\ \mathrm{F}(r)=a_0A^nr(r-1)..(r-n+1)+a_1A^{n-1}r(r-1)..(r-n+2)+..+a_{n-1}Ar+a_n,$$

et par conséquent on se trouverait conduit au théorème que nous allons énoncer.

6.° Théorème. *Si l'on intègre l'équation* (62) *de manière que la fonction* y *et ses dérivées d'un ordre inférieur à* n *se réduisent, pour* $x=x_0$, *à des quantités données*

$$\eta_0\,,\quad \eta_1\,,\quad \eta_2\,,\ldots\,\eta_{n-1}\,,$$

la valeur générale de y *sera celle que fournit l'équation* (61) *jointe à la formule* (63), *pourvu qu'après avoir développé la fraction* (53) *en une série de termes proportionnels aux produits* (54), *on remplace ces mêmes produits par les quantités* (55).

1.er *Exemple.* Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=1\,, \tag{64}$$

de manière que l'on ait $y=\eta_0$ et $y'=\eta_1$ pour $x=1$. On trouvera, dans ce cas particulier,

$$\mathrm{F}(r)=r^2-1\,,\quad \frac{\mathrm{F}(r)-\mathrm{F}(\eta)}{r-\eta}=r\eta^0+\eta^1,\quad x_0=1\,,\quad A=1\,,\quad B=0,$$

et l'on tirera de la formule (61), en remplaçant les exposants de η par des indices,

$$y=\mathcal{E}\left\{(r\eta_0+\eta_1)x^r+\int_1^x\left(\frac{x}{z}\right)^r z\,dz\right\}\frac{1}{((r^2-1))}\,, \tag{65}$$

ou, ce qui revient au même,

$$y=\frac{1}{2}\eta_0\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\eta_1\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{(x-1)^2(2x+1)}{6x}. \tag{66}$$

2.e *Exemple.* Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}=f(x)\,, \tag{67}$$

de manière que l'on ait $y=\eta_0$ et $y'=\eta_1$ pour $x=1$. On trouvera, dans ce cas, $\mathrm{F}(r)=r^2+1$,

$$y=\mathcal{E}\left\{(r\eta_0+\eta_1)x^r+\int_1^x\left(\frac{x}{z}\right)^r z\,f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((r^2+1))}\,, \tag{68}$$

et par conséquent

$$y=\eta_0\cos\mathrm{l}(x)+\eta_1\sin\mathrm{l}(x)+\int_1^x z\,f(z).\cos\mathrm{l}\left(\frac{x}{z}\right).\,dz. \tag{69}$$



SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POLYÈDRES.

Rapportons tous les points de l'espace à trois axes rectangulaires des x, y, z; et désignons par $s, s', s'', \ldots$ les faces d'un polyèdre quelconque. Soient d'ailleurs α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; etc.... les angles que des perpendiculaires élevées sur les plans de ces faces, et prolongées en dehors du polyèdre, forment avec les demi-axes des coordonnées positives. Le produit $s\cos\alpha$ représentera évidemment la projection de la face s sur le plan des y, z perpendiculaire à l'axe des x, cette projection étant prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que la face s sera située par rapport au polyèdre, du côté des x positives, ou du côté des x négatives. De même le produit $r\cos\beta$, ou $r\cos\gamma$ représentera la projection de la face s sur le plan des z, x ou des x, y, prise avec le signe $+$, si la face s se trouve située, par rapport au polyèdre, du côté des y ou des z positives, et avec le signe $-$ dans le cas contraire. Cela posé, si l'on nomme *projections algébriques* de la face s sur les plans coordonnés les trois produits $s\cos\alpha$, $s\cos\beta$, $s\cos\gamma$, on établira sans peine les propositions suivantes.

1.er Théorème. *La somme des projections algébriques des faces d'un polyèdre quelconque sur chacun des plans coordonnés se réduit à zéro.*

Ce théorème, qui était déjà connu, se trouve renfermé dans les trois équations

$$(1)\qquad \begin{cases} s\cos\alpha + s'\cos\alpha' + s''\cos\alpha'' + \ldots = 0, \\ s\cos\beta + s'\cos\beta' + s''\cos\beta'' + \ldots = 0, \\ s\cos\gamma + s'\cos\gamma' + s''\cos\gamma'' + \ldots = 0. \end{cases}$$

Pour démontrer ces équations, quand le polyèdre est supposé convexe, il suffit d'observer que la projection de ce polyèdre sur le plan des y, z, par exemple, est tout à la fois équivalente à la somme des termes positifs du polynome

$$(2)\qquad s\cos\alpha + s'\cos\alpha' + s''\cos\alpha'' + \ldots,$$

et à la somme des termes négatifs pris en signe contraire. Donc ce polynome aura toujours, dans l'hypothèse dont il s'agit, une valeur nulle. On doit en dire autant des deux polynomes

(3) $$s\cos\beta + s'\cos\beta' + s''\cos\beta'' + \ldots,$$

(4) $$s\cos\gamma + s'\cos\gamma' + s''\cos\gamma'' + \ldots.$$

Le théorême 1.er étant ainsi démontré, dans le cas où le polyèdre est convexe, il est facile de reconnaître qu'il s'étend au cas même où cette condition ne serait pas remplie.

2.e Théorême. *Supposons qu'après avoir projeté les différentes faces d'un polyèdre sur les plans coordonnés, on multiplie la projection algébrique de chaque face sur l'un de ces plans par l'une des coordonnées du centre de gravité de la face que l'on considère, puis, que l'on ajoute au produit ainsi formé tous les produits de même espèce. La somme qui en résultera sera équivalente au volume du polyèdre, si l'on a employé dans chaque multiplication la coordonnée perpendiculaire au plan sur lequel les différentes faces étaient projetées. Cette somme sera nulle dans le cas contraire.*

Si l'on nomme v le volume du polyèdre, et $\xi, \eta, \zeta;\ \xi', \eta', \zeta';\ \xi'', \eta'', \zeta'';$ etc.... les coordonnées des centres de gravité des différentes faces, le théorême 2 sera renfermé dans les neuf équations

(5) $$\left\{\begin{array}{lll} s\xi\cos\alpha+s'\xi'\cos\alpha'+\ldots=v, & s\eta\cos\alpha+s'\eta'\cos\alpha'+\ldots=0, & s\zeta\cos\alpha+s'\zeta'\cos\alpha'+\ldots=0, \\ s\xi\cos\beta+s'\xi'\cos\beta'+\ldots=0, & s\eta\cos\beta+s'\eta'\cos\beta'+\ldots=v, & s\zeta\cos\beta+s'\zeta'\cos\beta'+\ldots=0, \\ s\xi\cos\gamma+s'\xi'\cos\gamma'+\ldots=0, & s\eta\cos\gamma+s'\eta'\cos\gamma'+\ldots=0, & s\zeta\cos\gamma+s'\zeta'\cos\gamma'+\ldots=v. \end{array}\right.$$

Pour démontrer la première des équations (5), projetons les différentes faces du polyèdre sur un plan perpendiculaire à l'axe des x, et qui soit situé tout entier, par rapport au polyèdre, du côté des x négatives. Soit $x=a$ l'équation de ce dernier plan. La projection de la surface s sur le plan $x=a$ sera représentée, au signe près, par le produit $s\cos\alpha$, tandis que le volume compris entre cette surface et sa projection sera équivalent au produit

(6) $$s(\xi - a)\cos\alpha$$

pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que la surface s sera située, par rapport au polyèdre, du côté des x positives, ou du côté des x négatives. Cela posé, pour obtenir le volume v, il suffira évidemment, si le polyèdre est convexe, de former les produits semblables à l'expression (6), puis d'ajouter, parmi ces produits, 1.° ceux qui seront positifs, 2.° ceux qui seront négatifs, et de retrancher de la première somme la valeur numérique de la seconde, ce qui revient à réunir les deux sommes en laissant chaque produit affecté du signe qu'il présente. On aura donc

(7) $$s(\xi - a)\cos\alpha + s'(\xi' - a)\cos\alpha' + s''(\xi'' - a)\cos\alpha'' + \ldots = v;$$

puis, on en conclura, en ayant égard à la première des formules (1),

(8) $$s\xi + s'\xi' + s''\xi'' + \ldots = v.$$

On établira de la même manière, si le polyèdre est convexe, les deux équations

(9) $$s\eta + s'\eta' + s''\eta'' + \ldots = v,$$

(10) $$s\zeta + s'\zeta' + s''\zeta'' + \ldots = v;$$

et l'on reconnaîtra ensuite que les équations (8), (9), (10) peuvent être facilement étendues au cas où il s'agit d'un polyèdre quelconque.

Pour démontrer l'équation

(11) $$s\xi\cos\beta + s'\xi'\cos\beta' + s''\xi''\cos\beta'' + \ldots = 0,$$

il suffit d'observer que le polyèdre, s'il est convexe, donnera pour projection sur le plan des x, z une surface telle qu'en multipliant l'abscisse du centre de gravité de cette surface par la somme des termes positifs ou par la somme des termes négatifs du polynome (3), on reproduira la somme des termes correspondants à des cosinus positifs, ou la somme des termes correspondants à des cosinus négatifs dans le polynome

(12) $$s\xi\cos\beta + s'\xi'\cos\beta' + s''\xi''\cos\beta'' + \ldots..$$

Il est aisé d'en conclure que les deux dernières sommes seront égales, au signe près, comme les deux premières. Donc, en réunissant les deux dernières sommes avec les signes qui leur conviennent, on obtiendra zéro pour résultat, ensorte que la formule (11) se trouvera vérifiée. Le même raisonnement s'applique en général à celles des formules (5) dont le second membre est nul, et peut être facilement étendu au cas même où le polyèdre proposé, cessant d'être convexe, présenterait des angles rentrants en nombre quelconque.

Aux propriétés des polyèdres, énoncées dans les théorèmes 1 et 2, correspondent des propriétés analogues que présentent les polygones renfermés dans des plans, et que nous allons indiquer en peu de mots.

Considérons un polygone quelconque renfermé dans le plan des x, y, et dont les côtés soient désignés par r, r', r''.... Nommons α, β; α', β'; α'', β''... les angles

que forment, avec les demi-axes des coordonnées positives, des perpendiculaires élevées sur ces côtés, et prolongées en dehors du polygone. Soit enfin s la surface du polygone, et $\xi, \eta;\ \xi', \eta';\ \xi'', \eta'', \ldots$ les coordonnées des milieux des côtés $r, r', r'', \ldots$ On aura

$$(13) \qquad r\cos\alpha + r'\cos\alpha' + \text{etc.} = 0, \qquad r\cos\beta + r'\cos\beta' + \text{etc.} = 0,$$

et de plus

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} r\xi\cos\alpha + r'\xi'\cos\alpha' + \ldots = s, & r\eta\cos\alpha + r'\eta'\cos\alpha' + \ldots = 0, \\ r\xi\cos\beta + r'\xi'\cos\beta' + \ldots = 0, & r\eta\cos\beta + r'\eta'\cos\beta' + \ldots = s. \end{array} \right.$$

Si, pour plus de commodité, on nomme *projections algébriques* des côtés du polygone sur les axes des y et x les produits

$$r\cos\alpha, \qquad r'\cos\alpha', \qquad r''\cos\alpha'', \ldots$$

et

$$r\cos\beta, \qquad r'\cos\beta', \qquad r''\cos\beta'', \ldots$$

les équations (13) et (14) fourniront les théorêmes suivants dont le premier était déjà connu.

3.e Théorême. *Si l'on projette sur l'axe des x ou sur l'axe des y les divers côtés d'un polygone tracé dans le plan des x, y, la somme de leurs projections algébriques sera équivalente à zéro.*

4.e Théorême. *Supposons qu'après avoir projeté sur l'axe des x ou sur l'axe des y les divers côtés d'un polygone renfermé dans le plan des x, y, on multiplie la projection algébrique de l'un de ces côtés par l'abscisse ou l'ordonnée du point qui le divise en deux parties égales, puis qu'on ajoute au produit ainsi formé tous les produits de même espèce. La somme qui en résultera sera équivalente à la surface du polygone, si l'on a employé dans chaque multiplication la coordonnée perpendiculaire à l'axe sur lequel on projetait les différents côtés. Elle sera nulle dans le cas contraire.*



DE LA PRESSION OU TENSION

DANS UN CORPS SOLIDE.

Les géomètres qui ont recherché les équations d'équilibre ou de mouvement des lames ou des surfaces élastiques ou non élastiques, ont distingué deux espèces de forces produites les unes par la dilatation ou la contraction, les autres par la flexion de ces mêmes surfaces. De plus, ils ont généralement supposé, dans leurs calculs, que les forces de la première espèce, nommées tensions, restent perpendiculaires aux lignes contre lesquelles elles s'exercent. Il m'a semblé que ces deux espèces de forces pouvaient être réduites à une seule, qui doit constamment s'appeler *tension* ou *pression*, qui agit sur chaque élément d'une section faite à volonté, non-seulement dans une surface flexible, mais encore dans un solide élastique ou non élastique, et qui est de la même nature que la pression hydrostatique exercée par un fluide en repos contre la surface extérieure d'un corps. Seulement la nouvelle pression ne demeure pas toujours perpendiculaire aux faces qui lui sont soumises, ni la même dans tous les sens en un point donné. En développant cette idée, je suis parvenu à reconnaître que la pression ou tension exercée contre un plan quelconque en un point donné d'un corps solide se déduit très-aisément, tant en grandeur qu'en direction, des pressions ou tensions exercées contre trois plans rectangulaires menés par le même point. Cette proposition, que j'ai déjà indiquée dans le Bulletin de la Société philomatique de janvier 1823, peut être établie à l'aide des considérations suivantes.

Si, dans un corps solide élastique ou non élastique, on vient à rendre rigide et invariable un petit élément de volume terminé par des faces quelconques, ce petit élément éprouvera sur ses différentes faces, et en chaque point de chacune d'elles une pression ou tension déterminée. Cette pression ou tension sera semblable à la pression qu'un fluide exerce contre un élément de l'enveloppe d'un corps solide, avec cette seule différence que la pression exercée par un fluide en repos contre la surface d'un corps solide, est dirigée perpendiculairement à cette surface de dehors en dedans, et indépendante en chaque point de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans coordonnés, tandis que la pression ou tension exercée en un point donné d'un corps solide contre un très-petit élément de surface passant par ce point, peut être dirigée perpendiculairement ou obliquement à cette surface, tantôt de dehors en dedans, s'il y a condensation, tantôt de dedans en dehors, s'il y a dilatation, et peut dépendre de l'incli-

naison de la surface par rapport aux plans dont il s'agit. Cela posé, soit v le volume d'une portion du corps devenue rigide, $s, s', s'', \ldots$ les aires des surfaces planes ou courbes qui recouvrent le volume v; x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point pris au hasard dans la surface s; p la pression ou tension exercée en ce point contre la surface; α, β, γ les angles que la perpendiculaire à la surface forme avec les demi-axes des coordonnées positives; enfin λ, μ, ν les angles formés avec les mêmes demi-axes par la direction de la force p. Si l'on projette sur les axes des x, y et z les pressions ou tensions diverses auxquelles la surface sera soumise, les sommes de leurs projections algébriques sur ces trois axes seront représentées par les intégrales

$$(1) \qquad \iint p\cos\lambda.\cos\gamma\, dy\, dx, \qquad \iint p\cos\mu.\cos\gamma\, dy\, dx, \qquad \iint p\cos\nu.\cos\gamma\, dy\, dx,$$

tandis que les sommes des projections algébriques de leurs moments linéaires seront respectivement, si l'on prend pour centre des moments l'origine des coordonnées,

$$(2) \quad \iint p(y\cos\nu - z\cos\mu)\cos\gamma\, dy\, dx, \iint p(z\cos\lambda - x\cos\nu)\cos\gamma\, dy\, dx, \iint p(x\cos\mu - y\cos\lambda)\cos\gamma\, dy\, dx;$$

ou, si l'on transporte le centre des moments au point qui a pour coordonnées x_0, y_0, z_0,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iint p[(y-y_0)\cos\nu - (z-z_0)\cos\mu]\cos\gamma\, dy\, dx, \\ \iint p[(z-z_0)\cos\lambda - (x-x_0)\cos\nu]\cos\gamma\, dy\, dx, \\ \iint p[(x-x_0)\cos\mu - (y-y_0)\cos\lambda]\cos\gamma\, dy\, dx. \end{array} \right.$$

Dans ces diverses intégrales, les limites des intégrations relatives aux variables x, y devront être déterminées d'après la forme du contour de la surface s, de manière qu'on ait entre ces limites

$$(4) \qquad \iint \cos\gamma\, dy\, dx = s.$$

Si la surface s devient plane, et le volume v très-petit, en sorte que chacune de ses dimensions soit considérée comme une quantité infiniment petite du premier ordre, alors les variations, que les trois produits

$$(5) \qquad p\cos\lambda, \qquad p\cos\mu, \qquad p\cos\nu,$$

éprouveront, dans le passage d'un point à un autre de la surface s, seront encore in-

finiment petites du premier ordre; et, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre dans les valeurs des intégrales (1), on réduira ces intégrales aux quantités

$$(6)\qquad ps\cos\lambda,\qquad ps\cos\mu,\qquad ps\cos\nu.$$

Si d'ailleurs on fait coïncider le centre des moments avec un point du volume v, les intégrales (3) seront des quantités infiniment petites du troisième ordre, et il suffira de négliger, dans ces intégrales, les infiniment petits du quatrième ordre, pour qu'elles se réduisent aux produits

$$(7)\quad ps[(\eta-y_0)\cos\nu-(\zeta-z_0)\cos\mu],\ ps[(\zeta-z_0)\cos\lambda-(\xi-x_0)\cos\nu],\ ps[(\xi-x_0)\cos\mu-(\eta-y_0)\cos\lambda],$$

ξ, η, ζ désignant les rapports

$$(8)\qquad \frac{\iint x\cos\gamma\,dy\,dx}{s},\qquad \frac{\iint y\cos\gamma\,dy\,dx}{s},\qquad \frac{\iint z\cos\gamma\,dy\,dx}{s},$$

c'est-à-dire les coordonnées du centre de gravité de la surface s.

Soit maintenant m la masse infiniment petite comprise sous le volume v. Concevons en outre que la lettre φ représente la force accélératrice appliquée à cette masse, si le corps solide est en équilibre, et dans le cas contraire, l'excès de la force accélératrice appliquée sur celle qui serait capable de produire le mouvement observé de la masse m. Enfin nommons X, Y, Z les projections algébriques de la force φ, et ξ_0, η_0, ζ_0 les coordonnées du centre de gravité de la masse m. Si l'on suppose que la force accélératrice φ reste la même en grandeur et en direction dans tous les points de la masse m, il devra y avoir équilibre entre la force motrice $m\varphi$ appliquée au point (ξ_0, η_0, ζ_0), et les forces auxquelles se réduisent les pressions ou tensions exercées sur les surfaces $s, s', \ldots$ Donc les sommes des projections algébriques de toutes ces forces et de leurs moments linéaires sur les axes des x, y, z devront se réduire à zéro. Donc, si l'on se contente de placer un ou plusieurs accents à la suite des lettres $p, \lambda, \mu, \nu, \xi, \eta, \zeta$, comprises dans les expressions (6) et (7), pour indiquer les nouvelles valeurs que prennent ces expressions, quand on passe de la surface s à la surface s', ou s'', ou s''', etc...., on trouvera, en négligeant, dans les sommes des forces projetées, les infiniment petits du troisième ordre, et dans les sommes des moments linéaires projetés, les infiniment petits du quatrième ordre,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &ps\cos\lambda+p's'\cos\lambda'+\ldots\ldots+mX=0,\\ &ps\cos\mu+p's'\cos\mu'+\ldots\ldots+mY=0,\\ &ps\cos\nu+p's'\cos\nu'+\ldots\ldots+mZ=0;\end{aligned}\right.$$

$$(10)\left\{\begin{array}{l} ps[(\eta-y_0)\cos\nu-(\zeta-z_0)\cos\mu]+p's'[(\eta'-y_0)\cos\nu'-(\zeta'-z_0)\cos\mu']+..+m[(\eta_0-y_0)Z-(\zeta_0-z_0)X]=0,\\ ps[(\zeta-z_0)\cos\lambda-(\xi-x_0)\cos\nu]+p's'[(\zeta'-z_0)\cos\lambda'-(\xi'-x_0)\cos\nu']+..+m[(\zeta_0-z_0)X-(\xi_0-x_0)Z]=0,\\ ps[(\xi-x_0)\cos\mu-(\eta-y_0)\cos\lambda]+p's'[(\xi'-x_0)\cos\mu'-(\eta'-y_0)\cos\lambda']+..+m[(\xi_0-x_0)Y-(\eta_0-y_0)X]=0. \end{array}\right.$$

Or, la masse m étant elle-même infiniment petite du troisième ordre, les termes qui la renferment seront du troisième ordre dans les formules (9), du quatrième ordre dans les formules (10). On pourra donc négliger ces termes, et remplacer les formules dont il s'agit par les suivantes

$$(11)\left\{\begin{array}{l} ps\cos\lambda+p's'\cos\lambda'+p''s''\cos\lambda''+p'''s'''\cos\lambda'''+\ldots\ldots=0,\\ ps\cos\mu+p's'\cos\mu'+p''s''\cos\mu''+p'''s'''\cos\mu'''+\ldots\ldots=0,\\ ps\cos\nu+p's'\cos\nu'+p''s''\cos\nu''+p'''s'''\cos\nu'''+\ldots\ldots=0; \end{array}\right.$$

$$(12)\left\{\begin{array}{l} ps[(\eta-y_0)\cos\nu-(\zeta-z_0)\cos\mu]+p's'[(\eta'-y_0)\cos\nu'-(\zeta-z_0)\cos\mu']+\ldots\ldots=0,\\ ps[(\zeta-z_0)\cos\lambda-(\xi-x_0)\cos\nu]+p's'[(\zeta'-z_0)\cos\lambda'-(\xi'-x_0)\cos\nu']+\ldots\ldots=0,\\ ps[(\xi-x_0)\cos\mu-(\eta-y_0)\cos\lambda]+p's'[(\xi'-x_0)\cos\mu'-(\eta'-y_0)\cos\lambda']+\ldots\ldots=0. \end{array}\right.$$

Si l'on voulait tenir compte des variations que peuvent éprouver la force accélératrice φ et ses projections algébriques X, Y, Z, quand on passe d'un point à un autre de la masse m, il faudrait remplacer, dans les équations (9) et (10), les six quantités

$$mX, \quad mY, \quad mZ;$$

$$m[(\eta_0-y_0)Z-(\zeta_0-z_0)Y], \quad m[(\zeta_0-z_0)X-(\xi_0-x_0)Z], \quad m[(\xi_0-x_0)Y-(\eta_0-y_0)X]$$

par six intégrales de la forme

$$\iiint\rho X\,dz\,dy\,dx, \quad \iiint\rho Y\,dz\,dy\,dx, \quad \iiint\rho Z\,dz\,dy\,dx;$$

$$\left\{\begin{array}{l} \iiint\rho[(y-y_0)Z-(z-z_0)Y]\,dz\,dy\,dx, \quad \iiint\rho[(z-z_0)X-(x-x_0)Z]\,dz\,dy\,dx,\\ \iiint\rho[(x-x_0)Y-(y-y_0)X]\,dz\,dy\,dx; \end{array}\right.$$

ρ désignant la densité du corps solide au point (x, y, z), et les limites des intégrations étant relatives aux limites du volume v. Mais, comme les trois premières inté-

grales seraient des infiniment petits du troisième ordre, et les trois dernières des infiniment petits du quatrième ordre, on se trouverait encore ramené aux formules (11) et (12). Il reste à faire voir comment, à l'aide de ces formules, on peut découvrir les relations qui existent entre les pressions ou tensions exercées en un point donné d'un corps solide contre divers plans menés successivement par le même point.

Concevons d'abord que le volume v prenne la forme d'un prisme droit, dont les deux bases soient représentées par s et par s'. On aura $s'=s$; et, si, les dimensions de chaque base étant considérées comme infiniment petites du premier ordre, la hauteur du prisme devient une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, alors, en négligeant, dans les formules (11), les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, l'on trouvera

$$(p\cos\lambda+p'\cos\lambda')s=0, \quad (p\cos\mu+p'\cos\mu')s=0, \quad (p\cos\nu+p'\cos\nu')s=0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$p'\cos\lambda'=-p\cos\lambda, \quad p'\cos\mu'=-p\cos\mu, \quad p'\cos\nu'=-p\cos\nu;$$

et l'on en conclura

$$p'=p$$

$$\cos\lambda'=-\cos\lambda, \quad \cos\mu'=-\cos\mu, \quad \cos\nu'=-\cos\nu.$$

Ces dernières équations ont rigoureusement lieu dans le cas où la hauteur du prisme s'évanouit, et comprennent un théorême dont voici l'énoncé.

1.er Théorême. *Les pressions ou tensions exercées, en un point donné d'un corps solide contre les deux faces d'un plan quelconque mené par ce point, sont des forces égales et directement opposées;* ce qu'il était facile de prévoir.

Soient maintenant

$$(13) \qquad p, \quad p', \quad p''$$

les pressions ou tensions exercées au point (x, y, z) et du côté des coordonnées positives contre trois plans menés par ce point parallèlement aux plans coordonnés des y, z, des z, x et des x, y. Soient de plus λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν''; $\lambda''', \mu''', \nu'''$ les angles formés par les directions des forces p', p'', p'' avec les demi-axes des coordonnées positives. Enfin concevons que le volume v, prenant la forme d'un parallélipipède rectangle, soit renfermé entre les trois plans menés par le point (x, y, z), et trois plans parallèles menés par un point très-voisin $(x+\Delta x,\ y+\Delta y),\ z+\Delta z)$. Les

ons ou tensions, supportées par les faces du parallélipipède qui aboutiront à ce der-
oint, seront à très-peu près

$$p'\Delta y\Delta z, \qquad p''\Delta z\Delta x, \qquad p'''\Delta x\Delta y,$$

que leurs projections algébriques sur les axes des x, y et z se réduiront sen-
ient aux quantités

$$\left\{\begin{array}{lll} p'\cos\lambda'.\Delta y\Delta z, & p''\cos\lambda''.\Delta z\Delta x, & p'''\cos\lambda'''.\Delta x\Delta y, \\ p'\cos\mu'.\Delta y\Delta z, & p''\cos\mu''.\Delta z\Delta x, & p'''\cos\mu'''.\Delta x\Delta y, \\ p'\cos\nu'.\Delta y\Delta z, & p''\cos\nu''.\Delta z\Delta x, & p'''\cos\nu'''.\Delta x\Delta y, \end{array}\right.$$

t aux pressions ou tensions supportées par les faces qui aboutissent au point (x, y, z),
seront, en vertu du 1.er théorême, respectivement égales, mais directement op-
s à celles qui agissent sur les faces parallèles aboutissant au point $(x + \Delta x,$
$y, z + \Delta z)$. Donc les projections algébriques de ces nouvelles tensions seront
riquement égales aux projections algébriques des trois autres, mais affectées de
contraires, ensorte que chacune des formules (11) deviendra identique. Ajoutons
s centres de gravité des six faces du parallélipipède se confondront avec leurs centres
ure, et seront situés sur trois droites menées parallèlement aux axes des x, y, z
centre du parallélipipède, c'est-à-dire, par le point qui a pour coordonnées

$$x + \frac{1}{2}\Delta x, \qquad y + \frac{1}{2}\Delta y, \qquad z + \frac{1}{2}\Delta z.$$

posé, il est clair que, si l'on prend ce dernier point pour centre des moments, la
ère des formules (12) donnera

$$\text{…}\mathrm{os}\,\nu''\Delta z\Delta x\,\frac{\Delta y}{2} - p'''\cos\mu'''\Delta x\Delta y\,\frac{\Delta z}{2} - (-p''\cos\nu'')\,\Delta z\Delta x\,\frac{\Delta y}{2} + (-p'''\cos\mu''')\,\Delta x\Delta y\,\frac{\Delta z}{2}$$
$$= 0,$$

conséquent

$$\left\{\begin{array}{l} p''\cos\nu'' = p'''\cos\mu''', \\ p'''\cos\lambda''' = p'\cos\nu', \\ p'\cos\mu' = p''\cos\lambda''. \end{array}\right.$$

On trouvera de même

ne les axes des x, y, z sont entièrement arbitraires, les équations (16) com-
ent évidemment le théorême que nous allons énoncer.

2.° Théorème. *Si par un point quelconque d'un corps solide on mène deux axes qui se coupent à angles droits, et si l'on projette sur l'un de ces axes la pression ou tension supportée par un plan perpendiculaire à l'autre au point dont il s'agit, la projection ainsi obtenue ne variera pas quand on échangera entre eux ces mêmes axes.*

Concevons à présent que le volume v prenne la forme d'un tétraèdre dont trois arêtes coïncident avec trois longueurs infiniment petites portées à partir du point (x, y, z) sur des droites parallèles aux axes coordonnés. Considérons le point (x, y, z) comme étant le sommet de ce tétraèdre; désignons sa base par s, et soient α, β, γ les angles que forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, une perpendiculaire élevée par un point de cette base, mais prolongée en dehors du tétraèdre. Les trois faces qui aboutissent au sommet du tétraèdre seront mesurées par les valeurs numériques des produits

$$(17)\qquad s\cos\alpha,\qquad s\cos\beta,\qquad s\cos\gamma.$$

Cela posé, si l'on nomme p la pression ou tension supportée par la base du tétraèdre, et si l'on continue d'attribuer aux quantités p', p'', p''' les valeurs qu'elles ont reçues dans les équations (16), la première des formules (11) donnera évidemment

$$ps\cos\lambda - p'\cos\lambda'.s\cos\alpha - p''\cos\lambda''.s\cos\beta - p'''\cos\lambda'''.s\cos\gamma = 0,$$

et par suite

$$(18)\quad\begin{cases} p\cos\lambda = p'\cos\lambda'.\cos\alpha + p''\cos\lambda''.\cos\beta + p'''\cos\lambda'''.\cos\gamma, & \text{On trouvera de même} \\ p\cos\mu = p'\cos\mu'.\cos\alpha + p''\cos\mu''.\cos\beta + p'''\cos\mu'''.\cos\gamma, \\ p\cos\nu = p'\cos\nu'.\cos\alpha + p''\cos\nu''.\cos\beta + p'''\cos\nu'''.\cos\gamma. \end{cases}$$

Donc, si l'on fait, pour abréger,

$$(19)\quad\begin{cases} A = p'\cos\lambda', & B = p''\cos\mu'', & C = p'''\cos\nu''', \\ D = p''\cos\nu'' = p'''\cos\mu''', & E = p'''\cos\lambda''' = p'\cos\nu', & F = p'\cos\mu' = p''\cos\lambda'', \end{cases}$$

on aura simplement

$$(20)\qquad\begin{cases} p\cos\lambda = A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma, \\ p\cos\mu = F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma, \\ p\cos\nu = E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma. \end{cases}$$

Ces dernières équations font connaître les relations qui subsistent, pour le point (x, y, z), entre les projections algébriques

$$(21)\qquad \left\{\begin{matrix} A, & F, & E; \\ F, & B, & D; \\ E, & D, & C; \end{matrix}\right.$$

des pressions p', p'', p''' exercées en ce point, du côté des coordonnées positives, contre trois plans parallèles aux plans coordonnés, et les projections algébriques

$$(5)\qquad p\cos\lambda, \quad p\cos\mu, \quad p\cos\nu$$

de la pression ou tension p exercée au même point contre un plan quelconque perpendiculaire à une droite, qui, prolongée du côté où la force p se manifeste, forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles α, β, γ.

En partant des équations (20), il est facile de reconnaître que, si le volume v, au lieu de présenter la forme d'un tétraèdre, est terminé par un nombre quelconque de faces planes, les formules (11) et (12) seront toujours vérifiées. En effet, ces différentes faces étant représentées par $s, s', \ldots$ nommons $\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha, \beta'\ \gamma'$, etc.... les angles que des droites perpendiculaires aux plans de ces mêmes faces, et prolongées en dehors du volume v, forment avec les demi-axes des coordonnées positives. Il suffira, pour obtenir la première des formules (11), d'ajouter les équations (1) de la page 38, après les avoir multipliées respectivement par A, F, E, puis d'avoir égard à la première des formules (20), ainsi qu'aux formules analogues. On établirait de même la seconde et la troisième des formules (11), en ajoutant les équations (1) [page 38], après les avoir respectivement multipliées par les coefficients F, B, D, ou par les coefficients E, D, C. Enfin, si l'on combine les formules (20) et autres du même genre, non-seulement avec les équations (1) de la page 38, mais encore avec les équations (5) de la page 39, on parviendra sans difficulté aux formules (12).

On déduit aisément des formules (20), 1.° l'intensité de la force p, 2.° l'angle compris entre la direction de cette force et la perpendiculaire au plan contre lequel elle s'exerce. En effet, si l'on ajoute ces formules, après avoir élevé au carré chacun de leurs membres, on trouvera

$$(22)\quad p^2 = (A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma)^2 + (F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma)^2 + (E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma)^2.$$

De plus, si l'on nomme δ l'angle dont nous venons de parler, on aura évidemment

$$(23)\qquad \cos\delta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

et par suite

$$(24)\qquad \cos\delta = \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + 2D\cos\beta\cos\gamma + 2E\cos\gamma\cos\alpha + 2F\cos\alpha\cos\beta}{p}.$$

Ajoutons que, si l'on remplace la force p par deux composantes, dont l'une soit comprise dans le plan que l'on considère, et l'autre perpendiculaire à ce plan, la seconde composante sera représentée, au signe près, par le produit

$$(25)\qquad p\cos\delta = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + 2D\cos\beta\cos\gamma + 2E\cos\gamma\cos\alpha + 2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Observons enfin que cette seconde composante sera une tension ou une pression suivant que la formule (25) aura pour second membre une quantité positive ou négative.

Supposons maintenant qu'à partir du point (x, y, z) on porte, sur la perpendiculaire au plan contre lequel agit la force p, une longueur r dont le carré représente la valeur numérique du rapport

$$(26)\qquad \frac{1}{p\cos\delta};$$

et désignons par $x + \mathrm{x}$, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$ les coordonnées de l'extrémité de cette même longueur. On aura

$$(27)\qquad \frac{\mathrm{x}}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{y}}{\cos\beta} = \frac{\mathrm{z}}{\cos\gamma} = \pm\sqrt{(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)} = \pm r,$$

$$(28)\qquad \frac{1}{p\cos\delta} = \pm r^2;$$

et par conséquent la formule (25) donnera

$$(29)\qquad A\mathrm{x}^2 + B\mathrm{y}^2 + C\mathrm{z}^2 + 2D\mathrm{y}\mathrm{z} + 2E\mathrm{z}\mathrm{x} + 2F\mathrm{x}\mathrm{y} = \pm 1.$$

Les variables $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$, comprises dans l'équation (29), sont les coordonnées de l'extrémité de la longueur r, comptées à partir du point (x, y, z) sur trois axes rectangulaires; et cette équation elle-même appartient à une surface du second degré qui a pour centre le point (x, y, z). Lorsque le polynome

$$(30)\qquad A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + 2D\cos\beta\cos\gamma + 2E\cos\gamma\cos\alpha + 2F\cos\alpha\cos\beta$$

conserve le même signe, quelles que soient les valeurs attribuées aux angles α, β, γ; alors l'équation (29), réduite à l'une des suivantes

$$(31)\qquad A\mathrm{x}^2 + B\mathrm{y}^2 + C\mathrm{z}^2 + 2D\mathrm{y}\mathrm{z} + 2E\mathrm{z}\mathrm{x} + 2F\mathrm{x}\mathrm{y} = 1,$$

(32) $$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=-1,$$

représente un ellipsoïde. Mais, si le polynome (30) change de signe, tandis que les angles α, β, γ varient, l'ellipsoïde dont il s'agit fera place au système de deux hyperboloïdes, dont l'un sera représenté par l'équation (31), l'autre par l'équation (32); et ces deux hyperboloïdes, dont l'un offrira une seule nappe, l'autre deux nappes distinctes, seront conjugués* entre eux, de sorte qu'ils auront le même centre avec les mêmes axes, et seront touchés à l'infini par une même surface conique du second degré. Ajoutons que, dans le premier cas, la force

(33) $$\pm p\cos\delta=\frac{1}{r^2}$$

sera toujours une tension, si le polynome (30) est positif, une pression, s'il est négatif. Dans le second cas, au contraire, la force dont il s'agit sera tantôt une pression, tantôt une tension, selon que l'extrémité du rayon vecteur r se trouvera située sur la surface de l'un ou de l'autre hyperboloïde; et la même force s'évanouira toutes les fois que ce rayon vecteur sera dirigé suivant une génératrice de la surface conique ci-dessus mentionnée.

On démontre aisément que la normale, menée par l'extrémité du rayon vecteur r à la surface (31) ou (32), forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, des angles dont les cosinus sont proportionnels aux trois polynomes

$$A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma,\quad F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma,\quad E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma.$$

Donc cette normale sera dirigée suivant la même droite que le rayon vecteur, si l'on a

(34) $$\frac{A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma}{\cos\beta}=\frac{E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma}{\cos\gamma}.$$

La formule (34) se vérifie en effet, lorsque le rayon vecteur coïncide avec l'un des axes de la surface (31) ou (32). Alors aussi on tire des équations (20), combinées avec la formule (34),

(35) $$\frac{\cos\lambda}{\cos\alpha}=\frac{\cos\mu}{\cos\beta}=\frac{\cos\nu}{\cos\gamma}=\pm\frac{\sqrt{(\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu)}}{\sqrt{(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}},$$

et il en résulte que la force p est elle-même dirigée suivant le rayon vecteur r, ou

---

* Voyez, relativement aux propriétés des hyperboloïdes conjugués, les Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie [page 275].

suivant son prolongement. Par conséquent aux trois axes de la surface (31) ou (32) correspondent trois pressions ou tensions, dont chacune est perpendiculaire au plan contre lequel elle s'exerce. Nous les nommerons pressions ou tensions *principales*. Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'on trouve parmi elles la pression ou tension *maximum* et la pression ou tension *minimum*. Car, si l'on égale à zéro la valeur de dp tirée de la formule (22), et si l'on a égard à l'équation

$$(36) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

en vertu de laquelle une des trois variables α, β, γ devient fonction des deux autres considérées comme indépendantes, on sera immédiatement ramené à la formule (34).

Si, à partir du point (x, y, z) on portait, sur la perpendiculaire au plan contre lequel agit la force p, une longueur équivalente non plus à la racine carrée du rapport $\pm\frac{1}{p\cos\delta}$, mais à la fraction $\frac{1}{p}$; en désignant par $x + \mathrm{x}$, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$ les coordonnées de l'extrémité de cette longueur, on trouverait

$$(27) \qquad \frac{\mathrm{x}}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{y}}{\cos\beta} = \frac{\mathrm{z}}{\cos\gamma} = \pm\sqrt{(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)} = \pm r,$$

$$(37) \qquad \frac{1}{p} = r;$$

et par suite la formule (22) donnerait

$$(38) \qquad (A\mathrm{x} + F\mathrm{y} + E\mathrm{z})^2 + (F\mathrm{x} + B\mathrm{y} + D\mathrm{z})^2 + (E\mathrm{x} + D\mathrm{y} + C\mathrm{z})^2 = 1.$$

L'équation (38) appartient à un ellipsoïde dont les axes correspondent aux valeurs de α, β, γ déterminées par la formule

$$(39) \left\{ \begin{aligned} & \frac{A(A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma)+F(F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma)+E(E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma)}{\cos\alpha} \\ = & \frac{F(A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma)+B(F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma)+D(E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma)}{\cos\beta} \\ = & \frac{E(A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma)+D(F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma)+C(E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma)}{\cos\gamma}. \end{aligned} \right.$$

Or, celle-ci étant évidemment vérifiée par les valeurs de α, β, γ qui satisfont à la formule (34), on peut affirmer que les axes du nouvel ellipsoïde sont dirigés suivant les mêmes droites que les pressions ou tensions principales. On arriverait à la même con-

clusion en observant que les valeurs *maximum* et *minimum* du rayon vecteur, c'est-à-dire le grand axe et le petit axe de l'ellipsoïde, correspondent nécessairement, en vertu de l'équation (37), le premier à la pression ou tension *minimum*, le second à la pression ou tension *maximum*.

En résumant les diverses propositions que nous venons d'établir, on obtiendra le théorême suivant.

3.ᵉ Théorême. *Si, après avoir fait passer par un point donné d'un corps solide un plan quelconque, on porte, à partir de ce point, et sur chacun des demi-axes perpendiculaires au plan, deux longueurs équivalentes, la première à l'unité divisée par la pression ou tension exercée contre le plan, la seconde à l'unité divisée par la racine carrée de cette force projetée sur l'un des demi-axes que l'on considère, ces deux longueurs seront les rayons vecteurs de deux ellipsoïdes, dont les axes seront dirigés suivant les mêmes droites. A ces axes correspondront les pressions ou tensions* principales *dont chacune sera normale au plan qui la supportera, et parmi lesquelles on rencontrera toujours la pression ou tension* maximum, *ainsi que la pression ou tension* minimum. *Quant aux autres pressions ou tensions, elles seront distribuées symétriquement autour des axes des deux ellipsoïdes. Ajoutons que, dans certains cas, le second ellipsoïde se trouvera remplacé par deux hyperboloïdes conjugués. Ces cas sont ceux dans lesquels le système des pressions ou tensions principales se compose d'une tension et de deux pressions, ou d'une pression et de deux tensions. Alors, si l'on substitue à la force qui agit contre chaque plan deux composantes rectangulaires, dont l'une soit normale au plan, cette dernière composante sera une tension ou une pression, suivant que le rayon vecteur perpendiculaire au plan appartiendra à l'un ou à l'autre des deux hyperboloïdes, et elle s'évanouira quand le rayon vecteur sera dirigé suivant une des génératrices de la surface conique du second degré qui touche les deux hyperboloïdes à l'infini.*

Concevons à présent que du centre du premier ellipsoïde on mène arbitrairement à la surface trois rayons vecteurs qui se coupent à angles droits. On prouvera sans peine que, si l'on divise l'unité par chacun de ces rayons vecteurs, la somme des carrés des quotients sera une quantité constante, égale à la somme qu'on obtiendrait en faisant coïncider les trois rayons vecteurs avec les trois demi-axes de l'ellipsoïde. [Voyez les Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie, pages 274 et 275]. De cette remarque, jointe au troisième théorême, on déduit immédiatement la proposition suivante.

4.ᵉ Théorême. *Si par un point donné d'un corps solide on fait passer trois plans rectangulaires entre eux, la somme des carrés des pressions ou tensions supportées par ces mêmes plans sera une quantité constante, égale à la somme des carrés des pressions ou tensions principales.*

Il peut arriver que les trois pressions ou tensions principales, ou au moins deux

d'entre elles deviennent équivalentes. Lorsque ces forces se réduisent à trois pressions égales, ou à trois tensions égales, les deux ellipsoïdes dont nous avons parlé se réduisent à deux sphères. Alors il y a égalité de pression ou de tension en tous sens, et chaque pression ou tension est perpendiculaire au plan qui la supporte. Il importe d'ailleurs d'observer que de ces deux dernières conditions la seconde ne peut être remplie qu'autant que la première l'est pareillement. En effet, l'on suppose la force p constamment dirigée suivant la droite qui forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles α, β, γ, la formule (34) ou (35) subsistera pour une position quelconque de cette droite, et par conséquent pour toutes les valeurs de α, β, γ propres à vérifier l'équation (36). Or, on tire de la formule (34), 1.° en supposant deux des quantités

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma$$

réduites à zéro, et la troisième à l'unité,

$$(40) \qquad D=0, \quad E=0, \quad F=0;$$

2.° en ayant égard aux équations (40),

$$(41) \qquad A=B=C.$$

Par conséquent, dans l'hypothèse admise, les formules (20) deviendront

$$(42) \qquad p\cos\lambda=A\cos\alpha, \quad p\cos\mu=A\cos\beta, \quad p\cos\nu=A\cos\gamma;$$

et, comme on tirera de ces dernières

$$(43) \qquad \frac{p}{A}=\frac{\cos\alpha}{\cos\lambda}=\frac{\cos\beta}{\cos\mu}=\frac{\cos\gamma}{\cos\nu}=\pm\frac{\sqrt{(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}}{\sqrt{(\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu)}}=\pm 1,$$

$$(44) \qquad p=\pm A,$$

il est clair que la pression ou tension, désignée par p, restera la même dans tous les sens. C'est précisément ce qui a lieu, quand on considère une masse fluide en équilibre.

Si deux pressions ou deux tensions principales devenaient égales entre elles, les deux ellipsoïdes mentionnés dans le 3.° théorème se réduiraient à deux ellipsoïdes de révolution, dont le second se trouverait remplacé, dans certains cas, par un système de deux hyperboloïdes de révolution conjugués l'une à l'autre. Alors tous les plans menés par l'axe de révolution de ces ellipsoïdes ou hyperboloïdes, supporteraient des pressions ou tensions équivalentes, dont chacune, étant perpendiculaire au plan qui lui serait soumis, pourrait être considérée comme une pression ou tension principale.

La supposition que nous venons de faire comprend le cas où les trois forces, qui composent le système des pressions ou tensions principales, seraient équivalentes, et se réduiraient à une pression et à deux tensions, ou bien encore à deux pressions et à une tension. Seulement il importe d'observer que, dans le dernier cas, le premier ellipsoïde serait remplacé par une sphère, et qu'en conséquence tous les plans menés par le point (x, y, z) supporteraient des pressions ou tensions équivalentes, mais dirigées, les unes suivant des droites perpendiculaires, et les autres suivant des droites obliques à ces mêmes plans.

Généralement, toutes les fois qu'une tension principale deviendra équivalente à une pression principale, les plans menés par l'axe perpendiculaire aux directions de ces deux forces supporteront des pressions ou tensions équivalentes, mais qui resteront obliques aux plans dont il s'agit, tant qu'elles seront distinctes de ces mêmes forces.

On peut encore supposer qu'une ou deux des tensions ou pressions principales se réduisent à zéro, ou qu'elles s'évanouissent toutes. Dans le premier cas, les ellipsoïdes ou hyperboloïdes, mentionnés dans le troisième théorème, se transformeront en cylindres droits qui auront pour bases des ellipses ou des hyperboles conjuguées. Dans le second cas, chacun de ces cylindres se trouvera remplacé par deux plans parallèles. Dans le troisième cas, la pression ou tension, exercée contre un plan quelconque mené par le point (x, y, z), se réduira toujours à zéro.

Les formules précédemment obtenues se simplifient, lorsqu'on prend pour axes coordonnés des droites parallèles aux directions des pressions ou tensions principales correspondantes au point (x, y, z). Alors, en effet, la surface, que représente l'équation (29), doit être une surface du second degré rapportée, non-seulement à son centre, mais encore à ses axes; et l'on doit avoir en conséquence

(40) $$D = 0, \qquad E = 0, \qquad F = 0.$$

Cela posé, les valeurs numériques des quantités A, B, C représenteront évidemment les pressions ou tensions principales, et les formules (20), (22), (25) se réduiront à

(45) $$p\cos\lambda = A\cos\alpha, \qquad p\cos\mu = B\cos\beta, \qquad p\cos\nu = C\cos\gamma,$$

(46) $$p^2 = A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\beta + C^2\cos^2\gamma,$$

(47) $$p\cos\delta = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

tandis que les équations (29) et (38) deviendront

(48) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \pm 1.$$

(3) $$R + \Delta R = f(r + \Delta r);$$

(4) $$\left\{\begin{aligned} P\cos\lambda &= \Sigma[\pm(R+\Delta R)\cos(a+\Delta a)],\\ P\cos\mu &= \Sigma[\pm(R+\Delta R)\cos(b+\Delta b)],\\ P\cos\nu &= \Sigma[\pm(R+\Delta R)\cos(c+\Delta c)].\end{aligned}\right.$$

On trouvera par suite

(5) $$(r+\Delta r)^2 = (r\cos a - \rho\cos\alpha)^2 + (r\cos b - \rho\cos\beta)^2 + (r\cos c - \rho\cos\gamma)^2$$
$$= r^2 - 2r\rho(\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma) + \rho^2;$$

puis, en considérant la quantité ρ comme infiniment petite du premier ordre, et négligeant les infiniment petits du second ordre, on conclura des formules (2), (3), (5),

(6) $$\Delta r = -\rho(\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma);$$

(7) $$R + \Delta R = f(r) + f'(r).\Delta r = R + f'(r).\Delta r;$$

(8) $$\left\{\begin{aligned} \cos(a+\Delta a) &= \frac{r\cos a - \rho\cos\alpha}{r+\Delta r} = \cos a - \rho\frac{\cos\alpha}{r} - \frac{\cos a}{r}\Delta r,\\ \cos(b+\Delta b) &= \frac{r\cos b - \rho\cos\beta}{r+\Delta r} = \cos b - \rho\frac{\cos\beta}{r} - \frac{\cos b}{r}\Delta r,\\ \cos(c+\Delta c) &= \frac{r\cos c - \rho\cos\gamma}{r+\Delta r} = \cos c - \rho\frac{\cos\gamma}{r} - \frac{\cos c}{r}\Delta r.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, en ayant égard aux équations (1), on reconnaîtra que les formules (4) peuvent être réduites à

(9) $$\left\{\begin{aligned} P\cos\lambda &= \Sigma\left\{\pm\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\cos a.\Delta r \mp \frac{f(r)}{r}\rho\cos\alpha\right\},\\ P\cos\mu &= \Sigma\left\{\pm\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\cos b.\Delta r \mp \frac{f(r)}{r}\rho\cos\beta\right\},\\ P\cos\nu &= \Sigma\left\{\pm\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\cos c.\Delta r \mp \frac{f(r)}{r}\rho\cos\gamma\right\};\end{aligned}\right.$$

puis, en remettant pour Δr sa valeur tirée de la formule (6), et faisant, pour abréger,

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
A &= \rho\,\Sigma \left\{ \mp \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \cos^2 a \mp \frac{f(r)}{r} \right\}, \\
B &= \rho\,\Sigma \left\{ \mp \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \cos^2 b \mp \frac{f(r)}{r} \right\}, \\
C &= \rho\,\Sigma \left\{ \mp \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \cos^2 c \mp \frac{f(r)}{r} \right\};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
D &= \rho\,\Sigma \left\{ \mp \left[f'(r) + \frac{f(r)}{r} \right] \cos b \cos c \right\}, \\
E &= \rho\,\Sigma \left\{ \mp \left[f'(r) + \frac{f(r)}{r} \right] \cos c \cos a \right\}, \\
F &= \rho\,\Delta \left\{ \mp \left[f'(r) + \frac{f(r)}{r} \right] \cos a \cos b \right\};
\end{aligned}
\right.
$$

on trouvera définitivement

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
P \cos\lambda &= A \cos\alpha + F \cos\beta + E \cos\gamma, \\
P \cos\mu &= F \cos\alpha + B \cos\beta + D \cos\gamma, \\
P \cos\nu &= E \cos\alpha + C \cos\beta + C \cos\gamma.
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules (12), ainsi que plusieurs propositions qui s'en déduisent, et qui sont analogues aux théorèmes 1, 2, 3 du précédent article, sont dues à M. Fresnel, qui les a données dans ses Recherches sur la double réfraction.



SUR LA CONDENSATION ET LA DILATATION

DES CORPS SOLIDES.

Lorsqu'un corps solide vient à changer de forme, et que, par l'effet d'une cause quelconque, il passe d'un premier état naturel ou artificiel à un second état distinct du premier, chaque élément du volume se condense ou se dilate, et les divers éléments offrent en général des condensations ou dilatations diverses. Il y a plus, la condensation ou dilatation du corps en un point donné peut n'être pas le même dans tous les sens. Nous allons entrer, à ce sujet, dans quelques détails qui, plus tard, nous seront fort utiles pour la solution de quelques problêmes de mécanique.

Rapportons tous les points de l'espace à trois axes rectangulaires, et supposons que le point matériel, correspondant aux coordonnées x, y, z dans le dernier état du corps solide, soit précisément celui qui, dans le premier état du même corps, avait pour coordonnées les trois différences

$$(1) \qquad x-\xi, \quad y-\eta, \quad z-\zeta.$$

Si l'on prend x, y, z pour variables indépendantes, ξ, η, ζ seront des fonctions de x, y, z qui serviront à mesurer les déplacements du point que l'on considère parallèlement aux axes des coordonnées. Soit d'ailleurs r la distance qui, dans le second état du corps solide, sépare deux molécules m, m', correspondantes aux coordonnées x, y, z, et $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$, en sorte qu'on ait

$$(2) \qquad r^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2.$$

Comme ces deux molécules seront celles qui, dans le premier état, avaient pour coordonnées

$$x-\xi, \quad y-\eta, \quad z-\zeta,$$

et

$$x+\Delta x-\left(\xi+\frac{d\xi}{dx}\Delta x+\frac{d\xi}{dy}\Delta y+\frac{d\xi}{dz}\Delta z+\ldots\right), \quad y+\Delta y-\left(\eta+\frac{d\eta}{dx}\Delta x+\frac{d\eta}{dy}\Delta y+\frac{d\eta}{dz}\Delta z+\ldots\right),$$

$$z+\Delta z-\left(\zeta+\frac{d\zeta}{dx}\Delta x+\frac{d\zeta}{dy}\Delta y+\frac{d\zeta}{dz}\Delta z+\ldots\right),$$

il est clair que, si l'on désigne leur distance primitive par

(3) $$\frac{r}{1+\varepsilon},$$

on trouvera

(4) $$\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^2 = \left(\Delta x - \frac{d\xi}{dx}\Delta x - \frac{d\xi}{dy}\Delta y - \frac{d\xi}{dz}\Delta z - \ldots\right)^2$$
$$+ \left(\Delta y - \frac{d\eta}{dx}\Delta x - \frac{d\eta}{dy}\Delta y - \frac{d\eta}{dz}\Delta z - \ldots\right)^2$$
$$+ \left(\Delta z - \frac{d\zeta}{dx}\Delta x - \frac{d\zeta}{dy}\Delta y - \frac{d\zeta}{dz}\Delta z - \ldots\right)^2.$$

Soient maintenant α, β, γ les angles que forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, le rayon vecteur r mené de la molécule m à la molécule m'. On aura évidemment

(5) $$\Delta x = r\cos\alpha, \qquad \Delta y = r\cos\beta, \qquad \Delta z = r\cos\gamma;$$

et, en supposant la distance r infiniment petite, on tirera de l'équation (4) divisée par r^2

(6) $$\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 = \left(\cos\alpha - \frac{d\xi}{dx}\cos\alpha - \frac{d\xi}{dy}\cos\beta - \frac{d\xi}{dz}\cos\gamma\right)^2$$
$$+ \left(\cos\beta - \frac{d\eta}{dx}\cos\alpha - \frac{d\eta}{dy}\cos\beta - \frac{d\eta}{dz}\cos\gamma\right)^2$$
$$+ \left(\cos\gamma - \frac{d\zeta}{dx}\cos\alpha - \frac{d\zeta}{dy}\cos\beta - \frac{d\zeta}{dz}\cos\gamma\right)^2.$$

La quantité $1+\varepsilon$, déterminée par la formule (6), n'est autre chose que le rapport du rayon vecteur r à l'expression (3), c'est-à-dire le rapport entre les distances qui séparent les deux molécules infiniment voisines m et m', dans les deux états du corps solide. Par suite, la valeur numérique de ε servira de mesure à ce qu'on peut nommer la dilatation ou la condensation *linéaire* du corps suivant la direction du rayon vecteur r, savoir à la dilatation linéaire, si ε est une quantité positive, et à la condensation ou contraction linéaire, dans le cas contraire.

Concevons à présent qu'à partir du point (x, y, z) on porte sur la droite qui forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles α, β, γ, une longueur équivalente à $1+\varepsilon$; et désignons par

$$x+\mathrm{x}, \quad y+\mathrm{y}, \quad z+\mathrm{z}$$

les coordonnées de l'extrémité de cette longueur. On aura

$$\frac{\mathrm{x}}{\cos\alpha}=\frac{\mathrm{y}}{\cos\beta}=\frac{\mathrm{z}}{\cos\gamma}=\pm(1+\varepsilon)\,; \tag{7}$$

et la formule (6) donnera

$$\left(\mathrm{x}-\frac{d\xi}{dx}\mathrm{x}-\frac{d\xi}{dy}\mathrm{y}-\frac{d\xi}{dz}\mathrm{z}\right)^2+\left(\mathrm{y}-\frac{d\eta}{dx}\mathrm{x}-\frac{d\eta}{dy}\mathrm{y}-\frac{d\eta}{dz}\mathrm{z}\right)^2+\left(\mathrm{z}-\frac{d\zeta}{dx}\mathrm{x}-\frac{d\zeta}{dy}\mathrm{y}-\frac{d\zeta}{dz}\mathrm{z}\right)^2=1. \tag{8}$$

Cette dernière équation représente une ellipsoïde dont la construction suffit pour indiquer les rapports qui existent entre les dilatations ou condensations linéaires dans les différentes directions autour du point (x, y, z). Nous appellerons *dilatations ou condensations principales* celles qui correspondent aux trois axes de l'ellipsoïde, et parmi lesquelles on rencontre toujours les dilatations ou condensations *maximum* ou *minimum*. Les autres se trouvent symétriquement distribuées autour des trois axes de ce même ellipsoïde.

On peut aisément déduire des équations (6) et (8) les valeurs des variables ε et α, β, γ qui correspondent aux condensations et dilatations linéaires principales. En effet, si l'on pose, pour abréger,

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2=\theta\,; \tag{9}$$

et de plus

$$\begin{cases} A=\left(\dfrac{d\xi}{dx}-1\right)^2+\left(\dfrac{d\eta}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\zeta}{dx}\right)^2, \\ B=\left(\dfrac{d\zeta}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\eta}{dy}-1\right)^2+\left(\dfrac{d\zeta}{dy}\right)^2, \\ C=\left(\dfrac{d\xi}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{d\eta}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{d\zeta}{dz}-1\right)^2; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} D=\dfrac{d\xi}{dy}\dfrac{d\xi}{dz}+\left(\dfrac{d\eta}{dy}-1\right)\dfrac{d\eta}{dz}+\dfrac{d\zeta}{dy}\left(\dfrac{d\zeta}{dz}-1\right), \\ E=\dfrac{d\xi}{dz}\left(\dfrac{d\xi}{dx}-1\right)+\dfrac{d\eta}{dz}\dfrac{d\eta}{dx}+\left(\dfrac{d\zeta}{dz}-1\right)\dfrac{d\zeta}{dx}, \\ F=\left(\dfrac{d\xi}{dx}-1\right)\dfrac{d\xi}{dy}+\dfrac{d\eta}{dx}\left(\dfrac{d\eta}{dy}-1\right)+\dfrac{d\zeta}{dx}\dfrac{d\zeta}{dy}; \end{cases} \tag{11}$$

les formules (6) et (8) se réduiront aux suivantes

$$(12)\quad 0 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + 2D\cos\beta\cos\gamma + 2E\cos\gamma\cos\alpha + 2F\cos\alpha\cos\beta,$$

$$(13)\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1.$$

Or, dans l'ellipsoïde représenté par l'équation (13), le rayon vecteur mené du centre à un point de la surface sera normal à cette surface, si les angles α, β, γ, formés par le même rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées positives, vérifient la formule

$$(14)\quad \frac{A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma}{\cos\beta} = \frac{E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma}{\cos\gamma};$$

et, comme les trois fractions qui précèdent, quand elles deviennent égales entre elles, sont en même temps équivalentes au rapport

$$\frac{(A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma)\cos\alpha + (F\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\beta + (E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\gamma}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = \theta,$$

il est clair que les valeurs de θ, α, β, γ correspondantes aux dilatations ou condensations principales seront déterminées par la formule

$$(15)\quad \frac{A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma}{\cos\beta} = \frac{E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma}{\cos\gamma} = \theta,$$

jointe à l'équation

$$(16)\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

D'ailleurs on conclura de la formule (15)

$$(17)\quad \begin{cases} (A-\theta)\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma = 0, \\ F\cos\alpha + (B-\theta)\cos\beta + D\cos\gamma = 0, \\ E\cos\alpha + D\cos\beta + (C-\theta)\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

et par suite

$$(18)\quad (A-\theta)(B-\theta)(C-\theta) - D^2(A-\theta) - E^2(B-\theta) - F^2(C-\theta) + 2DEF = 0.$$

Soient θ', θ'', θ''' les trois racines de cette dernière équation, et ε', ε'', ε''' les valeurs correspondantes de ε, en sorte qu'on ait

$$\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{\theta'}} - 1, \qquad \varepsilon'' = \frac{1}{\sqrt{\theta''}} - 1, \qquad \varepsilon''' = \frac{1}{\sqrt{\theta'''}} - 1, \tag{19}$$

Chacune des trois quantités ε', ε'', ε''' représentera toujours, lorsqu'elle sera positive, une dilatation principale, et lorsqu'elle sera négative, une condensation principale prise avec le signe —. De plus, on aura évidemment, en vertu de l'équation (18),

$$\left\{\begin{aligned} &\theta' + \theta'' + \theta''' = A + B + C, \\ &\theta''\theta''' + \theta'''\theta' + \theta'\theta'' = BC + CA + AB - D^2 - E^2 - F^2, \\ &\theta'\theta''\theta''' = ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Si l'on supposait les axes coordonnés parallèles aux droites menées par le point (x, y, z), et correspondantes aux dilatations ou condensations linéaires principales, l'équation (13) représenterait un éllipsoïde rapporté, non-seulement à son centre, mais encore à ses axes. On aurait donc alors

$$D = 0, \qquad E = 0, \qquad F = 0, \tag{21}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = \frac{d\xi}{dy}\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\eta}{dy}\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\frac{d\zeta}{dz}, \\ &\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\xi}{dz}\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dz}\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\zeta}{dz}\frac{d\zeta}{dx}, \\ &\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dx}\frac{d\zeta}{dy}; \end{aligned}\right. \tag{22}$$

et comme l'équation (18) se réduirait à

$$(A - \theta)(B - \theta)(C - \theta) = 0, \tag{23}$$

on pourrait prendre

$$\theta' = A, \qquad \theta'' = B, \qquad \theta''' = C. \tag{24}$$

Par suite la formule (12) donnerait

$$\theta = \theta'\cos^2\alpha + \theta''\cos^2\beta + \theta'''\cos^2\gamma, \tag{25}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(26)\qquad \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2=\left(\frac{\cos\alpha}{1+\varepsilon'}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{1+\varepsilon''}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{1+\varepsilon'''}\right)^2.$$

L'équation (26) sert à déduire la dilatation ou condensation, mesurée suivant un axe quelconque, des condensations ou dilatations principales, mesurées suivant trois axes qui se coupent à angles droits, quand on connaît les angles α, β, γ que forme le premier axe prolongé dans un certain sens avec les trois autres.

Outre les condensations et dilatations linéaires dont nous venons de parler, il peut être utile de considérer la condensation ou dilatation d'un très-petit élément de volume qui renferme le point (x, y, z). Or, supposons qu'en vertu du changement d'état du corps solide, ce petit élément ait varié dans le rapport de 1 à $1+v$. La valeur numérique de v servira précisément à mesurer ce qu'on peut appeler la *dilatation* ou la *condensation du volume* au point (x, y, z), savoir la dilatation du volume, si la quantité v est positive, et à la condensation du volume dans le cas contraire. Ajoutons qu'il suffira, pour déterminer la quantité v, de connaître les condensations ou dilatations linéaires principales, c'est-à-dire, en d'autres termes, les valeurs de ε', ε'', ε'''. En effet, concevons, pour fixer les idées, que le petit élément de volume ait été renfermé, dans le premier état du corps solide, sous une surface sphérique décrite avec un rayon infiniment petit désigné par ρ. Ce petit élément, qui avait alors pour mesure le produit

$$\frac{4}{3}\pi\rho^3,$$

prendra évidemment, après le changement d'état, la forme d'un ellipsoïde, dont les trois axes seront

$$\rho(1+\varepsilon'),\qquad \rho(1+\varepsilon''),\qquad \rho(1+\varepsilon'''),$$

et en conséquence il deviendra équivalent au produit

$$\frac{4}{3}\pi\rho^3(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''').$$

On aura donc

$$1+v=\frac{\frac{4}{3}\pi\rho^3(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''')}{\frac{4}{3}\pi\rho^3},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(27)\qquad 1+v=(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''')=\frac{1}{\sqrt{(\theta'\theta''\theta''')}}.$$

En combinant cette dernière équation avec la troisième des formules (20), on trouvera

$$(28)\qquad \left(\frac{1}{1+\upsilon}\right)^2 = ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF.$$

Les équations (10), (11), (12), (17), (27) et (28) se simplifient, quand la forme du corps solide varie très-peu dans le passage du premier état au second. En effet, si l'on considère les quantités

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \varepsilon,\quad \upsilon,\quad \varepsilon',\quad \varepsilon'',\quad \varepsilon'''$$

comme infiniment petites du premier ordre, on tirera des équations dont il s'agit, en remplaçant θ par $(1+\varepsilon)^{-2}$, et négligeant les infiniment petits du second ordre ou d'un ordre plus élevé,

$$(29)\qquad A = 1 - 2\frac{d\xi}{dx},\qquad B = 1 - 2\frac{d\eta}{dy},\qquad C = 1 - 2\frac{d\zeta}{dz},$$

$$(30)\qquad D = -\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right),\quad E = -\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right),\quad F = -\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right);$$

$$(31)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{d\xi}{dx}\cos^2\alpha + \dfrac{d\eta}{dy}\cos^2\beta + \dfrac{d\zeta}{dz}\cos^2\gamma \\ + \left(\dfrac{d\eta}{dz}+\dfrac{d\zeta}{dy}\right)\cos\beta\cos\gamma + \left(\dfrac{d\zeta}{dx}+\dfrac{d\xi}{dz}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\dfrac{d\xi}{dy}+\dfrac{d\eta}{dx}\right)\cos\gamma\cos\alpha; \end{cases}$$

$$(32)\qquad \begin{cases} 2\left(\dfrac{d\xi}{dx}-\varepsilon\right)\cos\alpha + \left(\dfrac{d\xi}{dy}+\dfrac{d\eta}{dx}\right)\cos\beta + \left(\dfrac{d\xi}{dz}+\dfrac{d\zeta}{dx}\right)\cos\gamma = 0, \\ \left(\dfrac{d\eta}{dx}+\dfrac{d\xi}{dy}\right)\cos\alpha + 2\left(\dfrac{d\eta}{dy}-\varepsilon\right)\cos\beta + \left(\dfrac{d\eta}{dz}+\dfrac{d\zeta}{dy}\right)\cos\gamma = 0, \\ \left(\dfrac{d\zeta}{dx}+\dfrac{d\xi}{dz}\right)\cos\alpha + \left(\dfrac{d\zeta}{dy}+\dfrac{d\eta}{dz}\right)\cos\beta + 2\left(\dfrac{d\zeta}{dz}-\varepsilon\right)\cos\gamma = 0; \end{cases}$$

$$(33)\qquad \upsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' = \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}.$$

Alors aussi l'élimination des angles α, β, γ entre les formules (32) produira l'équation

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &4\left(\frac{d\xi}{dx}-\varepsilon\right)\left(\frac{d\eta}{dy}-\varepsilon\right)\left(\frac{d\zeta}{dz}-\varepsilon\right)+\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)\\ &-\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)^2\left(\frac{d\xi}{dx}-\varepsilon\right)-\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)^2\left(\frac{d\eta}{dy}-\varepsilon\right)-\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)^2\left(\frac{d\zeta}{dz}-\varepsilon\right)=0,\end{aligned}\right.$$

qui aura pour racines les quantités ε', ε'', ε''', et de laquelle on conclura

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon'''=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz},\\ &\varepsilon''\varepsilon'''+\varepsilon'''\varepsilon'+\varepsilon'\varepsilon''=\\ &\frac{d\eta}{dy}\frac{d\zeta}{dz}+\frac{d\zeta}{dz}\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy}-\frac{1}{4}\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)^2,\\ &\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''=\\ &\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy}\frac{d\zeta}{dz}-\frac{1}{4}\frac{d\xi}{dx}\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{d\eta}{dy}\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{d\zeta}{dz}\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)\end{aligned}\right.$$

Si l'on supposait les axes coordonnés parallèles aux droites suivant lesquelles se mesurent les dilatations et condensations principales relatives au point (x, y, z), les conditions (21) ou (22) seraient vérifiées. On aurait donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre, ou d'un ordre plus élevé,

$$(36)\qquad \frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}=0,\qquad \frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}=0,\qquad \frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}=0;$$

et, comme par suite l'équation (34) se réduirait à

$$(37)\qquad \left(\frac{d\xi}{dx}-\varepsilon\right)\left(\frac{d\eta}{dy}-\varepsilon\right)\left(\frac{d\zeta}{dz}-\varepsilon\right)=0,$$

on pourrait prendre

$$(38)\qquad \varepsilon'=\frac{d\xi}{dx},\qquad \varepsilon''=\frac{d\eta}{dy},\qquad \varepsilon'''=\frac{d\zeta}{dz}.$$

Dans la même supposition, la formule (31) donnerait

$$(39)\qquad \varepsilon=\frac{d\xi}{dx}\cos^2\alpha+\frac{d\eta}{dy}\cos^2\beta+\frac{d\zeta}{dz}\cos^2\gamma,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(40)\qquad \varepsilon=\varepsilon'\cos^2\alpha+\varepsilon''\cos^2\beta+\varepsilon'''\cos^2\gamma.$$

Cette dernière se déduit immédiatement de l'équation (26), quand on considère $\varepsilon, \varepsilon'$, ε'', ε''' comme des quantités infiniment petites.

Revenons au cas où les axes coordonnés sont dirigés suivant des droites quelconques. Alors, si l'on fait, pour abréger,

$$(41)\quad \begin{cases} \mathcal{A}=\frac{d\xi}{dx}, & \mathcal{B}=\frac{d\eta}{dy}, & \mathcal{C}=\frac{d\zeta}{dz}, \\ 2\,\mathcal{D}=\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}, & 2\,\mathcal{E}=\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}, & 2\,\mathcal{F}=\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}, \end{cases}$$

la formule (31) donnera

$$(42)\quad \varepsilon=\mathcal{A}\cos^2\alpha+\mathcal{B}\cos^2\beta+\mathcal{C}\cos^2\gamma+2\,\mathcal{D}\cos\beta\cos\gamma+2\,\mathcal{E}\cos\gamma\cos\alpha+2\,\mathcal{F}\cos\alpha\cos\beta.$$

Concevons maintenant qu'à partir du point (x, y, z) on porte, sur la droite qui forme avec les demi-axes des coordonnées positives les angles α, β, γ, une longueur dont le carré représente la valeur numérique du rapport $\frac{1}{\varepsilon}$; et désignons par $x+\text{x}$, $y+\text{y}$, $z+\text{z}$ les coordonnées de l'extrémité de cette longueur. On aura

$$(43)\quad \frac{\text{x}}{\cos\alpha}=\frac{\text{y}}{\cos\beta}=\frac{\text{z}}{\cos\gamma}=\pm\sqrt{\left(\pm\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

et l'on tirera de la formule (42)

$$(44)\quad \mathcal{A}\text{x}^2+\mathcal{B}\text{y}^2+\mathcal{C}\text{z}^2+2\,\mathcal{D}\text{yz}+2\,\mathcal{E}\text{zx}+2\,\mathcal{F}\text{xy}=\pm 1.$$

L'équation (44), semblable à la formule (29) de la page (50), appartient à une surface du second degré, dont le centre coïncide avec le point (x, y, z). Cette même équation représente une ellipsoïde, dans le cas où ε ne change pas de signe tandis que l'on fait varier les angles α, β, γ; et se réduit alors à

$$(45)\quad \mathcal{A}\text{x}^2+\mathcal{B}\text{y}^2+\mathcal{C}\text{z}^2+2\,\mathcal{D}\text{yz}+2\,\mathcal{E}\text{zx}+2\,\mathcal{F}\text{xy}=1,$$

ou bien à

$$(46)\quad \mathcal{A}\text{x}^2+\mathcal{B}\text{y}^2+\mathcal{C}\text{z}^2+2\,\mathcal{D}\text{yz}+2\,\mathcal{E}\text{zx}+2\,\mathcal{F}\text{xy}=-1,$$

selon que l'on suppose ε constamment positif ou constamment négatif. Dans ce cas, il n'y aura, autour du point (x, y, z), que des dilatations linéaires, si ε est positif, et des condensations linéaires, si ε est négatif. Dans le cas contraire, l'ellipsoïde se trouvera remplacé par le système de deux hyperboloïdes conjugués, dont l'un, représenté par l'équation (45), comprendra les extrémités des rayons vecteurs dirigés dans les divers sens suivant lesquels le corps solide se sera dilaté, tandis que l'autre, repré-

senté par l'équation (46), comprendra les extrémités des rayons vecteurs, dirigés dans les divers sens suivant lesquels le corps solide se sera condensé. Ajoutons que, dans tous les cas possibles, les condensations ou dilatations *maximum* ou *minimum* correspondront évidemment à deux axes de l'ellipsoïde ou des deux hyperboloïdes. Cela posé, on pourra énoncer la proposition suivante.

Théorème. *Supposons que, par l'effet d'une cause quelconque, un corps solide ait passé d'un premier état naturel ou artificiel à un second état très-peu différent du premier, et qu'à partir d'un point donné de ce corps solide, on porte, sur chacun des demi-axes aboutissants au même point, une longueur équivalente à l'unité divisée par la racine carrée de la condensation ou dilatation linéaire mesurée suivant le demi-axe que l'on considère. Cette longueur sera le rayon vecteur d'un ellipsoïde qui aura pour centre le point* (x, y, z), *et dont les trois axes correspondront à trois dilatations ou condensations principales. Quant aux autres dilatations ou condensations, elles seront symétriquement distribuées autour de ces trois axes. Dans certains cas, l'ellipsoïde dont il s'agit se trouvera remplacé par deux hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes, qui, étant conjugués l'un à l'autre, auront le même centre avec les mêmes axes, et seront touchés à l'infini par une même surface conique du second degré. Ces cas sont ceux où il y aura, autour du point donné, dilatation dans un sens, condensation dans un autre. Alors la surface conique dont nous venons de parler séparera la région dilatée, qui correspondra au premier hyperboloïde, de la région condensée qui correspondra au second, et les génératrices de cette surface conique indiqueront les directions suivant lesquelles il n'y aura ni dilatation ni condensation. Ajoutons que, parmi les condensations ou dilatations principales, on rencontrera toujours, si le corps est dilaté dans tous les sens, ou condensé dans tous les sens autour du point* (x, y, z), *un* maximum *et un* minimum *de dilatation, ou bien un* maximum *et un* minimum *de condensation; et, si le contraire arrive, une dilatation* maximum *avec une condensation* maximum.

Il peut arriver que les trois condensations ou dilatations principales, ou au moins deux d'entre elles, deviennent équivalentes ou se réduisent à zéro. Alors l'ellipsoïde et les hyperboloïdes mentionnés dans le théorème précédent deviennent des surfaces de révolution ou des cylindres, et peuvent même se réduire à une sphère, ou à un système de deux plans parallèles. Ainsi, en particulier, lorsque le corps solide est dilaté dans tous les sens, ou condensé dans tous les sens, et que les condensations ou dilatations principales sont équivalentes, l'ellipsoïde se change en une sphère, et la condensation ou dilatation linéaire a une valeur constante, qui reste la même, dans toutes les directions autour du point (x, y, z). Dans ce cas, la condensation ou dilatation du volume est évidemment le triple de la condensation ou dilatation linéaire.

SUR LES MOUVEMENTS QUE PEUT PRENDRE

UN SYSTÈME INVARIABLE, LIBRE,

OU ASSUJETTI A CERTAINES CONDITIONS.

§ 1.er CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Lorsqu'un système invariable, libre ou assujetti à certaines conditions, se meut dans l'espace, il existe entre les vitesses des différents points certaines relations qui, dans beaucoup de cas, s'expriment très-simplement, et que l'on déduit des formules relatives à la transformation des coordonnées. Je vais montrer, dans cet article, que les mêmes relations peuvent être tirées du principe de vitesses virtuelles. Ordinairement on se sert de ce principe pour déterminer les forces capables de maintenir en équilibre un système de points matériels assujetti à des liaisons données, en supposant connues les vitesses que ces points peuvent acquérir dans un ou plusieurs mouvements virtuels du système, c'est-à-dire dans des mouvements compatibles avec les liaisons dont il s'agit. Mais il est clair qu'on peut renverser la question, et qu'après avoir établi les conditions d'équilibre par une méthode quelconque, ou même, si l'on veut, par la considération de quelques-uns des mouvements virtuels, on pourra se servir, pour déterminer la nature de tous les autres, du principe que nous venons de rappeler. Ajoutons qu'il est utile, dans cette détermination, de substituer au principe des vitesses virtuelles un autre principe que l'on tire immédiatement du premier, et qui se trouve renfermé dans la proposition suivante.

THÉORÈME. *Supposons que deux systèmes de forces soient successivement appliqués à des points assujettis à des liaisons quelconques. Pour que ces deux systèmes de forces soient équivalents, il sera nécessaire, et il suffira que, dans un mouvement virtuel quelconque, la somme des moments virtuels des forces du premier système soit égale à la somme des moments virtuels des forces du second système.*

Démonstration. Supposons que les deux systèmes de forces donnés se composent, le premier des forces P, P', P'',.... le second des forces Q, Q', Q''.... Ces deux systèmes seront équivalents, si un troisième système, choisi de manière à faire équilibre au premier, fait en même temps équilibre au second. Or, soient R, R', R''.... les

forces qui composeront ce troisième système. Pour que le principe des vitesses virtuelles soit vérifié, il sera nécessaire, et il suffira que, dans un mouvement virtuel quelconque, la somme des moments virtuels des forces R, R', R'', prise en signe contraire, devienne équivalente non-seulement à la somme des moments virtuels des forces P, P', P'', ... mais encore à la somme des moments virtuels des forces Q, Q', Q''.... Donc ces deux dernières sommes devront être égales et affectées du même signe.

Nous allons maintenant appliquer le théorème qui précède à la détermination des mouvements que peut prendre un système de points matériels liés invariablement les uns aux autres. Nous commencerons par examiner le cas où tous ces points sont compris dans un plan fixe dont ils ne doivent jamais sortir. Nous passerons ensuite au cas général où on les suppose disposés arbitrairement dans l'espace.

---

§ 2. *Sur le mouvement d'un système de points matériels qui, étant liés invariablement les uns aux autres, et compris dans un plan fixe, se meuvent sans sortir de ce plan.*

Considérons un système de points matériels qui, étant liés invariablement les uns aux autres, et compris dans un plan fixe, se meuvent sans sortir de ce plan. Le mouvement du système étant compatible avec les liaisons données sera un mouvement virtuel. Cela posé, on déduira sans peine du théorème établi dans le § 1.er les propositions suivantes.

1.er Théorème. *Si, à une époque quelconque du mouvement, deux points du système invariable ont des vitesses nulles, les vitesses de tous les autres points se réduiront à zéro.*

Démonstration. Ce théorème, qui est évident par lui-même, quand les deux points donnés ont des vitesses constamment nulles, c'est-à-dire quand ils demeurent en repos, peut être démontré, dans tous les cas, à l'aide des raisonnements que nous allons indiquer.

Soient A', A'' les points dont les vitesses sont nulles, et ω la vitesse d'un troisième point A choisi arbitrairement. Si l'on applique à ce dernier point une force P comprise dans le plan fixe, et dirigée d'une manière quelconque, on pourra généralement la décomposer en deux autres forces P', P'' dirigées suivant les droites $\overline{AA'}$, $\overline{AA''}$. D'ailleurs, ces droites étant invariables, on pourra supposer la force P' appliquée au point A', la force P'' au point A'', et alors la somme des moments virtuels de ces deux forces s'évanouira. Donc, la force P, équivalente au système des deux autres, devra elle-même fournir, en vertu du théorème établi dans le premier paragraphe, un moment virtuel égal à zéro. On aura donc nécessairement

$$P\omega\cos(\widehat{P,\omega})=0, \tag{1}$$

quels que soient l'angle $(\widehat{P,\omega})$ et l'intensité de la force P; c'est-à-dire, en d'autres termes,

$$\omega=0. \tag{2}$$

Les raisonnements qui précèdent ne seraient plus applicables, si le point A était situé sur la droite $\overline{A'A''}$. Mais, alors, en remplaçant la force P par deux forces parallèles P', P'' respectivement appliquées aux points $A'A''$, on démontrerait, comme on vient de le faire, les formules (1) et (2); et l'on reconnaîtrait encore que, dans l'hypothèse admise, la vitesse du produit A se réduit à zéro.

2.° Théorème. *Si, à une époque quelconque du mouvement, les vitesses de tous les points du système invariable sont différentes de zéro, ces vitesses seront toutes égales et dirigées suivant des droites parallèles.*

Démonstration. En effet, soient ω', ω'' les vitesses de deux points quelconques A', A''. Si ces vitesses ne sont pas dirigées suivant des droites parallèles, les perpendiculaires élevées sur leurs directions, et dans le plan donné, par les deux points A', A'', se couperont en un troisième point A. Or, si l'on applique à ce dernier une force P comprise dans le plan fixe et dirigée d'une manière quelconque, la force P sera équivalente au système de deux autres forces P', P'' dirigées suivant les droites $\overline{AA'}$, $\overline{AA''}$, et respectivement appliquées aux points A', A''. Cela posé, si l'on nomme ω la vitesse du point A, on aura nécessairement, en vertu du théorème énoncé dans le premier paragraphe,

$$P\omega\cos(\widehat{P,\omega})=P'\omega'\cos(\widehat{P',\omega'})+P''\omega''\cos(\widehat{P'',\omega''}). \tag{3}$$

D'ailleurs, les droites $\overline{AA'}$, $\overline{AA''}$ étant perpendiculaires aux directions des vitesses ω', ω'', on aura encore

$$\cos(\widehat{P',\omega'})=0, \qquad \cos(\widehat{P'',\omega''})=0. \tag{4}$$

Donc, la formule (3) donnera

$$P\omega\cos(\widehat{P,\omega})=0, \tag{1}$$

quelles que soient les valeurs des quantités P, $(\widehat{P,\omega})$, et par conséquent

$$\omega=0. \tag{2}$$

Cette conclusion étant contraire à l'hypothèse admise dans l'énoncé du théorème 2, il est clair que le point A ne saurait exister. Donc les vitesses de deux points quelconques A', A'' sont dirigées suivant des droites parallèles.

Il reste à faire voir que les vitesses ω', ω'' sont égales. Or, considérons d'abord le cas où la droite $\overline{A'A''}$ n'est pas perpendiculaire aux directions de ces vitesses. Le point d'application d'une force P, dirigée suivant cette droite, pourra être transporté soit en A', soit en A''. On aura donc

$$P\omega'\cos(\widehat{P,\omega'}) = P\omega''\cos(\widehat{P,\omega''}) \tag{5}$$

et, puisque les angles $(\widehat{P,\omega'})$, $(\widehat{P,\omega''})$ seront égaux, sans être droits, on tirera de la formule (5)

$$\omega' = \omega''. \tag{6}$$

Si la droite $\overline{A'A''}$ était perpendiculaire aux directions de toutes les vitesses, on choisirait hors de cette droite un point quelconque A dont on désignerait la vitesse par ω; puis, en raisonnant comme on vient de le faire, on établirait les équations $\omega' = \omega$, $\omega'' = \omega$, desquelles on tirerait encore $\omega' = \omega''$.

3.° Théorème. *Si, à une époque quelconque du mouvement, un seul point du système invariable a une vitesse nulle, la vitesse d'un second point choisi arbitrairement sera perpendiculaire au rayon vecteur mené du premier point au second, et proportionnelle à ce rayon vecteur.*

Démonstration. Soit O le point unique dont la vitesse est nulle, et ω la vitesse d'un autre point A choisi arbitrairement. Si l'on applique au point O une force P dirigée suivant $\overline{OA}$, son moment virtuel sera nul; et, comme on pourra transporter le point d'application de la force P de O en A, on aura encore, en vertu du théorème établi dans le premier paragraphe,

$$P\omega\cos(\widehat{P,\omega}) = 0; \tag{1}$$

puis l'on en conclura, en observant que les quantités P, ω ne sont pas nulles,

$$\cos(\widehat{P,\omega}) = 0, \qquad (\widehat{P,\omega}) = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Donc l'angle $(\widehat{P,\omega})$ sera droit, et la vitesse ω perpendiculaire au rayon vecteur $\overline{OA}$.

Soit maintenant ω' la vitesse d'un troisième point A'. Cette vitesse sera elle-

même perpendiculaire au rayon vecteur $\overline{OA'}$. Cela posé, appliquons aux points A et O deux forces égales à Q, et formant un couple, dont la première soit dirigée suivant la même droite et dans le même sens que la vitesse ω. La somme des moments virtuels des deux forces du couple se réduira au moment virtuel de la première, et par conséquent au produit

$$Q\omega.$$

Concevons en outre qu'on applique aux points A' et O deux nouvelles forces Q' qui forment un second couple équivalent au premier, et qui soient dirigées suivant des droites perpendiculaires au rayon vecteur $\overline{OA'}$. Les moments linéaires des deux couples devant être égaux, si l'on désigne, pour abréger, par r, r' les rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, on aura nécessairement

(8) $$Q'r' = Qr.$$

D'ailleurs la somme des moments virtuels des forces du second couple, savoir

$$Q'\omega'\cos(\widehat{Q',\omega'}) = \pm Q'\omega'$$

devra être égale à la somme des moments virtuels des forces du premier. On aura donc aussi

(9) $$Q'\omega'\cos(\widehat{Q',\omega'}) = \pm Q'\omega' = Q\omega,$$

et par suite

(10) $$\cos(\widehat{Q',\omega'}) = 1, \quad \text{ou} \quad (\widehat{Q',\omega'}) = 0,$$

(11) $$Q'\omega' = Q\omega.$$

Or, il résulte de l'équation (10) que la vitesse ω' est dirigée dans le sens de la force Q'. Donc les vitesses ω, ω' sont dirigées, ainsi que les forces Q et Q', de manière à faire tourner dans le même sens, autour du centre O, les deux points A et A'; ce qu'il était aisé de prévoir. Quant à la formule (11), si on la combine avec la formule (8), on en tirera immédiatement

(12) $$\frac{\omega'}{r'} = \frac{\omega}{r}.$$

Donc les vitesses des points A et A' sont, non-seulement perpendiculaires aux rayons vecteurs r, r', mais encore proportionnelles à ces rayons vecteurs.

Dans le mouvement que nous venons de considérer, la vitesse d'un point placé à l'unité de distance du centre O, est ce qu'on nomme la *vitesse angulaire* du système invariable autour de ce même centre. Si l'on désigne la vitesse angulaire par $\varkappa$, la vitesse du point A, situé à l'extrémité du rayon vecteur r, sera déterminée par la formule $\frac{\omega}{r} = \varkappa$, ou

$$(13) \qquad \omega = r\varkappa .$$

Les théorêmes 1, 2 et 3 indiquent toutes les relations qui peuvent exister entre les vitesses de points matériels liés invariablement les uns aux autres, et compris dans un plan fixe dont ils ne doivent jamais sortir. Ces théorêmes prouvent que les vitesses dont il s'agit sont toujours celles que présenterait le système pris dans l'état de repos, ou transporté parallèlement à un axe fixe, ou tournant autour d'un centre fixe. Ajoutons 1.° que le mouvement de translation parallèlement à un axe fixe, se déduit du mouvement de rotation autour d'un centre fixe, quand ce centre s'éloigne à une distance infinie de l'origine des coordonnées, 2.° que le centre de rotation est un point dont la position, déterminée à chaque instant, varie en général d'un moment à l'autre dans le plan que l'on considère. C'est pour cette raison que nous désignerons le point dont il s'agit sous le nom de *centre instantané* de rotation.

Nous terminerons ce paragraphe en indiquant quelques propriétés remarquables du centre instantané de rotation d'une surface plane d'une étendue indéfinie, et dont les points, liés invariablement les uns aux autres, se meuvent sans sortir d'un certain plan. Nous observerons d'abord qu'à la fin d'un temps désigné par t, les différents points de la surface mobile occuperont dans l'espace des positions déterminées, et que l'un d'eux, le point O, par exemple, sera le centre instantané de rotation. De plus, il est clair qu'à cette époque on pourra faire passer par le point O deux courbes distinctes tracées de manière à comprendre la première tous les points de la surface mobile, et la seconde tous les points de l'espace, qui deviendront plus tard des centres instantanés de rotation. Cela posé, soit A le point de la première courbe qui deviendra centre de rotation à la fin du temps $t+\Delta t$, en s'appliquant sur un point correspondant de la seconde courbe désigné par B. Soit d'ailleurs Δs l'arc OA mesuré sur la première courbe, et regardé comme l'accroissement d'un arc fini s aboutissant au point A. Si l'on considère la quantité Δt comme infiniment petite du premier ordre, l'arc AB que le point A aura parcouru, pendant l'instant Δt, pour arriver à la position B, sera évidemment une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier. En effet, pour le démontrer, il suffira de faire voir que le rapport de ce dernier arc à Δt est une quantité infiniment petite. Or, ce rapport représente précisément une moyenne entre les diverses valeurs que prend la vitesse du point A pendant l'instant Δt; et par conséquent il a pour mesure le produit qu'on

obtient en multipliant une valeur moyenne de la vitesse angulaire par une valeur moyenne de la distance infiniment petite qui, à cette époque du mouvement, sépare le point A du centre de rotation. L'arc AB sera donc une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, tandis que l'arc OA ou Δs sera en général une quantité infiniment petite du premier ordre. Il est aisé d'en conclure que les arcs OA, OB, comptés à partir du point O sur les deux courbes ci-dessus mentionnées, auront pour différence une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier. Donc ces deux courbes seront tangentes l'une à l'autre [voyez le tome I.er, pag. 177 et suiv.], et le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ne variera pas sensiblement quand on y remplacera l'arc OA ou Δs par l'arc OB. Donc, si l'on désigne par v la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, c'est-à-dire, si l'on fait

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{14}$$

v exprimera tout à-la-fois la vitesse avec laquelle le centre instantané de rotation se déplace, en passant d'un point à un autre, sur la surface mobile, et la vitesse avec laquelle le même centre change de position dans l'espace. Ajoutons que la première courbe, entraînée par le mouvement de la surface sur laquelle elle est tracée, parcourra une portion de l'espace qui aura pour enveloppe la seconde courbe; et que, si l'instant Δt acquiert une valeur finie, les arcs correspondants OA, OB, mesurés sur les deux courbes, offriront pour différence une longueur infiniment petite, non plus du second ordre, mais du premier, c'est-à-dire qu'ils seront égaux entre eux.

Dans le cas particulier où l'une des courbes que l'on vient de considérer se réduit à un point, on doit en dire autant de l'autre. Alors la quantité ci-dessus désignée par v s'évanouit, et le centre instantané de rotation conserve toujours la même position non-seulement dans l'espace, mais encore sur la surface mobile.

---

§ 3. *Sur le mouvement d'un système de points matériels, placés arbitrairement dans l'espace, et liés invariablement les uns aux autres.*

Considérons un système invariable de points matériels qui, au lieu d'être renfermés dans un plan, soient distribués arbitrairement dans l'espace, et se meuvent d'une manière quelconque. Alors, à la place des théorêmes 1 et 3 du § 2, on obtiendra immédiatement les propositions que nous allons énoncer.

1.er Théorême. *Si, à une époque quelconque du mouvement, trois points du système invariable, non situés sur une même droite, ont des vitesses nulles, les vitesses de tous les autres points se réduiront à zéro.*

Démonstration. Ce théorème, qui est évident par lui-même, quand les trois points donnés ont des vitesses constamment nulles, c'est-à-dire quand ils demeurent en repos, peut être démontré dans tous les cas à l'aide des considérations suivantes.

Soient A', A'', A''' les points non situés en ligne droite, dont on suppose les vitesses nulles, et ω la vitesse d'un quatrième point A choisi arbitrairement. Si l'on applique à ce dernier point une force P dirigée d'une manière quelconque, on pourra généralement la décomposer en trois autres forces P', P'', P''' dirigées suivant les droites $\overline{AA'}$, $\overline{AA''}$, $\overline{AA'''}$. D'ailleurs, ces droites étant invariables, on pourra supposer la force P' appliquée au point A', la force P'' au point A'', la force P''' au point A''', et alors la somme des moments virtuels de ces trois forces s'évanouira. Donc la force P, équivalente au système des trois autres, devra elle-même fournir un moment virtuel égal à zéro. On aura donc

$$(1) \qquad P\omega\cos(\widehat{P,\omega})=0,$$

quelles que soient les valeurs des quantités P, $(\widehat{P,\omega})$, et par conséquent

$$(2) \qquad \omega=0.$$

La démonstration précédente ne serait plus applicable, si le point A était situé dans le plan du triangle $A'A''A'''$. Mais alors il suffirait de remplacer la force P par trois forces parallèles P', P'', P''' respectivement appliquées aux points A', A'', A''' pour démontrer, comme on vient de le faire, les équations (1) et (2), et l'on reconnaîtrait encore par ce moyen que, dans l'hypothèse admise, la vitesse du point A se réduit à zéro.

2.° Théorème. *Supposons qu'à une époque quelconque du mouvement deux points du système invariable aient des vitesses nulles, et que tous les points situés hors de la droite qui joint les deux premiers aient des vitesses différentes de zéro. On pourra dès lors affirmer, 1.° que les vitesses des divers points situés sur la droite dont il s'agit se réduisent à zéro; 2.° que la vitesse d'un point choisi arbitrairement hors de la même droite est non-seulement perpendiculaire au plan qui renferme tout à-la-fois le point et la droite, et par conséquent à leur plus courte distance* r, *mais encore proportionnelle à la longueur* r.

Démonstration. Soient O', O'' les deux points dont on suppose les vitesses nulles, et ω la vitesse d'un troisième point O choisi arbitrairement sur la droite $\overline{O'O''}$. Il suffira d'appliquer à ce troisième point une force P dirigée d'une manière quelconque, puis de remplacer la force P par deux forces parallèles appliquées aux points

O', O'', et d'avoir égard au théorême énoncé dans le premier paragraphe, pour établir les équations (1) et (2), dont la seconde exprime que la vitesse du point O se réduit à zéro.

Concevons à présent que l'on désigne par ω, non plus la vitesse d'un point situé sur la droite $\overline{O'O''}$, mais la vitesse d'un point A situé hors de cette droite. Si l'on applique à ce point une force P dont la direction soit comprise dans le plan $O'O''A$, on pourra décomposer la force P en deux autres forces P', P'' dirigées suivant les droites $\overline{AO'}$, $\overline{AO''}$. D'ailleurs, ces droites étant invariables, on pourra supposer la force P' appliquée au point O', la force P'' au point O'', et alors la somme des moments virtuels de ces deux forces s'évanouira. Donc la force P, équivalente au système des deux autres, devra elle-même fournir un moment virtuel égal à zéro, en sorte qu'on aura

$$P\omega\cos(\widehat{P,\omega}) = 0. \tag{1}$$

Donc, puisque les quantités ω, P sont, par hypothèse, différentes de zéro, l'on aura encore

$$\cos(\widehat{P,\omega}) = 0, \qquad \text{ou} \qquad (\widehat{P,\omega}) = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Cette dernière condition devant être remplie, quelle que soit la droite comprise dans le plan $AO'O''$ et suivant laquelle on suppose dirigée la force P, on peut affirmer que la direction de la vitesse ω sera perpendiculaire à toutes les droites renfermées dans ce plan, et par conséquent au plan lui-même.

Soit maintenant ω' la vitesse d'un nouveau point A', situé, comme le point A, hors de la droite $\overline{O'O''}$. La vitesse ω' sera perpendiculaire au plan $A'O'O''$. Soient d'ailleurs B, B' les points où la droite $\overline{O'O''}$ est rencontrée par les perpendiculaires abaissées sur elle des points A, A'; et désignons par r, r' les longueurs $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, qui mesurent les plus courtes de ces points à la droite $\overline{OO'}$. Enfin, appliquons aux extrémités de la droite $\overline{AB}$ deux forces égales à Q, et formant un couple, dont la première soit dirigée suivant la même droite et dans le même sens que la vitesse ω; puis aux extrémités de la droite $\overline{A'B'}$ deux forces égales à Q, et formant un autre couple, dont la première soit dirigée suivant la même droite que la vitesse ω'. Si les deux couples deviennent équivalents, leurs moments linéaires seront égaux, ainsi que les moments virtuels des forces Q et Q' respectivement appliquées aux points A et A'. On aura donc alors

$$Q'r' = Qr, \tag{4}$$

(5) $$Q'\omega'\cos(\widehat{Q'\omega'}) = \pm Q'\omega' = Q\omega\,;$$

et par suite

(6) $$\cos(\widehat{Q',\omega'}) = 1, \qquad \text{ou} \qquad (\widehat{Q'\omega'}) = 0,$$

(7) $$Q'\omega' = Q\omega,$$

(8) $$\frac{\omega'}{r'} = \frac{\omega}{r}.$$

Il résulte de l'équation (6) que la vitesse ω' est dirigée dans le même sens que la force Q'. Donc les vitesses ω, ω' sont dirigées, ainsi que les forces Q et Q', de manière à faire tourner dans le même sens, autour du centre O, les deux points A et A'; ce qu'il était aisé de prévoir. Quant à la formule (8), elle exprime que les vitesses des points A, A' sont proportionnelles aux plus courtes distances de ces points à la droite $\overline{O'O''}$.

Dans le mouvement que nous venons de considérer, les vitesses des différents points du système invariable ont entre elles les mêmes relations que si, la droite $\overline{OO'}$ étant fixe, le système tournait autour de cette droite. On désigne pour cette raison la droite $\overline{OO'}$ sous le nom d'*axe instantané de rotation*, et l'on nomme *vitesse angulaire* du système la vitesse d'un point placé à l'unité de distance de cet axe. Si l'on représente par ϖ cette vitesse angulaire, la vitesse d'un autre point A, situé à la distance r de l'axe $\overline{OO'}$, sera déterminée par la formule

(9) $$\omega = r\varpi.$$

Si nous n'avons pas examiné dans ce paragraphe le cas où un seul point du système invariable aurait une vitesse nulle, c'est que ce cas ne peut jamais se présenter quand le système invariable a plus de deux dimensions. Supposons en effet que le point O ait une vitesse nulle; soit ω la vitesse d'un autre point A choisi arbitrairement, et appliquons à ce dernier point une force P dirigée suivant la droite $\overline{AO}$. Le moment virtuel de cette force devra conserver la même valeur quand on transportera le point d'application de A en O. On aura en conséquence

(1) $$P\omega\cos(\widehat{P,\omega}) = 0,$$

et l'on en conclura

(2) $$\omega = 0,$$

ou

$$(3) \qquad \cos(\widehat{P,\omega}) = 0\,, \qquad (\widehat{P,\omega}) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Donc la vitesse du point A sera nulle ou perpendiculaire au rayon vecteur $\overline{OA}$. Cela posé, soient A', A'' deux nouveaux points du système invariable tellement choisis que le plan $AA'A''$ ne renferme pas le point O; et désignons par ω', ω'' les vitesses des points A', A''. Si les trois vitesses ω, ω', ω'' diffèrent de zéro, elles seront respectivement perpendiculaires aux trois rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, $\overline{OA''}$; et la vitesse ω ne pourra être parallèle aux deux autres, puisque les trois rayons vecteurs ne sont pas compris dans un même plan. Admettons, pour fixer les idées, que des deux vitesses ω', ω'' la première ω' ne soit pas parallèle à ω. Les plans menés par les points A, A' perpendiculairement aux directions de ces vitesses se couperont suivant un axe qui passera par le point O; et, si l'on nomme C un second point de cet axe, une force R appliquée au point C pourra être décomposée en trois autres forces Q, Q', Q'' respectivement dirigées suivant les droites $\overline{CA}$, $\overline{CA'}$, $\overline{CO}$. D'ailleurs, ces droites étant invariables, on pourra supposer la force Q appliquée au point A, la force Q' au point A', la force Q''' au point O dont la vitesse est nulle, et alors la somme des moments virtuels de ces trois dernières forces se trouvera réduite au binome

$$Q\omega\cos(\widehat{Q,\omega}) + Q'\omega'\cos(\widehat{Q',\omega'})\,,$$

c'est-à-dire à zéro, puisque $(\widehat{Q,\omega})$, $(\widehat{Q',\omega'})$ seront évidemment deux angles droits. Donc la force R, équivalente au système des trois autres, devra elle-même fournir un moment virtuel nul; et, comme cette force est arbitraire en grandeur ainsi qu'en direction, il faudra nécessairement que la vitesse du point C auquel on la suppose appliquée se réduise à zéro.

On peut donc affirmer que, dans le mouvement d'un système invariable, quand la vitesse d'un point se réduit à zéro, d'autres points ont pareillement des vitesses nulles. Dans ce cas, les relations qui existent entre les différentes vitesses sont celles qu'indique le théorème 2. Alors aussi la vitesse d'un point pourra être complètement déterminée, non-seulement en grandeur, mais encore en direction, si l'on connaît les coordonnées de ce point, la direction de l'axe instantané de rotation, et le sens dans lequel le corps tourne autour de cet axe, avec la vitesse angulaire. En effet, soient, pour un instant donné, $\varkappa$ cette dernière vitesse, ξ, η, ζ les coordonnées d'un point O situé sur l'axe instantané de rotation, x, y, z les coordonnées d'un point A placé à la distance r du même axe, ω la vitesse du point A, enfin α, β, γ et λ, μ, ν les

angles que forment avec les demi-axes des coordonnées positives, 1.° la direction de la vitesse ω, 2.° l'axe instantané de rotation prolongé, à partir du point O, dans une direction $\overline{OO'}$ telle que la vitesse ω produise autour de $\overline{OO'}$ un mouvement de rotation de droite à gauche. Concevons d'ailleurs que la vitesse ω soit représentée par une longueur $\overline{AB}$ portée sur sa direction à partir du point A, et la vitesse angulaire ϖ par une autre longueur $\overline{OC}$ comptée à partir du point O dans la direction $\overline{OO'}$. On pourra, en prenant un point quelconque de l'espace pour centre des moments, construire ce que nous nommerons les *moments linéaires des vitesses* ω *et* ϖ, c'est-à-dire, les moments linéaires de deux forces $\overline{AB}$, $\overline{OC}$ qui seraient représentées par les mêmes droites que ces vitesses. Cela posé, il est clair que, si l'on place le centre des moments au point A, la vitesse ω, mesurée par le produit $r\varpi$, et dirigée suivant un demi-axe perpendiculaire au plan AOO' coïncidera en grandeur et en direction avec le moment linéaire de la vitesse angulaire ϖ. Donc les projections algébriques de la vitesse ϖ sur les axes coordonnés seront équivalentes aux projections algébriques du moment linéaire de la vitesse ϖ, c'est-à-dire, aux trois produits

$$\varpi[(\eta-y)\cos\nu-(\zeta-z)\cos\mu], \quad \varpi[(\zeta-z)\cos\lambda-(\xi-x)\cos\nu], \quad \varpi[(\xi-x)\cos\mu-(\eta-y)\cos\lambda],$$

de sorte qu'on aura

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega\cos\alpha &= \varpi[(\eta-y)\cos\nu-(\zeta-z)\cos\mu], \\ \omega\cos\beta &= \varpi[(\zeta-z)\cos\lambda-(\xi-x)\cos\nu], \\ \omega\cos\gamma &= \varpi[(\xi-x)\cos\mu-(\eta-y)\cos\lambda]. \end{aligned} \right.$$

Si le point O était l'origine même des coordonnées, les formules (10) se réduiraient aux suivantes

$$(11) \quad \omega\cos\alpha = -\varpi(y\cos\nu-z\cos\mu), \quad \omega\cos\beta = -\varpi(z\cos\lambda-x\cos\nu), \quad \omega\cos\gamma = -\varpi(x\cos\mu-y\cos\lambda).$$

Lorsqu'un corps solide, retenu par un point fixe O, vient à se mouvoir, la vitesse de ce point étant toujours nulle, le corps, en vertu de ce qui précède, ne peut que tourner à chaque instant autour d'un certain axe passant par le point dont il s'agit. Mais la position de cet axe varie en général d'un instant à l'autre dans le corps et dans l'espace. Cela posé, concevons qu'au bout du temps t, l'axe instantané de rotation rencontre aux points C et D la surface décrite du point O comme centre avec un rayon équivalent à l'unité. A cette époque, les points C, D, situés aux deux extrémités d'un même diamètre, seront les *centres instantanés de rotation* de la surface sphérique; et il est clair que par chacun de ces points on pourra faire passer deux

courbes tracées sur la surface sphérique de manière à comprendre, la première tous les points du corps, et la seconde tous les points de l'espace, qui deviendront plus tard, à la place du point C ou D, des centres instantanés de rotation de la même surface. Or, désignons par A le point du corps qui, au bout du temps $t+\Delta t$, deviendra centre de rotation de la surface sphérique, à la place du point C; et nommons B le point de l'espace sur lequel, à cette époque, le point A viendra s'appliquer. Si l'on considère Δt comme un infiniment petit du premier ordre, les arcs CA, CB, mesurés à partir du point C sur les deux courbes qui passent par ce point, seront en général des infiniment petits du même ordre; mais l'arc AB, que le point A sera obligé de parcourir avant de s'appliquer sur le point B, sera une quantité infiniment petite d'un ordre plus élevé. Car le rapport de ce dernier arc à l'instant Δt, ou la vitesse moyenne du point A pendant cet instant, sera une quantité très-petite, attendu que le point A restera très-voisin du centre instantané de rotation depuis la fin du temps t jusqu'à la fin du temps $t+\Delta t$. Donc, à plus raison, la distance $\overline{AB}$, comprise entre les extrémités des arcs CA, CB, sera une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier. Il en résulte immédiatement, 1.° que les deux courbes menées par le point C seront tangentes l'une à l'autre, 2.° que des arcs correspondants, mesurés sur ces deux courbes à partir du point C, donneront pour différence, s'ils sont infiniment petits du premier ordre, une quantité infiniment petite d'un ordre plus élevé; et, s'ils sont finis, une quantité infiniment petite, c'est-à-dire nulle. Soit Δs l'un de ces mêmes arcs, considéré comme accroissement d'un arc fini s aboutissant au point C. Si l'on désigne par v la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, c'est-à-dire, si l'on fait

$$v=\frac{ds}{dt}. \tag{12}$$

v exprimera tout à-la-fois la vitesse avec laquelle chacun des centres instantanés de rotation se déplace sur la surface sphérique, et la vitesse avec laquelle il se déplace dans l'espace. Ajoutons que la courbe CA, entraînée par le mouvement de la surface sphérique sur laquelle elle est tracée, prendra successivement diverses positions, dans lesquelles elle se trouvera enveloppée par la courbe CB.

On serait encore parvenu à des résultats du même genre, si la surface sphérique, au lieu d'avoir pour rayon l'unité de longueur, avait été décrite, du point O comme centre, avec un rayon quelconque. Cela posé, on déduira sans peine des principes ci-dessus établis la proposition suivante.

3.° Théorème. *Concevons qu'un corps solide, retenu par un point fixe, se meuve d'une manière quelconque autour de ce point. Supposons d'ailleurs qu'à un instant*

donné on trace, 1.° dans le corps, 2.° dans l'espace, les différentes droites avec lesquelles coïncidera successivement l'axe instantané de rotation. Tandis que la surface conique, qui aura pour génératrices les droites tracées dans le corps solide, sera entraînée par le mouvement du corps, elle touchera constamment la surface conique qui aura pour génératrices les droites tracées dans l'espace, et par conséquent la seconde surface ne sera autre chose que l'enveloppe de la portion de l'espace parcourue par la première.

Admettons maintenant qu'une droite mobile, assujettie à passer par le point O, suive l'axe instantané de rotation dans ses positions successives. La quantité v, déterminée par la formule (12), représentera évidemment la vitesse angulaire avec laquelle cette droite tournera autour du point O en changeant de position, soit dans le corps, soit dans l'espace.

Lorsqu'une des surfaces coniques mentionnées dans le théorème 3 se réduit à une droite, on doit en dire autant de l'autre surface. Alors la quantité v s'évanouit, et l'axe instantané de rotation conserve toujours la même position, non-seulement dans l'espace, mais encore dans le corps solide. On peut donc énoncer le théorème suivant.

4.° Théorème. *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème 3, si l'axe instantané de rotation devient fixe de position dans le corps solide, il sera fixe dans l'espace, et réciproquement.*

On peut remarquer que la première partie du 4.° théorème est évidente par elle même. Car, lorsque les mêmes points du corps se trouvent constamment sur l'axe de rotation, chacun de ces points a constamment une vitesse nulle, et demeure en conséquence immobile dans l'espace.

Il reste maintenant à faire connaître les relations qui peuvent exister entre les vitesses des différents points d'un système invariable ou d'un corps solide, quand toutes ces vitesses diffèrent de zéro. Pour y parvenir, nous commencerons par établir une proposition auxiliaire dont voici l'énoncé.

5.° Théorème. *Supposons que deux points matériels A, A' se meuvent dans l'espace d'une manière quelconque, et qu'un observateur, placé sur le point A', détermine, pour un instant donné, la vitesse apparente du point A. La vitesse absolue de celui-ci sera représentée, non-seulement en grandeur, mais encore en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur la vitesse apparente, et sur une longueur égale et parallèle à la vitesse absolue du point A'.*

Démonstration. Rapportons les positions de tous les points de l'espace à trois axes fixes qui se coupent à angles droits; et désignons, au bout du temps t, par x, y, z les coordonnées du point A, par $x', y'\ z'$ celles du point A'. Soient, à la même époque,

(13) $$r = \sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}$$

la distance des points A, A'; ω, ω' leurs vitesses absolues, représentées par des longueurs $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ portées sur les directions de ces vitesses; et α, β, γ; α', β', γ' les angles que forment ces directions avec les demi-axes des coordonnées positives. Les projections algébriques des vitesses absolues ω, ω' seront

(14) $$\omega \cos\alpha = \frac{dx}{dt}, \qquad \omega \cos\beta = \frac{dy}{dt}, \qquad \omega \cos\gamma = \frac{dz}{dt},$$

et

(15) $$\omega' \cos\alpha' = \frac{dx'}{dt}, \qquad \omega' \cos\beta' = \frac{dy'}{dt}, \qquad \omega' \cos\gamma' = \frac{dz'}{dt}.$$

Concevons d'ailleurs qu'un observateur, placé sur le point A', mesure à chaque instant le rayon vecteur r mené du point A' au point A, et les angles formés par ce rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées positives, ou plutôt avec trois demi-axes parallèles menés par le point A'. Les angles dont il s'agit seront ceux dont les cosinus sont équivalents aux trois fractions

(16) $$\frac{x-x'}{r}, \qquad \frac{y-y'}{r}, \qquad \frac{z-z'}{r};$$

et l'observateur aura tous les éléments nécessaires pour déterminer, non pas le mouvement absolu du point A dans l'espace, mais le mouvement relatif ou apparent de ce point autour du point A' considéré comme immobile, c'est-à-dire, 1.° la courbe que le point A, vu du point A', semblera décrire, 2.° l'intensité et la direction de la vitesse apparente du point A, ou, ce qui revient au même, les trois quantités

(17) $$\frac{d(x-x')}{dt}, \qquad \frac{d(y-y')}{dt}, \qquad \frac{d(z-z')}{dt},$$

qui représenteront les projections algébriques de la vitesse apparente. Cela posé, admettons que l'on porte à partir du point A, et sur la direction de sa vitesse apparente, une longueur $\overline{AE}$ propre à représenter cette même vitesse; puis, sur un demi-axe parallèle à $\overline{A'B'}$, une longueur $\overline{AF} = \overline{A'B'}$. Les trois longueurs $\overline{AB}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$, étant projetées sur les axes des x, y et z, donneront pour projections algébriques les quantités (14), (15), (17); et, comme les équations

(18) $$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{d(x-x')}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} + \frac{d(y-y')}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} + \frac{d(z-z')}{dt},$$

qui subsistent évidemment entre ces quantités, sont entièrement semblables aux équations qui ont lieu entre les projections algébriques de deux forces appliquées à un point unique et de leur résultante, on peut affirmer que la première longueur sera la diagonale du parallélogramme construit sur les deux autres.

Ces principes étant établis, considérons un système invariable ou un corps solide qui se meuve d'une manière quelconque dans l'espace. Soient, au bout du temps t, Ω la vitesse d'un point O choisi arbitrairement dans le corps solide, et a, b, c les angles formés par la direction de la vitesse Ω avec les demi-axes des coordonnées positives. Concevons de plus qu'un observateur, placé au point O, détermine le mouvement apparent du corps autour de ce point regardé comme immobile. Ce mouvement apparent ne pourra être, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, qu'un mouvement de rotation autour d'un axe instantané passant par le point O. Soient λ, μ, ν les angles que forme cet axe, prolongé à partir du point O dans une direction telle que le corps tourne autour de lui de droite à gauche, avec les demi-axes des coordonnées positives; et désignons par ϖ la vitesse angulaire du corps solide dans le mouvement de rotation apparent. Enfin, représentons toujours par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque A de ce même corps. Pour l'observateur placé au point O, les projections algébriques de la vitesse apparente du point A seront respectivement

$$(19)\quad \varpi[(\eta-y)\cos\nu-(\zeta-z)\cos\mu],\quad \varpi[(\zeta-z)\cos\lambda-(\xi-x)\cos\nu],\quad \varpi[(\xi-x)\cos\mu-(\eta-y)\cos\lambda],$$

Donc, en vertu du théorème 5, la vitesse absolue ω du point A, et les angles α, β, γ, que formera la direction de cette vitesse avec les demi-axes des coordonnées positives, seront déterminés par les équations

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \omega\cos\alpha &= \Omega\cos a+\varpi(\eta\cos\nu-\zeta\cos\mu)-\varpi y\cos\nu+\varpi z\cos\mu,\\ \omega\cos\beta &= \Omega\cos b+\varpi(\zeta\cos\lambda-\xi\cos\nu)-\varpi z\cos\lambda+\varpi x\cos\nu,\\ \omega\cos\gamma &= \Omega\cos c+\varpi(\xi\cos\mu-\eta\cos\lambda)-\varpi x\cos\mu+\varpi y\cos\lambda. \end{aligned}\right.$$

Les valeurs précédentes de $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$, c'est-à-dire, les projections algébriques de la vitesse absolue du point A sont nécessairement indépendantes de la position du point O. Elles devront donc rester invariables, tandis qu'on fera varier le point O, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux coordonnées x, y, z. Il en résulte que les coefficients de x, y, z, dans les seconds membres des équations (20), et par conséquent les trois produits

$$(21)\qquad \varpi\cos\lambda,\qquad \varpi\cos\mu,\qquad \varpi\cos\nu$$

ne changeront pas de valeurs, si l'on remplace le point O par un autre. Donc, au bout d'un temps quelconque t, *la vitesse angulaire* ϖ, *et les angles* λ, μ, ν,

qui déterminent la direction de l'axe instantané dans le mouvement de rotation apparent; sont des quantités indépendantes de la position de l'observateur. La première de ces quantités est ce que nous nommerons la *vitesse instantanée de rotation* du corps solide.

Supposons à présent que le point O coïncide, au bout du temps t, avec l'origine même des coordonnées. On aura, dans ce cas, $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, et les formules (20) se réduiront à

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega\cos\alpha &= \Omega\cos a - v(y\cos\nu - z\cos\mu), \\ \omega\cos\beta &= \Omega\cos b - v(z\cos\lambda - x\cos\nu), \\ \omega\cos\gamma &= \Omega\cos c - v(x\cos\mu - y\cos\lambda). \end{aligned}\right.$$

Soient d'ailleurs δ, Δ les angles que forment les directions des vitesses ω, Ω avec la direction de l'axe instantané de rotation. On aura évidemment

$$(23)\qquad \cos\delta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

$$(24)\qquad \cos\Delta = \cos a\cos\lambda + \cos b\cos\mu + \cos c\cos\nu,$$

et l'on tirera des formules (22), respectivement multipliées par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$,

$$(25)\qquad \omega\cos\delta = \Omega\cos\Delta.$$

Cette dernière équation prouve que *la vitesse absolue d'un point quelconque A du corps solide, étant projetée sur la direction d'un axe instantané de rotation, fournit une projection constante, c'est-à-dire indépendante de la position du point A.* On en conclut que la vitesse ω obtiendra la plus petite valeur possible, lorsque sa direction sera parallèle à celle des axes de rotation. Or, cette condition sera remplie, quand les coordonnées x, y, z vérifieront la formule

$$(26)\qquad \frac{\Omega\cos a - v(y\cos\nu - z\cos\mu)}{\cos\lambda} = \frac{\Omega\cos b - v(z\cos\lambda - x\cos\nu)}{\cos\mu} = \frac{\Omega\cos c - v(x\cos\mu - y\cos\lambda)}{\cos\nu},$$

que l'on peut remplacer par les équations

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega\cos a - v(y\cos\nu - z\cos\mu) &= \Omega\cos\Delta.\cos\lambda, \\ \Omega\cos b - v(z\cos\lambda - x\cos\nu) &= \Omega\cos\Delta.\cos\mu, \\ \Omega\cos c - v(x\cos\mu - y\cos\lambda) &= \Omega\cos\Delta.\cos\nu, \end{aligned}\right.$$

et qui représente une droite dont chaque point est animé d'une vitesse dirigée suivant l'axe instantané de rotation que fournirait le mouvement apparent autour de ce point. La droite dont il s'agit ici est ce que nous appellerons *l'axe instantané de rotation du corps solide*, et la vitesse de chacun des points situés sur cet axe sera *la vitesse instantanée de translation du même corps.* Dorénavant nous désignerons par v cette dernière vitesse. Si l'axe instantané de rotation du corps solide passait, non par le point (x, y, z), mais par le point (ξ, η, ζ), on aurait nécessairement, dans la formule (25),

$$\Omega = v, \qquad \cos\Delta = \pm 1; \tag{28}$$

et la vitesse ω d'un point (x, y, z), situé hors de l'axe instantané, vérifierait l'équation

$$\omega \cos\delta = \pm v, \tag{29}$$

le double signe $\pm$ devant être réduit tantôt au signe $+$, tantôt au signe $-$, selon que le mouvement de rotation s'exécuterait de droite à gauche, ou de gauche à droite, autour de l'axe instantané prolongé dans le sens de la vitesse v.

On pourrait au reste établir, sans calcul, la plupart des résultats que nous venons d'énoncer, à l'aide des considérations suivantes.

Soient $\overline{OO'}$ l'axe instantané de rotation que fournit, au bout du temps t, le mouvement apparent du corps autour d'un point donné O. Pour déterminer en grandeur et en direction la vitesse absolue d'un point A situé hors de cet axe, il suffira [voyez le théorème 5] de chercher la diagonale du parallélogramme construit sur la vitesse apparente du point A, et sur une droite égale et parallèle à la vitesse du point O. Il en résulte, 1.° que tous les points situés sur une droite parallèle à l'axe $\overline{OO'}$ seront animés de la même vitesse absolue, 2.° que la direction de cette vitesse absolue sera parallèle à l'axe $\overline{OO'}$, et dirigée suivant la droite elle-même, si cette droite a été choisie de manière que la vitesse apparente de chacun de ses points soit égale et parallèle à la projection de la vitesse absolue du point O sur un plan perpendiculaire à l'axe $\overline{OO'}$, mais dirigée en sens inverse.

Il suit encore de ces considérations que les vitesses absolues de tous les points du corps solide, au bout du temps t, seront complètement déterminées, quand on connaîtra la position de l'axe instantané de rotation de ce même corps, ainsi que les deux vitesses instantanées de rotation et de translation. Cette remarque entraîne évidemment la proposition suivante.

6.° Théorème. *Quelle que soit la nature du mouvement d'un corps solide, les relations existantes entre les différents points seront toujours celles qui auraient lieu, si le corps était retenu de manière à pouvoir seulement tourner autour d'un axe fixe, et glisser le long de cet axe.*

Si, pour fixer les idées, on suppose que l'axe instantané de rotation passe, au bout du temps t, par le point dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, on déduira facilement des équations (20) la grandeur et la direction de la vitesse ω d'un autre point choisi arbitrairement dans le corps solide, et correspondant aux coordonnées x, y, z. En effet, pour y parvenir, il suffira de poser, dans les formules (20), $\Omega = \upsilon$, et de plus

(30) $$\cos a = \cos\lambda, \qquad \cos b = \cos\mu, \qquad \cos c = \cos\nu,$$

ou bien

(31) $$\cos a = -\cos\lambda, \qquad \cos b = -\cos\mu, \qquad \cos c = -\cos\nu,$$

suivant que le mouvement de rotation du corps solide s'effectuera de droite à gauche, ou de gauche à droite, autour de l'axe instantané de rotation prolongé dans la direction de la vitesse υ. Par conséquent on trouvera, dans la première supposition,

(32) $$\left\{\begin{aligned} \omega\cos\alpha &= \upsilon\cos\lambda + \varpi[(\eta-y)\cos\nu-(\zeta-z)\cos\mu], \\ \omega\cos\beta &= \upsilon\cos\mu + \varpi[(\zeta-z)\cos\lambda-(\xi-x)\cos\nu], \\ \omega\cos\gamma &= \upsilon\cos\nu + \varpi[(\xi-x)\cos\mu-(\eta-y)\cos\lambda]; \end{aligned}\right.$$

et dans la seconde

(33) $$\left\{\begin{aligned} \omega\cos\alpha &= -\upsilon\cos\lambda + \varpi[(\eta-y)\cos\nu-(\zeta-z)\cos\mu], \\ \omega\cos\beta &= -\upsilon\cos\mu + \varpi[(\zeta-z)\cos\lambda-(\xi-x)\cos\nu], \\ \omega\cos\gamma &= -\upsilon\cos\nu + \varpi[(\xi-x)\cos\mu-(\eta-y)\cos\lambda]. \end{aligned}\right.$$

Lorsque l'axe instantané de rotation du corps solide passe par l'origine même des coordonnées, on peut remplacer par zéro chacune des trois quantités ξ, η, ζ, dans les formules (32) ou (33), dont les trois premières se réduisent à

(34) $$\left\{\begin{aligned} \omega\cos\alpha &= \upsilon\cos\lambda - \varpi y\cos\nu + \varpi z\cos\mu, \\ \omega\cos\beta &= \upsilon\cos\mu - \varpi z\cos\lambda + \varpi x\cos\nu, \\ \omega\cos\gamma &= \upsilon\cos\nu - \varpi x\cos\mu + \varpi y\cos\lambda; \end{aligned}\right.$$

et les trois dernières à

(35) $$\left\{\begin{aligned} \omega\cos\alpha &= -\upsilon\cos\lambda - \varpi y\cos\nu + \varpi z\cos\mu, \\ \omega\cos\beta &= -\upsilon\cos\mu - \varpi z\cos\lambda + \varpi x\cos\nu, \\ \omega\cos\gamma &= -\upsilon\cos\nu - \varpi x\cos\mu + \varpi y\cos\lambda. \end{aligned}\right.$$

Dans les équations (34) et (35), ainsi que dans les formules (29), (32) et (33), υ désigne la vitesse instantanée de translation du corps solide.

Lorsque la quantité ε, c'est-à-dire, la vitesse instantanée de rotation du corps solide se réduit à zéro, on tire des formules (32) ou (33)

$$(36) \qquad \omega = \upsilon,$$

$$(37) \qquad \frac{\cos\alpha}{\cos\lambda} = \frac{\cos\beta}{\cos\mu} = \frac{\cos\gamma}{\cos\nu} = \pm 1.$$

Donc alors tous les points du corps solide ont des vitesses égales et parallèles, comme si le corps était assujetti de manière à pouvoir seulement glisser le long d'un axe fixe, sans tourner autour de cet axe.

Nous terminerons cet article en indiquant quelques propriétés remarquables de l'axe instantané de rotation d'un corps solide. Soit $\overline{OO'}$ la direction de cet axe au bout du temps t. Il est clair qu'à cette époque on pourra faire passer par l'axe $\overline{OO'}$ deux surfaces réglées construites de manière à comprendre toutes les droites, tracées dans le corps ou dans l'espace, qui deviendront plus tard des axes instantanés de rotation. Cela posé, soient $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ deux droites correspondantes, comprises dans les deux surfaces, en sorte que la droite $\overline{AA'}$ doive s'appliquer sur la droite $\overline{BB'}$, en devenant un axe de rotation du corps solide, à la fin du temps $t + \Delta t$. Admettons d'ailleurs, 1.° qu'un plan mené par le point O perpendiculairement à l'axe $\overline{OO'}$ rencontre la droite $\overline{AA'}$ au point A, et la droite $\overline{BB'}$ au point B', 2.° que B soit le point de la seconde droite avec lequel le point A coïncidera, quand la première droite s'appliquera sur la seconde. Enfin soit D la projection du point B sur le plan OAB'. Si l'on considère Δt comme un infiniment petit du premier ordre, la distance $\overline{BB'}$ et les arcs $\overline{OA}$, $\overline{OB'}$, mesurés à partir du point O sur les deux courbes d'intersection du plan OAB' avec les deux surfaces réglées, seront en général des infiniment petits du même ordre. Mais la distance $\overline{DB'}$, et l'arc AD que la projection du point A sur le plan OAB' sera obligée de parcourir avant de s'appliquer sur le point D, seront des quantités infiniment petites d'un ordre plus élevé. En effet, comme la longueur $\overline{BB'}$ sera mesurée sur une droite sensiblement perpendiculaire au plan dont il s'agit, le rapport de la projection $\overline{DB'}$ à $\overline{BB'}$ sera très-petit; et l'on pourra en dire autant du rapport entre l'arc AD et l'instant Δt, attendu que ce dernier rapport représente une moyenne entre les diverses valeurs que reçoit la projection de la vitesse du point A sur le plan OAB', depuis la fin du temps t jusqu'à la fin du temps $t + \Delta t$, et que cette projection reste évidemment très-petite pendant l'instant Δt. Si l'on conservait quelques doutes à cet égard, il

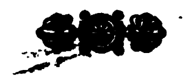
suffirait d'observer que la projection de la vitesse du point A est la diagonale d'un parallélogramme construit sur deux côtés, qui restent très-petits l'un et l'autre pendant l'instant Δt, et qui représentent, 1.° la projection de la vitesse de translation du corps solide sur le plan OAB' sensiblement perpendiculaire à la direction de cette vitesse, 2.° la projection sur le même plan de la vitesse apparente qu'attribuerait au point A un observateur placé en un point de l'axe instantané de rotation. Donc l'arc AD, la distance $\overline{DB'}$, la somme des longueurs AD, $\overline{DB'}$, et, à plus forte raison, la distance $\overline{AB'}$ seront des quantités infiniment petites d'un ordre supérieur au premier. Il est aisé d'en conclure, 1.° que les deux arcs de courbes OA, OB' seront tangents l'un à l'autre, 2.° que les deux surfaces réglées se toucheront suivant la droite $\overline{OO'}$, et que la première surface, entraînée par le mouvement du corps, prendra successivement diverses positions dans lesquelles elle se trouvera enveloppée par la seconde. On peut donc énoncer la proposition suivante.

7.° Théorème. *Concevons qu'un corps solide se meuve d'une manière quelconque dans l'espace, et qu'à un instant donné on trace,* 1.° *dans le corps,* 2.° *dans l'espace, les différentes droites avec lesquelles coïncidera successivement l'axe instantané de rotation de ce corps solide. Tandis que la surface réglée, qui aura pour génératrices les droites tracées dans le corps, sera entraînée par le mouvement de celui-ci, elle touchera constamment la surface réglée qui aura pour génératrices les droites tracées dans l'espace, et par conséquent la seconde surface ne sera autre chose que l'enveloppe de la portion de l'espace parcourue par la première.*

Lorsqu'une des surfaces réglées se réduit à une droite, on doit en dire autant de l'autre surface. Alors l'axe instantané conserve toujours la même position, non-seulement dans l'espace, mais aussi dans le corps solide. On peut donc énoncer encore le théorème suivant.

8.° Théorème. *Les mêmes choses étant posées que dans le* 7.° *théorème, si l'axe instantané de rotation du corps solide devient fixe de position dans le corps, il sera fixe dans l'espace; et réciproquement.*

Il importe d'observer que la première partie du 8.° théorème est évidente. Car, si l'axe instantané de rotation coïncide, pendant toute la durée du moment, avec une seule des droites que l'on peut tracer dans le corps; cette droite, étant constamment animée en ses divers points de vitesses dirigées suivant elle-même, occupera toujours dans l'espace la même place.



SUR LES DIVERSES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz.$$

L'intégrale définie

$$(1) \qquad \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz,$$

que M. Legendre a désignée par la notation $\Gamma(x)$, et qu'il a nommée intégrale Eulérienne de seconde espèce, jouit, comme l'on sait, de plusieurs propriétés remarquables. Ainsi, par exemple, en désignant par n un nombre entier, et par x une quantité positive, on a généralement

$$(2) \quad \Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1), \qquad (3) \quad \Gamma(x+n) = x(x+1)\ldots(x+n-1)\Gamma(x),$$

et, en supposant $x < 1$,

$$(4) \qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

A ces formules, que j'ai rappelées dans le résumé des Leçons données à l'École royale polytechnique, et dont les deux dernières entraînent les équations

$$(5) \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad (6) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}, \qquad (7) \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\ldots\frac{2n-1}{2}\pi^{\frac{1}{2}},$$

on doit joindre encore les suivantes

$$(8) \qquad \Gamma(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}(1+\varepsilon),$$

et

$$(9) \qquad n^{nx}\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)}{\Gamma(nx)} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}.$$

Dans l'équation (8), qui a été donnée par M. Laplace, et qui coïncide, pour des valeurs entières de x, avec la formule (152) du Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, ε désigne un nombre d'autant plus petit que la valeur de x est plus considérable. Quant à la formule (9), M. Legendre l'a établie, dans ses Exercices de calcul intégral, à l'aide d'une intégration double, et en s'appuyant sur les propriétés de la fonction

$$\frac{d^2 l\Gamma(1+x)}{dx^2}.$$

J'observerai ici que la même formule pourrait être déduite des équations (5) et (8). En effet, il résulte évidemment de l'équation (5) que le premier membre de la formule (9) ne varie pas quand on fait croître la valeur de x de l'unité. Donc ce premier membre ne variera pas non plus, si l'on ajoute à la valeur de x autant d'unités que l'on voudra, et si l'on fait croître x par ce moyen au-delà de toute limite. Or, quand la variable x devient infinie, ε s'évanouit dans l'équation (8), en vertu de laquelle le premier membre de la formule (9) se réduit à

$$(10)\qquad (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{n-1}{2}} \left(1+\frac{1}{nx}\right)^{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{2}{nx}\right)^{x+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}} \cdots \left(1+\frac{n-1}{nx}\right)^{x+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

D'ailleurs, si l'on fait, pour abréger,

$$(11)\qquad P=\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{nx}\right)^{x+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}}\cdots\left(1+\frac{n-1}{nx}\right)^{x+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}},$$

et, si l'on a égard à la formule

$$(12)\qquad l\left(1+\frac{m}{nx}\right)=\frac{m}{nx}-\text{etc.},$$

on trouvera, pour des valeurs infinies de x,

$$(13)\qquad l(P)=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{2},\qquad\qquad (14)\qquad P=e^{\frac{n-1}{2}}.$$

En substituant la valeur précédente de P dans l'expression (10), on obtiendra pour résultat le second membre de la formule (9).

Nous terminerons cet article en faisant observer que, pour étendre les équations (3), (4), etc..., au cas où la variable x prend une valeur quelconque, positive ou négative, il suffit de remplacer la formule $\Gamma(x)=\int_0^\infty z^{x-1}e^{-z}dz$ par la formule (16) de la page 60 du premier volume. Alors, si l'on pose successivement

$$x=-r,\qquad x=-r-1,\qquad x=-r-2,\ldots\qquad x=-r-n,$$

r désignant une quantité positive et plus petite que l'unité, on aura

$$(14)\qquad \Gamma(-r)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x^{r+1}}dx,\qquad\qquad \Gamma(-r-1)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}-1+x}{x^{r+2}}dx,\ \text{etc.}$$

et généralement

$$(15)\qquad \Gamma(-r-n)=\int_0^\infty\left\{e^{-x}-\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\ldots\pm\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\right)\right\}\frac{dx}{x^{r+n+1}},$$

SUR LES MOMENTS D'INERTIE.

Considérons un système de points matériels dont les masses soient respectivement $m, m', m'', \ldots$ et représentons par $r, r', r'' \ldots$ les distances de ces points à un certain axe $\overline{OO'}$. La somme

$$mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}\ldots,$$

que nous désignerons, pour abréger, par la notation

$$\Sigma mr^2,$$

sera ce qu'on nomme le *moment d'inertie* du système par rapport à l'axe $\overline{OO'}$. M. Binet a proposé d'étendre la même dénomination au cas où l'on suppose que $r, r', r'' \ldots$ représentent les distances des points matériels à un plan fixe, et d'admettre que, dans cette supposition, Σmr^2 est le moment d'inertie du système par rapport au plan dont il s'agit. De plus, il a prouvé qu'on peut toujours construire, autour d'un point donné, un ellipsoïde dont ce point soit le centre, et dont chaque diamètre soit équivalent au au double de la racine carrée du moment d'inertie du système par rapport au plan conjugué à ce diamètre. Nous allons faire voir, dans cet article, que les moments d'inertie du système, par rapport à différents axes menés par un même point, peuvent être facilement déterminés, à l'aide d'un second ellipsoïde dont la construction fournit le moyen le plus simple de comparer entre eux ces moments d'inertie, et d'établir l'existence des trois droites désignées sous le nom d'*axes principaux*.

Soient A, A', etc... les différents points matériels dont les masses ont été représentées par $m, m', m'' \ldots$; et

$$K = \Sigma mr^2 \tag{1}$$

le moment d'inertie du système des points $A, A', A'' \ldots$ par rapport à l'axe $\overline{OO'}$ passant par le point O. Prenons ce dernier point pour origine des coordonnées, et désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires de la masse m. Soient enfin s le rayon vecteur $\overline{OA}$, δ que forme ce rayon vecteur avec l'axe $\overline{OO'}$ prolongé dans une certaine direction, et λ, μ, ν, les angles formés par celui-ci avec les demi-axes des coordonnées positives. On aura évidemment

(2) $r = s\sin\delta$, (3) $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

De plus, comme les angles compris entre le rayon vecteur s et les demi-axes des coordonnées positives auront pour cosinus les rapports

$$\frac{x}{s}, \quad \frac{y}{s}, \quad \frac{z}{s},$$

on trouvera encore

(4) $$\cos\delta = \frac{x}{s}\cos\lambda + \frac{y}{s}\cos\mu + \frac{z}{s}\cos\nu,$$

et par suite

(5) $$s\cos\delta = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu;$$

puis l'on en conclura

(6) $$r^2 = s^2\sin^2\delta = s^2 - s^2\cos^2\delta = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu)^2$$
$$= (y\cos\nu - z\cos\mu)^2 + (z\cos\lambda - x\cos\nu)^2 + (x\cos\nu - y\cos\lambda)^2.$$

Il est bon d'observer que l'équation (6) peut être remplacée par l'une quelconque des deux suivantes

(7) $$r^2 = x^2\sin^2\lambda + y^2\sin^2\mu + z^2\sin^2\nu - 2yz\cos\mu\cos\nu - 2zx\cos\nu\cos\lambda - 2xy\cos\lambda\cos\mu,$$

(8) $$r^2 = (y^2+z^2)\cos^2\lambda + (z^2+x^2)\cos^2\mu + (x^2+y^2)\cos^2\nu - 2yz\cos\mu\cos\nu - 2zx\cos\nu\cos\lambda - 2xy\cos\lambda\cos\mu.$$

Cela posé, si l'on fait, pour abréger,

(9) $A = \Sigma m(y^2 + z^2)$, $B = \Sigma m(z^2 + x^2)$, $C = \Sigma m(x^2 + y^2)$;

(10) $D = \Sigma myz$, $E = \Sigma mzx$, $F = \Sigma mxy$;

(11) $G = \Sigma mx^2$, $H = \Sigma my^2$, $I = \Sigma mz^2$;

on tirera de la formule (1), combinée avec l'équation (7) ou (8),

(12) $$K = A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu - 2D\cos\mu\cos\nu - 2E\cos\nu\cos\lambda - 2F\cos\lambda\cos\mu,$$

ou

(13) $$K = G\sin^2\lambda + H\sin^2\mu + I\sin^2\nu - 2D\cos\mu\cos\nu - 2E\cos\nu\cos\lambda - 2F\cos\lambda\cos\mu.$$

Ajoutons que les quantités A, B, C, déterminées par les formules (9), sont précisément les moments d'inertie relatifs aux axes des x, y et z.

Concevons à présent que l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point O' choisi arbitrairement sur l'axe $\overline{OO'}$, et par k la longueur $\overline{OO'}$. On aura évidemment

(14) $$k=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)},$$

(15) $$\frac{x}{\cos\lambda}=\frac{y}{\cos\mu}=\frac{z}{\cos\nu}=\pm k;$$

et, en substituant dans l'équation (12) les valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ tirées de la formule (15), on trouvera

(16) $$Ax^2+By^2+Cz^2-2Dyz-2Ezx-2Fxy=Kk^2.$$

Supposons de plus que l'axe $\overline{OO'}$ vienne à se mouvoir, en tournant autour du point O, et que, pendant ce mouvement, la longueur $\overline{OO'}=k$ varie de manière à être constamment représentée par une certaine fonction du moment d'inertie K. Ce moment d'inertie pourra lui-même s'exprimer en fonction de la distance

$$k=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)},$$

et le point O' décrira évidemment une surface courbe, dont la construction fera connaître la dépendance qui existe entre la valeur de K et la direction de l'axe $\overline{OO'}$. Observons d'ailleurs que cette surface courbe sera représentée par l'équation (16), quand on y considèrera k et K comme des fonctions des coordonnées x, y, z devenues variables.

Parmi les différentes relations qu'on peut établir entre les quantités k et K, l'une de celles qui ramènent l'équation (16) aux formes les plus simples consiste à supposer la longueur k réciproquement proportionnelle à la racine carrée du moment d'inertie K. En effet, si, pour fixer les idées, on prend

(17) $$k=\frac{1}{\sqrt{K}}, \quad \text{ou} \quad Kk^2=1,$$

l'équation (16) deviendra

(18) $$Ax^2+By^2+Cz^2-2Dyz-2Ezx-2Fxy=1.$$

La surface, représentée par cette dernière équation, est évidemment une surface du second degré, qui a pour centre l'origine même des coordonnées. De plus, comme le moment d'inertie K, uniquement composé de termes positifs, ne s'évanouira jamais, à

moins que tous les points matériels donnés ne soient situés sur une même droite, et qu'en conséquence la longueur k conservera généralement, pour toutes les positions de l'axe $\overline{OO'}$, une valeur finie; il est clair que la surface (18) sera un ellipsoïde. On peut donc énoncer la proposition suivante.

1.er THÉORÈME. *Considérons un système quelconque de points matériels A, A', etc., et supposons qu'après avoir mené par un point O pris à volonté dans l'espace une infinité d'axes, on détermine les divers moments d'inertie du système par rapport à ces mêmes axes. Si, à partir du point O, l'on porte sur chaque axe une longueur numériquement équivalente à l'unité divisée par la racine carrée du moment d'inertie correspondant, les extrémités des diverses longueurs seront comprises dans la surface d'un ellipsoïde dont le point O sera le centre.*

Si tous les points matériels du système que l'on considère étaient situés sur un même axe, le moment d'inertie relatif à cet axe deviendrait nul, et la longueur correspondante serait infinie; d'où il résulte que l'ellipsoïde se transformerait en une surface cylindrique.

Observons maintenant que, la direction des axes coordonnés étant arbitraire, on pourra toujours faire coïncider ces axes avec ceux de l'ellipsoïde représenté par l'équation (18). Alors les produits yz, zx, xy devront disparaître, ou, en d'autres termes, les coëfficients D, E, F devront s'évanouir. On peut donc faire passer par le point O trois axes rectangulaires et tellement choisis qu'en les prenant pour axes coordonnés on ait à-la-fois

$$(19) \qquad \Sigma myz = 0, \qquad \Sigma mzx = 0, \qquad \Sigma mxy = 0.$$

Ces trois axes sont ceux qu'on a nommés les *axes principaux* du système relatifs au point O. On appelle *moments d'inertie principaux* ceux qui se rapportent à ces mêmes axes. Comme, en vertu de l'équation (17), la valeur de K augmente, tandis que la longueur k diminue, et réciproquement, il est clair que l'un des moments d'inertie, savoir, celui qui correspondra au grand axe de l'ellipsoïde, sera le moment d'inertie *minimum*, tandis qu'un autre, savoir, celui qui correspondra au petit axe de l'ellipsoïde, sera le moment d'inertie *maximum*.

Lorsque l'ellipsoïde est de révolution, il existe une infinité de systèmes d'axes rectangulaires pour lesquels les conditions (19) se trouvent vérifiées. En d'autres termes, il existe une infinité de systèmes d'axes principaux. Chacun de ces systèmes se compose 1.° de l'axe de révolution, 2.° de deux autres axes qui passent par le centre de l'ellipsode et se coupent à angles droits dans le plan de son équateur. Alors aussi deux moments d'inertie relatifs à des droites qui forment le même angle avec l'axe de révolution sont nécessairement égaux entre eux.

Lorsque l'ellipsoïde se transforme en une surface cylindrique, cette dernière est toujours une surface de révolution, et l'on rentre dans le cas que nous venons d'examiner. Seulement l'un des moments d'inertie principaux s'évanouit.

Lorsque l'ellipsoïde se réduit à une sphère, les conditions (19) se trouvent vérifiées pour tout système de trois axes rectangulaires passant par l'origine. Trois axes de cette espèce, pris au hasard, forment donc alors un système d'axes principaux. De plus, tous les moments d'inertie deviennent égaux entre eux.

En faisant coïncider les axes coordonnés avec les axes principaux, on simplifie les équations (12), (13), (18), puisqu'alors les coefficients D, E, F s'évanouissent; et l'on obtient immédiatement les formules

$$(20) \qquad K = A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu,$$

$$(21) \qquad K = G\sin^2\lambda + H\sin^2\mu + I\sin^2\nu,$$

$$(22) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

dans lesquelles A, B, C désignent les trois moments d'inertie principaux. La formule (20) sert à exprimer le moment d'inertie relatif à un axe quelconque passant par un point donné O, en fonction des moments d'inertie principaux, et des angles λ, μ, ν que forme l'axe dont il s'agit avec les axes principaux.

Dans le cas où les axes principaux ne coïncident pas avec ceux des x, y et z, leurs directions, ainsi que les valeurs des moments d'inertie principaux, peuvent être facilement déterminées. En effet, dans l'ellipsoïde représenté par l'équation (18), le rayon vecteur, mené du centre au point (x, y, z), devient normal à la surface, quand les coordonnées x, y, z vérifient la formule

$$(23) \qquad \frac{Ax - Fy - Ez}{x} = \frac{By - Dz - Fx}{y} = \frac{Cz - Ex - Dy}{z}.$$

D'ailleurs on tire de cette formule combinée avec les équations (15) et (12)

$$(24) \qquad \frac{A\cos\lambda - F\cos\mu - E\cos\nu}{\cos\lambda} = \frac{B\cos\mu - D\cos\nu - F\cos\lambda}{\cos\mu} = \frac{C\cos\nu - E\cos\lambda - D\cos\mu}{\cos\nu} = K.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(25) \qquad \begin{cases} (K - A)\cos\lambda + F\cos\mu + E\cos\nu = 0, \\ F\cos\lambda + (K - B)\cos\mu + D\cos\nu = 0, \\ E\cos\lambda + D\cos\mu + (K - C)\cos\nu = 0; \end{cases}$$

et par suite

$$(26)\quad (K-A)(K-B)(K-C)-D^2(K-A)-E^2(K-B)-F^2(K-C)+2DEF=0.$$

Cela posé, les trois valeurs de K, propres à vérifier l'équation (26), seront évidemment les trois moments d'inertie relatifs aux axes de l'ellipsoïde (18), c'est-à-dire, les moments d'inertie principaux. De plus, à chacun de ces moments correspondront deux systèmes de valeurs des angles λ, μ, ν, déterminés par les équations (25) réunies à la suivante

$$(27)\qquad \cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1,$$

ou, ce qui revient au même, pour la formule

$$(28)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\lambda}{(K-B)(K-C)-D^2}=\dfrac{\cos\mu}{(K-C)(K-A)-E^2}=\dfrac{\cos\nu}{(K-A)(K-B)-F^2}= \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{\{[(K-B)(K-C)-D^2]^2+[(K-C)(K-A)-E^2]^2+[(K-A)(K-B)-F^2]^2\}}}; \end{array}\right.$$

et il est clair que ces deux systèmes indiqueront les deux directions suivant lesquelles on peut prolonger, à partir de l'origine, l'un des axes de l'ellipsoïde, c'est-à-dire, l'un des axes principaux.

L'équation (26) est une de celles que Lagrange avait rencontrées dans ses recherches sur le mouvement de rotation d'un corps solide. Cet illustre géomètre avait démontré que les trois racines de l'équation dont il s'agit sont toujours réelles. Mais M. Binet a prouvé le premier que ces racines étaient précisément les moments d'inertie principaux.

Supposons maintenant que l'on veuille déterminer le moment d'inertie du système des points matériels A, A',... par rapport à un axe, qui forme toujours avec ceux des x, y, z les angles λ, μ, ν, mais qui passe par un point C distinct de l'origine. Soient d'ailleurs $\mathfrak{K}$ ce moment d'inertie; a, b, c les coordonnées du point C; R et $\mathfrak{R}$ les distances respectives de l'origine O et du point A au nouvel axe; M la somme des masses m, m',.....; enfin ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité du système des points A, A'... On aura

$$(29)\qquad \mathfrak{K}=\Sigma m\mathfrak{R}^2;$$

De plus, pour déduire la distance $\mathfrak{R}$ de la distance r déterminée par l'équation (6), il suffira évidemment de transporter l'origine au point (a, b, c), et de rem-

placer en conséquence x, y, z par $x-a, y-b, z-c$. On aura donc encore

(30) $$\mathcal{R}^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-[x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)]^2,$$

et l'on en conclura, en réduisant x, y et z à zéro,

(31) $$R^2=a^2+b^2+c^2-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)^2.$$

On trouvera par suite

(32) $$\mathcal{R}^2=r^2+R^2-2[ax+by+cz-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)].$$

puis, en ayant égard aux équations

(33) $$\Sigma mx=M\xi, \quad \Sigma my=M\eta, \quad \Sigma mz=M\zeta,$$

on tirera des formules (29) et (32)

(34) $$\mathcal{K}=K+MR^2-2M[a\xi+b\eta+c\zeta-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)(\xi\cos\lambda+\eta\cos\mu+\zeta\cos\nu)].$$

Si l'on fait coïncider l'origine avec le centre de gravité du système des points A, A', etc..., ξ, η, ζ s'évanouiront, et l'équation (34) donnera simplement

(35) $$\mathcal{K}=K+MR^2.$$

Cette dernière formule comprend un théorème dont voici l'énoncé.

2.° Théorème. *Pour obtenir le moment d'inertie d'un système de points matériels par rapport à un axe quelconque, il suffit d'ajouter, au moment d'inertie relatif à un axe parallèle passant par le centre de gravité, la somme des masses des différents points multipliée par le carré de la distance entre les deux axes.*

Les théorèmes 1 et 2 s'étendent au cas même où le nombre des points matériels A, A',... devient infini, et où le système de ces points se transforme en un corps solide. Lorsque le corps est homogène, et qu'un plan, mené par le point O, divise le corps en deux parties symétriques, ce plan renferme évidemment deux axes de l'ellipsoïde représenté par l'équation (18), et par conséquent deux des axes principaux relatifs au point O. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

3.° Théorème. *Lorsque, par le centre de gravité d'un corps solide et homogène, on peut mener trois plans, dont chacun divise le corps en deux parties symétriques, les droites d'intersection de ces mêmes plans sont précisément les axes principaux relatifs au centre de gravité.*

Ainsi, par exemple, dans un parallélipipède rectangle et un ellipsoïde homogènes, les axes principaux relatifs au centre coïncident avec les droites menées par le centre parallèlement aux arêtes, ou avec les axes de l'ellipsoïde.

Quand on se propose d'évaluer le moment d'inertie d'un corps solide homogène, le moyen le plus simple est d'employer la formule (21), et de déterminer les constantes G, H, I, à l'aide de la division du corps solide en tranches infiniment minces, comprises entre des plans parallèles aux plans coordonnés. Ainsi, en particulier, pour déterminer la constante

$$G = \Sigma m x^2,$$

ou le moment d'inertie du corps solide relatif au plan des y, z, on cherchera d'abord le moment d'inertie d'une tranche très-mince du même corps, renfermée entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x, et correspondants aux deux abscisses x, $x+\Delta x$. Soit U l'aire de la section faite par le premier de ces deux plans dans le corps solide, et ρ la densité du corps. La masse de la tranche dont il s'agit, et son moment d'inertie par rapport au plan des y, z seront exprimés par deux produits de la forme

(36) $$(1 \pm \varepsilon)\rho U \Delta x,$$ (37) $$(1 \pm \varepsilon)\rho U x^2 \Delta x,$$

ε désignant un nombre qui s'évanouira toujours avec Δx, et qui pourra changer de valeur quand on passera du premier produit au second. Cela posé, si l'on divise le corps en un très-grand nombre de tranches semblables à celle que nous venons de considérer, on trouvera pour la somme des moments d'inertie de toutes ces tranches

(38) $$G = \Sigma(1 \pm \varepsilon)\rho U x^2 \Delta x,$$

le signe Σ se rapportant aux diverses valeurs de Δx; puis, en faisant converger chacune de ces valeurs vers zéro, et passant aux limites, on obtiendra l'équation

(39) $$G = \int_{x_0}^{x_1} \rho U x^2 dx.$$

Dans la formule (39), x_0 et x_1 représentent la plus petite et la plus grande des valeurs de l'abscisse x. Cette formule s'étend au cas même où la densité ρ devient variable avec l'abscisse x; et, quand le corps est homogène, elle se réduit à

$$G = \rho \int_{x_0}^{x_1} U x^2 dx.$$ On trouvera de la même manière

(40) $$\left\{ \begin{aligned} G &= \rho \int_{x_0}^{x_1} U x^2 dx, \\ H &= \rho \int_{y_0}^{y_1} V y^2 dy, \\ I &= \rho \int_{z_0}^{z_1} W z^2 dz; \end{aligned} \right.$$

pourvu que l'on désigne par y_0 et y_1 la plus petite et la plus grande des valeurs de y relatives aux divers points du corps solide, par z_0 et z_1 la plus petite et la plus grande des valeurs de z, enfin par V et W les aires de deux sections faites dans le corps par des plans perpendiculaires aux axes des y et z, et correspondants le premier à l'ordonnée y, le second à l'ordonnée z.

Pour montrer une application des formules (21) et (40), concevons que le corps solide soit un parallélipipède rectangle et homogène, dont le centre coïncide avec l'origine, et dont les arêtes soient parallèles aux axes des x, y, z. Si l'on désigne par a, b, c ces trois arêtes, et par M la masse du parallélipipède, on aura évidemment

$$U = bc, \qquad x_0 = -\frac{1}{2}a, \qquad x_1 = \frac{1}{2}a, \qquad M = \rho abc,$$

$$G = \rho bc \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} x^2 dx = \frac{M}{a} \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} x^2 dx = \frac{1}{12} Ma^2.$$

On trouvera de même

$$H = \frac{1}{12} Mb^2, \qquad I = \frac{1}{12} Mc^2;$$

et par suite la formule (21) donnera

$$(41) \qquad K = M \frac{a^2 \sin^2\lambda + b^2 \sin^2\mu + c^2 \sin^2\nu}{12}.$$

Tel sera le moment d'inertie du parallélipipède relativement à un axe mené par le centre de manière à former les angles λ, μ, ν avec les directions des trois arêtes.

Si le parallélipipède se transforme en un cube, la valeur de K deviendra indépendante des angles λ, μ, ν; et, en ayant égard à la formule

$$\sin^2\lambda + \sin^2\mu + \sin^2\nu = 3 - (\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu) = 2,$$

on tirera de l'équation (41)

$$(42) \qquad K = \frac{1}{6} Ma^2.$$

Considérons encore un ellipsoïde homogène qui ait pour centre l'origine, et qui soit représenté par l'équation

(43) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La section faite dans cet ellipsoïde par un plan perpendiculaire à l'axe des x, et correspondant à l'abscisse x, sera une ellipse qui, étant elle-même représentée par l'équation

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1,$$

aura pour demi-axes deux longueurs mesurées par les produits

$$b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, comme, pour déterminer la surface U de cette ellipse, il suffira de multiplier le produit des deux demi-axes par le nombre π, on aura encore

$$U=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

On trouvera d'ailleurs, en désignant par M la masse de l'ellipsoïde,

$$x_0=-a,\qquad x_1=a,\qquad M=\frac{4}{3}\pi\rho abc.$$

Cela posé, la première des formules (40) donnera

$$G=\pi\rho bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)x^2dx=\frac{3}{4}\frac{M}{a}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)x^2dx$$

$$=\frac{3}{2}Ma^2\int_0^1 t^2(1-t^2)\,dt=\frac{1}{5}Ma^2.$$

On aura de même

$$H=\frac{1}{5}Mb^2,\qquad I=\frac{1}{5}Mc^2,$$

et par suite on tirera de la formule (21)

(44) $$K=M\frac{a^2\sin^2\lambda+b^2\sin^2\mu+c^2\sin^2\nu}{5}.$$

Tel sera le moment d'inertie de l'ellipsoïde relativement à une droite menée par le centre de manière à former les angles λ, μ, ν avec les directions des trois axes.

Si l'ellipsoïde se transforme en une sphère, la valeur de K deviendra indépendante des angles λ, μ, ν, et se réduira simplement à

$$K = \frac{2}{5} M a^2. \tag{45}$$

Nous terminerons ici cet article, sans nous arrêter aux applications que l'on peut faire de la formule (35), ni à la formule bien connue qui sert à déterminer le moment d'inertie d'un solide de révolution par rapport à l'axe de ce même solide.



SUR LA FORCE VIVE D'UN CORPS SOLIDE

OU D'UN SYSTÈME INVARIABLE EN MOUVEMENT.

On sait que la force vive d'un système invariable ou d'un corps solide en mouvement se décompose en deux parties, dont l'une représente la force vive du corps déterminée par un observateur, qui, placé au centre de gravité, regarderait ce point comme immobile, tandis que l'autre partie est la force vive que l'on obtiendrait, en supposant la masse entière transportée au point dont il s'agit, et animée de la vitesse avec laquelle il se meut dans l'espace. Toutefois le centre de gravité n'est pas le seul point qui jouisse de la propriété que je viens de rappeler ici, et l'on peut démontrer qu'elle est commune à tous ceux qui sont situés sur la surface d'un cylindre droit à base circulaire dans lequel deux génératrices opposées coïncident, l'une avec l'axe instantané de rotation du corps solide, l'autre avec la droite menée par le centre de gravité parallèlement à cet axe. C'est en effet ce qui résulte des considérations suivantes.

Soient A, A', A''... les différents points matériels qui composent le système invariable ou le corps solide; m, m', m''... leurs masses respectives, et M la masse entière. Soient d'ailleurs, au bout du temps t,

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega''\ldots; \quad \Omega$$

les vitesses des points A, A', A''..., et du centre de gravité G, ψ^2 la force vive du corps solide, c'est-à-dire, la somme des forces vives de ses divers éléments, $\overline{OO'}$ l'axe instantané de rotation du même corps, enfin v et s ses vitesses instantanées de translation et de rotation. On aura

$$M = m + m' + m'' + \ldots, \qquad \text{et} \qquad \psi^2 = m\omega^2 + m'\omega'^2 + \text{etc.} \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \qquad M = \Sigma m, \qquad \text{et} \qquad (2) \qquad \psi^2 = \Sigma m\omega^2,$$

le signe Σ indiquant une somme de termes semblables et relatifs aux masses m, m', m''.... D'autre part, si l'on nomme R la distance entre l'axe $\overline{OO'}$ et un axe pa-

rallèle $\overline{GG'}$ mené par le centre de gravité, r, s les longueurs des perpendiculaires abaissées du point A sur les deux axes $\overline{GG'}$, $\overline{OO'}$, et δ l'angle que ces perpendiculaires forment entre elles; on trouvera encore

(3) $$\omega^2 = v^2 + s^2 \varkappa^2,$$ (4) $$\Omega^2 = v^2 + R^2 \varkappa^2;$$

(5) $$\Sigma m s^2 = \Sigma m r^2 + M R^2;$$

(6) $$R^2 = r^2 + s^2 - 2 r s \cos\delta.$$

En effet, pour établir ces quatre équations, il suffira d'observer, 1.° que la vitesse absolue du point A ou G est la diagonale d'un rectangle construit sur la vitesse v de l'axe instantané de rotation et sur la vitesse apparente $s\varkappa$ ou $R\varkappa$ qu'attribuerait au point A ou G un observateur placé sur l'axe $\overline{OO'}$, 2.° que la différence entre les quantités $\Sigma m s^2$ et $\Sigma m r^2$, c'est-à-dire, entre les moments d'inertie du corps solide relatifs aux deux axes $\overline{OO'}$ et $\overline{GG'}$, doit être, en vertu du second théorême de l'article précédent, équivalente au produit de la masse entière par le carré de la distance des deux axes, 3.° que cette distance est le côté opposé à l'angle δ, dans un triangle formé avec les trois longueurs r, s et R. Si maintenant on substitue, dans la formule (2), à la place de ω^2, sa valeur donnée par l'équation (3), on trouvera

(7) $$\psi^2 = M v^2 + \varkappa^2 \Sigma m s^2,$$

puis, en ayant égard à la formule (5),

(8) $$\psi^2 = M(v^2 + R^2 \varkappa^2) + \varkappa^2 \Sigma m r^2,$$

ou, ce qui revient au même,

(9) $$\psi^2 = M \Omega^2 + \varkappa^2 \Sigma m r^2.$$

De plus, si l'on nomme K et $\mathcal{K}$ les moments d'inertie du corps solide relatifs à l'axe $\overline{GG'}$ et à un axe parallèle $\overline{AB}$ mené par le point A, on aura évidemment

(10) $$K = \Sigma m r^2,$$ (11) $$\mathcal{K} = K + M r^2.$$

et l'on tirera de l'équation (8), combinée avec les formules (3), (6), (10) et (11)

(12) $$\psi^2 = M \omega^2 - 2 M \varkappa^2 r s \cos\delta + \mathcal{K} \varkappa^2.$$

Il importe de remarquer que le dernier terme de chacune des équations (7), (9), (12) représente la force vive qu'attribuerait au corps solide un observateur placé sur l'un des axes $\overline{OO'}$, $\overline{GG'}$, $\overline{AB}$. En effet, la vitesse apparente du point A, pour un spectateur placé sur l'axe $\overline{OO'}$, étant précisément égale au produit $s\varkappa$, il est clair que la force vive attribuée par ce spectateur au corps solide sera équivalente à l'expression

$$(13) \qquad \Sigma m(s\varkappa)^2 = \varkappa^2 \Sigma m s^2,$$

c'est-à-dire, au carré de la vitesse de rotation du corps par le moment d'inertie $\Sigma m s^2$ relatif à l'axe $\overline{OO'}$; et, si le spectateur se transporte sur l'axe $\overline{GG'}$, ou sur l'axe $\overline{OO'}$, il faudra évidemment remplacer, dans l'expression (13), le facteur $\Sigma m s^2$ par l'une des quantités

$$K = \Sigma m r^2 \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{K},$$

qui désignent les moments d'inertie relatifs aux axes $\overline{GG'}$ ou $\overline{AB}$. Quant aux produits $M\upsilon^2$, $M\Omega^2$, $M\omega^2$, chacun d'eux représente la force vive qu'offrirait la masse entière concentrée en un point situé sur l'axe $\overline{OO'}$ ou $\overline{GG'}$ ou $\overline{AB}$, et animée de la même vitesse que ce point. Ajoutons que, si l'on suppose le plan qui renferme les axes $\overline{AB}$, $\overline{OO'}$ perpendiculaire au plan qui renferme les axes $\overline{AB}$, $\overline{GG'}$, le facteur $\cos\delta$ se réduira simplement à zéro, et l'équation (12) à la formule

$$(14) \qquad \psi^2 = M\omega^2 + \mathcal{K}\varkappa^2.$$

D'ailleurs, dans cette hypothèse, si l'on coupe les trois axes parallèles $\overline{OO'}$, $\overline{GG'}$, $\overline{AB}$ par un plan perpendiculaire à ces mêmes axes, les trois points d'intersection formeront un triangle rectangle dont le sommet sera situé sur l'axe $\overline{AB}$. Donc alors tous les points de l'axe $\overline{AB}$ appartiendront à des circonférences décrites, dans des plans perpendiculaires aux trois axes, sur des diamètres propres à mesurer la distance des deux premiers. Il en résulte que la droite $\overline{AB}$ sera l'une des génératrices d'un cylindre droit que l'on pourra considérer comme ayant pour base une des circonférences ci-dessus mentionnées. Cela posé, la formule (14) entraînera évidemment la proposition suivante.

Théorème. *Concevons qu'un système invariable ou un corps solide se meuve dans l'espace. Soient, à une époque quelconque du mouvement,* $\overline{OO'}$ *l'axe instantané de rotation de ce même corps, et* $\overline{GG'}$ *l'axe parallèle mené par le centre de gravité* G. *Enfin supposons que l'on construise une surface cylindrique à base circulaire, et dans*

laquelle deux génératrices opposées coïncident avec les deux axes dont il s'agit. Pour déterminer la force vive du corps solide, il suffira de calculer celle que lui attribuerait, en se considérant comme immobile, un observateur placé en un point pris au hasard sur la surface cylindrique, et d'ajouter à la force vive ainsi calculée celle qu'on obtiendrait, si la masse entière était concentrée au point dont il s'agit, et animée de la même vitesse que ce point.

Si l'observateur se plaçait sur l'un des axes $\overline{OO'}$, $\overline{GG'}$, la vitesse ω se trouverait réduite à l'une des vitesses v, Ω; et la formule (14) à l'une des équations (7) et (9). Ajoutons que la seconde de ces deux équations est précisément celle qui exprime la propriété connue du centre de gravité relativement à la décomposition de la force vive.



SUR LES RELATIONS QUI EXISTENT,

DANS L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE OU FLUIDE,

ENTRE LES PRESSIONS OU TENSIONS ET LES FORCES ACCÉLÉRATRICES.

Considérons, dans un corps solide ou fluide, un point quelconque dont les coordonnées réctangulaires soient désignées par x, y, z. Si l'on nomme p', p'', p''' les pressions ou tensions exercées en ce point, du côté des coordonnées positives, contre trois plans parallèles aux plans des y, z, des z, x, et des x, y; les projections algébriques des forces p', p'', p''' sur les axes coordonnés seront deux à deux égales entre elles [voyez la page 47], et pourront être représentées en conséquence, comme on l'a déjà fait dans un autre article [page 49], par les quantités

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} A, & F, & E; \\ F, & B, & D; \\ E, & D, & C. \end{matrix}\right.$$

Soient d'ailleurs

$$(2)\qquad X,\quad Y,\quad Z$$

les projections algébriques de la force accélératrice appliquée au point (x, y, z) sur les axes coordonnés. On reconnaîtra facilement que les quantités (1) et (2) sont toujours liées entre elles par trois équations qu'on peut obtenir ainsi qu'il suit.

Soient Δx, Δy, Δz des accroissements très-petits attribués aux variables x, y, z;

$$(3)\qquad v = \Delta x \Delta y \Delta z$$

le volume du parallélipipède rectangle compris entre les six plans menés parallèlement aux plans coordonnés par les deux points (x, y, z), $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$; ρ la densité du corps au point (x, y, z), et m la masse comprise sous le volume v. Les projections algébriques de la force motrice qui sollicite cette masse seront à très-peu près équivalentes aux trois produits

$$(4)\qquad mX,\quad mY,\quad mZ,$$

ou, parce qu'on a sensiblement

$$(5) \qquad m = \rho v = \rho \Delta x \Delta y \Delta z,$$

aux trois expressions

$$(6) \qquad \rho X \Delta x \Delta y \Delta z, \quad \rho Y \Delta x \Delta y \Delta z, \quad \rho Z \Delta x \Delta y \Delta z.$$

De plus, les six faces rectangulaires, qui terminent le volume v, seront deux à deux égales entre elles, et mesurées par les produits

$$(7) \qquad \Delta y \Delta z, \quad \Delta z \Delta x, \quad \Delta x \Delta y.$$

Enfin les trois faces, qui aboutissent au point (x, y, z), supporteront en ce point des pressions ou tensions dont les projections algébriques seront respectivement

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} -A, & -F, & -E, \\ -F, & -B, & -D, \\ -E, & -D, & -C. \end{array} \right.$$

Cela posé, désignons par x, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$ les coordonnées d'un point quelconque situé sur celle des trois dernières faces qui est perpendiculaire à l'axe des x. Tandis qu'on passera du point (x, y, z) au point $(x, y + \mathrm{y}, z + \mathrm{z})$, la projection algébrique sur l'axe des x de la pression ou tension exercée contre cette face changera de valeur, et deviendra équivalente au polynome

$$(9) \qquad -\left(A + \frac{dA}{dy}\mathrm{y} + \frac{dA}{dz}\mathrm{z} + \ldots\right).$$

Par suite, la tension ou pression totale, supportée par cette face parallèlement à l'axe des x, aura pour mesure l'intégrale

$$(10) \quad -\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta z}\left(A + \frac{dA}{dy}\mathrm{y} + \frac{dA}{dz}\mathrm{z} + \ldots\right)d\mathrm{z}\,d\mathrm{y} = -\left(A + \frac{dA}{dy}\frac{\Delta y}{2} + \frac{dA}{dz}\frac{\Delta z}{2} + \ldots\right)\Delta y \Delta z,$$

et sera dirigée dans le sens des x positives ou négatives, suivant que l'intégrale (10) sera elle-même positive ou négative. Quant à la pression supportée par la face opposée, parallèlement à l'axe des x, elle aura évidemment pour projection algébrique sur cet axe l'expression qu'on obtient en remplaçant, dans l'intégrale (10), le signe $-$ par le signe $+$, et la quantité A par

$$A+\frac{dA}{dx}\Delta x+\frac{d^2A}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2}+\text{etc.}\ldots,$$

c'est-à-dire le produit

$$(11)\qquad \left(A+\frac{dA}{dx}\Delta x+\frac{dA}{dy}\frac{\Delta y}{2}+\frac{dA}{dz}\frac{\Delta z}{2}+\ldots\right)\Delta y\,\Delta z.$$

Donc la résultante des pressions ou tensions supportées, parallèlement à l'axe des x, par les faces du volume v comprises dans des plans parallèles au plan des y, z, aura pour projection algébrique sur cet axe le produit

$$(12)\qquad \left(\frac{dA}{dx}\Delta x+\ldots\right)\Delta y\,\Delta z.$$

On prouvera de la même manière que la résultante des pressions ou tensions supportées, parallèlement à l'axe des x, par les faces parallèles au plan des z, x, ou au plan des x, y, a pour projection algébrique sur cet axe le produit

$$(13)\qquad \left(\frac{dF}{dy}\Delta y+\ldots\right)\Delta z\,\Delta x,$$

ou le suivant

$$(14)\qquad \left(\frac{dE}{dz}\Delta z+\ldots\right)\Delta x\,\Delta y.$$

Donc, si l'on considère les différences Δx, Δy, Δz comme infiniment petites du premier ordre, et si l'on néglige les infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième, ce qui permettra de réduire les produits (12), (13), (14) à leurs premiers termes, la somme des projections algébriques sur l'axe des x des pressions ou tensions, supportées parallèlement à cet axe par les six faces du volume v, sera simplement

$$(15)\qquad \left(\frac{dA}{dx}+\frac{dF}{dy}+\frac{dE}{dz}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Or, la molécule m devant, par hypothèse, rester en équilibre sous l'action des différentes forces qui la sollicitent, savoir, des pressions ou tensions exercées contre ses faces, et de la force motrice, la somme des projections algébriques de toutes ces forces sur l'axe des x devra s'évanouir. On aura donc

$$\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dF}{dy}+\frac{dE}{dz}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z+\rho X\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z=0,$$

et l'on en conclura

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{dA}{dx}+\frac{dF}{dy}+\frac{dE}{dz}+\rho X=0, \\ \frac{dF}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dD}{dz}+\rho Y=0, \\ \frac{dE}{dx}+\frac{dD}{dy}+\frac{dC}{dz}+\rho Z=0. \end{cases}$$

On trouvera de même

Si le corps que l'on considère se réduisait à une masse fluide, il y aurait, en chaque point, égalité de pression en tout sens, et chaque pression serait perpendiculaire au plan qui la supporterait. Alors les pressions exercées en un point quelconque, et du côté des coordonnées positives, contre trois plans perpendiculaires aux axes des x, y, z, seraient dirigées parallèlement à ces axes, mais dans le sens des coordonnées négatives. Par suite, en nommant p la pression hydrostatique correspondante au point (x, y, z), on trouverait

$$(17)\qquad A=B=C=-p,$$

$$(18)\qquad D=E=F=0;$$

et les équations (16), réduites à

$$(19)\qquad \rho X-\frac{dp}{dx}=0,\qquad \rho Y-\frac{dp}{dy}=0,\qquad \rho Z-\frac{dp}{dz}=0,$$

coïncideraient avec les formules (2) de la page 24.



SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS

D'UNE SEULE VARIABLE EN INTÉGRALES DOUBLES.

M. Fourier a fait voir qu'on peut transformer une fonction de la variable x en une intégrale double, dans laquelle cette variable n'entre plus que sous le signe sin. ou cos. Les deux formules qu'il a données pour cet objet peuvent être utilement remplacées par une autre que j'ai indiquée dans le 19.ᵉ cahier du Journal de l'École royale polytechnique, et qui renferme, au lieu d'un sinus ou d'un cosinus, une seule exponentielle imaginaire. Elles se trouvent d'ailleurs comprises, comme cas particuliers, dans celles que je vais établir.

Soient $\varphi(p,r)$, $\chi(p,r)$, $f(t)$ trois fonctions réelles des variables p, r, t; et p_0, P, r_0, R des valeurs réelles attribuées aux variables p, r. Ainsi que je l'ai prouvé dans le Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, on aura généralement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{p_0}^{P} \frac{d[\varphi(p,R)+\sqrt{-1}\,\chi(p,R)]}{dp} f[\varphi(p,R)+\sqrt{-1}\,\chi(p,R)]\,dp \\ &-\int_{p_0}^{P} \frac{d[\varphi(p,r_0)+\sqrt{-1}\,\chi(p,r_0)]}{dp} f[\varphi(p,r_0)+\sqrt{-1}\,\chi(p,r_0)]\,dp \\ &=\int_{r_0}^{R} \frac{d[\varphi(P,r)+\sqrt{-1}\,\chi(P,r)]}{dr} f[\varphi(P,r)+\sqrt{-1}\,\chi(P,r)]\,dr \\ &-\int_{r_0}^{R} \frac{d[\varphi(p_0,r)+\sqrt{-1}\,\chi(p_0,r)]}{dr} f[\varphi(p_0,r)+\sqrt{-1}\,\chi(p_0,r)]\,dr-\Delta, \end{aligned}\right.$$

Δ désignant une somme dont chaque terme est égal au produit de l'expression

$$(2)\qquad \pm 2\pi\sqrt{-1}$$

par l'un des résidus de $f(t)$ correspondants à celles des racines de l'équation

(3) $$\frac{1}{f(t)}=0$$

que l'on peut déduire de la formule

(4) $$t=\varphi(p,r)+\sqrt{-1}\,\chi(p,r)$$

en attribuant à la variable p des valeurs comprises entre les limites p_0, P, et à la variable r des valeurs comprises entre les limites r_0, R. Ajoutons que, dans l'expression (2), le double signe devra être réduit au signe $+$, ou au signe $-$, suivant qu'il s'agira d'un résidu correspondant à une valeur positive ou négative de la différence

(5) $$\frac{d\varphi(p,r)}{dp}\frac{d\chi(p,r)}{dr}-\frac{d\varphi(p,r)}{dr}\frac{d\chi(p,r)}{dp}.$$

Observons enfin que, si la fonction

(6) $$f[\varphi(p,r)+\sqrt{-1}\,\chi(p,r)]$$

ne devient pas infinie pour des valeurs de p et de r renfermées entre les limites $p=p_0$, $p=P$, $r=r_0$, $r=R$, on aura simplement

(7) $$\Delta=0.$$

Parmi les applications que l'on peut faire de la formule (1), on doit remarquer celles qui se rapportent au cas où l'on suppose

(8) $$\varphi(p,r)=p=x,\qquad \chi(p,r)=r=y,$$

ou bien encore

(9) $$\varphi(p,r)=r\cos p,\qquad \chi(p,r)=r\sin p,$$

On retrouve alors les formules que j'ai données dans le premier volume des Exercices [pages 95 et suiv., 205 et suiv.]. Si l'on supposait, au contraire,

(10) $$\varphi(p,r)=ar,\qquad \chi(p,r)=pr,$$

a étant une constante positive, la formule (1) donnerait

(11) $$\left\{\begin{aligned}&\int_{r_0}^{R}\left\{(a+P\sqrt{-1})f[(a+P\sqrt{-1})r]-(a+p_0\sqrt{-1})f[(a+p_0\sqrt{-1})r]\right\}dr\\&=\sqrt{-1}\int_{p_0}^{P}\left\{Rf[R(a+p\sqrt{-1})]-r_0f[r_0(a+p\sqrt{-1})]\right\}dp+\Delta.\end{aligned}\right.$$

Lorsque le produit $r f[(a+p\sqrt{-1})r]$ s'évanouit pour $r=\infty$, quel que soit p, alors, en prenant

$$r_0=0, \qquad R=\infty, \qquad p_0=0, \qquad P=b,$$

on tire de la formule (11)

$$\int_0^\infty (a+b\sqrt{-1}) f[(a+b\sqrt{-1})r]\,dr = \int_0^\infty a f(ar)\,dr + \Delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12) \qquad \int_0^\infty (a+b\sqrt{-1}) f[(a+b\sqrt{-1})r]\,dr = \int_0^\infty f(r)\,dr + \Delta.$$

Cette dernière équation comprend, comme cas particuliers, plusieurs formules connues. Ainsi, par exemple, si l'on pose

$$f(r) = r^{n-1} e^{-r},$$

n désignant une quantité positive, on aura $\Delta=0$, et l'on tirera de la formule (12)

$$(13) \qquad \int_0^\infty r^{n-1} e^{-(a+b\sqrt{-1})r}\,dr = \frac{\Gamma(n)}{(a+b\sqrt{-1})^n};$$

puis, en faisant, pour abréger,

$$(14) \qquad \theta = \operatorname{arctang} \frac{b}{a},$$

on trouvera

$$(15) \quad \int_0^\infty r^{n-1} e^{-ar} \cos br\,dr = \frac{\cos n\theta}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(n), \quad \int_0^\infty r^{n-1} e^{-ar} \sin br\,dr = \frac{\sin n\theta}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(n).$$

Concevons encore que, dans la formule (11), on prenne

$$p_0=c, \qquad P=b, \qquad r_0=0, \qquad R=\frac{1}{\varepsilon},$$

ε désignant une quantité très-petite. Alors, en supposant la fonction $f(t)$ choisie de manière que Δ s'évanouisse, on trouvera

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ (a+b\sqrt{-1}) f[(a+b\sqrt{-1})r] - (a+c\sqrt{-1}) f[(a+c\sqrt{-1})r] \right\} dr \\ &\qquad = \sqrt{-1} \int_c^b f\left(\frac{a+p\sqrt{-1}}{\varepsilon}\right) \frac{dp}{\varepsilon}. \end{aligned} \right.$$

Soit maintenant x une nouvelle variable renfermée entre les limites x_0, X, en sorte qu'on ait

(17) $$x_0 < x < X.$$

Si l'on pose

(18) $$f(t) = \int_{x_0}^{x} e^{-t(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu,$$

$f(\mu)$ désignant une fonction de μ qui ne devienne pas infinie entre les limites $\mu = x_0$, $\mu = X$, on trouvera

$$\int_c^b f\left(\frac{a+p\sqrt{-1}}{\varepsilon}\right)\frac{dp}{\varepsilon} = \int_c^b \int_{x_0}^{x} e^{-(a+p\sqrt{-1})\frac{x-\mu}{\varepsilon}} f(\mu)\frac{d\mu\, dp}{\varepsilon};$$

puis, en faisant

$$\frac{x-\mu}{\varepsilon} = s,$$

on obtiendra la formule

(19) $$\int_c^b f\left(\frac{a+p\sqrt{-1}}{\varepsilon}\right)\frac{dp}{\varepsilon} = \int_c^b \int_{\varepsilon}^{\frac{x-x_0}{\varepsilon}} e^{-(a+p\sqrt{-1})s} f(x-\varepsilon s)\, ds\, dp.$$

Comme on a d'ailleurs

$$\int_0^{\frac{x-x_0}{\varepsilon}} e^{-(a+p\sqrt{-1})s} f(x-\varepsilon s)\, ds =$$

(20) $$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{-(a+p\sqrt{-1})s} f(x-\varepsilon s)\, ds + \int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{x-x_0}{\varepsilon}} e^{-(a+p\sqrt{-1})s} f(x-\varepsilon s)\, ds,$$

et que, pour des valeurs infiniment petites de ε, les deux intégrales, comprises dans le second membre de l'équation (20)', se réduiront, l'une au produit

$$f(x)\int_0^{\infty} e^{-(a+p\sqrt{-1})s}\, ds = \frac{1}{a+p\sqrt{-1}}\, f(x),$$

l'autre à zéro; on tirera évidemment de l'équation (19), en prenant $\varepsilon = 0$,

(21) $$\int_c^b f\left(\frac{a+p\sqrt{-1}}{\varepsilon}\right)\frac{dp}{\varepsilon} = f(x)\int_c^b \frac{dp}{a+p\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, si l'on fait, pour abréger,

$$(22)\qquad A - B\sqrt{-1} = \int_c^b \frac{dp}{a+p\sqrt{-1}} = \int_c^b \frac{a\,dp}{a^2+p^2} - \sqrt{-1}\int_c^b \frac{p\,dp}{a^2+p^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(23)\quad A = \int_c^b \frac{a\,dp}{a^2+p^2} = \operatorname{arctang}\frac{b}{a} - \operatorname{arctang}\frac{c}{a},\ B = \int_c^b \frac{p\,dp}{a^2+p^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}\right),$$

on conclura de la formule (16), en y substituant la valeur de $f(t)$ donnée par l'équation (18), et réduisant ε à zéro,

$$(24)\qquad f(x) =$$

$$\frac{1}{B+A\sqrt{-1}}\int_0^\infty\int_{x_0}^{x}\left\{(a+b\sqrt{-1})e^{-(a+b\sqrt{-1})r(x-\mu)} - (a+c\sqrt{-1})e^{-(a+c\sqrt{-1})r(x-\mu)}\right\}f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

Si l'on supposait, au contraire,

$$(25)\qquad f(t) = \int_x^X e^{-t(\mu-x)}f(\mu)\,d\mu,$$

on trouverait, en opérant toujours de la même manière,

$$(26)\qquad f(x) =$$

$$\frac{1}{B+A\sqrt{-1}}\int_0^\infty\int_x^X\left\{(a+b\sqrt{-1})e^{-(a+b\sqrt{-1})r(\mu-x)} - (a+c\sqrt{-1})e^{-(a+c\sqrt{-1})r(\mu-x)}\right\}f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

Enfin, si l'on ajoute la formule (24) à la formule (26), en ayant soin de remplacer $x-\mu$ dans la première, et $\mu - x$ dans la seconde, par le radical $\sqrt{(x-\mu)^2}$ qui représente, dans tous les cas possibles, la valeur numérique du binome $x-\mu$, on obtiendra l'équation

$$(27)\qquad f(x) =$$

$$\int_0^\infty\int_{x_0}^X\left\{(a+b\sqrt{-1})e^{-(a+b\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2}} - (a+c\sqrt{-1})e^{-(a+c\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2}}\right\}f(\mu)\frac{d\mu\,dr}{2(B+A\sqrt{-1})}.$$

Si la variable x cessait d'être renfermée entre les limites x_0, X; alors, en supposant

$$(28)\qquad x > X > x_0,$$

et prenant

(29) $$f(t) = \int_{x_0}^{X} e^{-t(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu,$$

on tirerait de la formule (16), à l'aide de raisonnements semblables à ceux que nous avons employés ci-dessus,

(30) $$\int_0^\infty \int_{x_0}^{X} \left\{ (a+b\sqrt{-1})\, e^{-(a+b\sqrt{-1})r(x-\mu)} - (a+c\sqrt{-1})\, e^{-(a+c\sqrt{-1})r(x-\mu)} \right\} f(\mu)\, d\mu\, dr = 0.$$

Si l'on supposait au contraire

(31) $$x < x_0 < X,$$

alors en prenant

(32) $$f(t) = \int_{x_0}^{X} e^{-t(\mu-x)} f(\mu)\, d\mu,$$

on trouverait

(33) $$\int_0^\infty \int_{x_0}^{X} \left\{ (a+b\sqrt{-1})\, e^{-(a+b\sqrt{-1})r(\mu-x)} - (a+c\sqrt{-1})\, e^{-(a+c\sqrt{-1})r(\mu-x)} \right\} f(\mu)\, d\mu = 0,$$

Les équations (30) et (33) peuvent être remplacées par la seule formule

(34) $$\int_0^\infty \int_{x_0}^{X} \left\{ (a+b\sqrt{-1})\, e^{-(a+b\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2}} - (a+c\sqrt{-1})\, e^{-(a+c\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2}} \right\} f(\mu)\, d\mu\, dr = 0,$$

qui subsiste toutes les fois que la valeur attribuée à la variable x est située hors des limites x_0, X.

Lorsqu'on prend $c = -b$, les équations (23) donnent

(35) $$A = 2 \operatorname{arctang} \frac{b}{a}, \qquad B = 0;$$

et l'on tire des formules (27) et (34), 1.° en supposant la variable x renfermée entre les limites x_0, X,

(36) $$f(x) = \frac{\int_0^\infty \int_{x_0}^{X} \left\{ (a+b\sqrt{-1})\, e^{-(a+b\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2}} - (a-b\sqrt{-1})\, e^{-(a-b\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2}} \right\} f(\mu)\, d\mu\, dr}{\left(4 \operatorname{arctang} \frac{b}{a}\right)\sqrt{-1}}.$$

2.° en supposant la variable x située hors des limites x_0, X,

(37) $$\int_0^\infty\int_{x_0}^X\left\{(a+b\sqrt{-1})e^{-(a+b\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2}}-(a-b\sqrt{-1})e^{-(a-b\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2}}\right\}f(\mu)\,d\mu\,dr=0.$$

Dans le cas particulier où l'on prend $a=0$, $b=1$, la formule (36) se réduit à

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{x_0}^X\left\{e^{-r\sqrt{-1}\sqrt{(x-\mu)^2}}+e^{r\sqrt{-1}\sqrt{(x-\mu)^2}}\right\}f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

ou plus simplement à

(38) $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{x_0}^X\left\{e^{r(x-\mu)\sqrt{-1}}+e^{-r(x-\mu)\sqrt{-1}}\right\}f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

Par suite, on aura, pour des valeurs de x comprises entre les limites x_0, X,

(39) $$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{x_0}^X\cos r(x-\mu).f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

ou, ce qui revient au même,

(40) $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{x_0}^X e^{r(x-\mu)\sqrt{-1}}f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

On tirera, au contraire, de la formule (37), en supposant la variable x située hors des limites x_0, X, et prenant toujours $a=0$, $b=1$,

(41) $$\int_0^\infty\int_{x_0}^X\cos r(x-\mu).f(\mu)\,d\mu\,dr=0,$$

ou, ce qui revient au même,

(42) $$\int_{-\infty}^\infty\int_{x_0}^X e^{r(x-\mu)\sqrt{-1}}f(\mu)\,d\mu\,dr=0.$$

Dans le cas où l'on suppose $b=0$, la fraction que renferme le second membre de l'équation (36) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais, en réduisant cette fraction à sa véritable valeur, on tire de l'équation dont il s'agit

(43) $$f(x)=\frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{x_0}^X\left\{1-ar\sqrt{(x-\mu)^2}\right\}e^{-ar\sqrt{(x-\mu)^2}}f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

La formule (43), qu'on peut encore écrire comme il suit

$$(44)\qquad f(x)=\frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{x_0}^{x}\left\{1-ar(x-\mu)\right\}e^{-ar(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu\,dr$$

$$+\frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{x}^{X}\left\{1+ar(x-\mu)\right\}e^{ar(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

subsiste, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x_0, X. Au contraire, lorsque la variable x est située hors des limites x_0, X, on a, en vertu de l'équation (37),

$$(45)\qquad \int_0^\infty\int_{x_0}^{X}\left\{1-ar\sqrt{(x-\mu)^2}\right\}e^{-ar\sqrt{(x-\mu)^2}}f(\mu)\,d\mu\,dr=0.$$

On trouvera, par suite, en supposant $x>X>x_0$,

$$(46)\qquad \int_0^\infty\int_{x_0}^{X}\left\{1-ar(x-\mu)\right\}e^{-ar(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu\,dr=0,$$

et, en supposant $x<x_0<X$,

$$(47)\qquad \int_0^\infty\int_{x_0}^{X}\left\{1+ar(x-\mu)\right\}e^{ar(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu\,dr=0.$$

Il importe d'observer que les équations (43) et (44) peuvent encore être présentées sous les formes

$$(48)\qquad f(x)=\frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{x_0}^{X}\frac{d\left[ae^{-ar\sqrt{(x-\mu)^2}}\right]}{da}f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

$$(49)\qquad f(x)=\frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{x_0}^{x}\frac{d\left[ae^{-ar(x-\mu)}\right]}{da}f(\mu)\,d\mu\,dr$$

$$+\frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{x}^{X}\frac{d\left[ae^{ar(x-\mu)}\right]}{da}f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

Lorsque, dans les formules (27), (40), (48) et (49), on suppose $x_0=-\infty$, $X=\infty$, on obtient les équations

$$(50)\qquad f(x)=$$

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left\{(a+b\sqrt{-1})e^{-(a+b\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2}}-(a+c\sqrt{-1})e^{-(a+c\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2}}\right\}f(\mu)\frac{d\mu\,dr}{2(B+A\sqrt{-1})},$$

$$(51)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{r(x-\mu)\sqrt{-1}}f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

$$(52)\qquad f(x)=\frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\left[ae^{-ar\sqrt{(x-\mu)^2}}\right]}{da}f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

$$(53)\qquad f(x)=\frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{x}\frac{d\left[ae^{-ar(x-\mu)}\right]}{da}f(\mu)\,d\mu\,dr + \frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{x}^{\infty}\frac{d\left[ae^{ar(x-\mu)}\right]}{da}f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

qui subsistent, pour toutes les valeurs positives ou négatives de la variable x.

Concevons à présent que l'on prenne $x_0 = 0$, $X=\infty$. Alors, si l'on attribue à la variable x une valeur positive, on tirera des équations (39) et (48)

$$(54)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos r(x-\mu).f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

$$(55)\qquad f(x)=\frac{a}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{d\left[ae^{-ar\sqrt{(x-\mu)^2}}\right]}{da}f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

De plus, on conclura des formules (41) et (47), en remplaçant x par $-x$,

$$(56)\qquad 0=\int_0^\infty\int_0^\infty \cos r(x+\mu).f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

$$(57)\qquad 0=\int_0^\infty\int_0^\infty [1-ar(x+\mu)]e^{-ar(x+\mu)}f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

Si d'ailleurs on a égard aux équations

$$(58)\qquad \begin{cases}\cos r(x-\mu)=\cos rx.\cos r\mu+\sin rx \sin r\mu,\\ \cos r(x+\mu)=\cos rx.\cos r\mu-\sin rx.\sin r\mu,\end{cases}$$

on tirera des formules (54) et (56), combinées entre elles,

$$(59)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos rx.\cos r\mu.f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

$$(60)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin rx.\sin r\mu.f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

Ces deux dernières formules sont celles que M. Fourier a données dans ses Recherches

sur la théorie de la chaleur. On peut s'en servir pour intégrer des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants. Mais, pour rendre la méthode d'intégration plus générale, il convient de substituer aux deux formules dont il s'agit l'équation (40) ou (51), ainsi que je l'ai remarqué dans le 19.e cahier du journal de l'École royale polytechnique : [voyez aussi le Bulletin de la Société philomatique pour l'année 1821, et l'Analyse des travaux de l'Académie des sciences pendant la même année.] Ajoutons que, dans beaucoup de cas, il sera utile d'employer, au lieu des formules (40) ou (51), les équations (27), (50), (52), (53). C'est ce que j'expliquerai plus en détail dans un autre article.

Une observation essentielle à faire, c'est qu'on peut établir directement les formules (27) et (34) avec celles qui s'en déduisent, en effectuant d'abord dans chacune de ces formules l'intégration relative à la variable r, après avoir multiplié la fonction sous le signe $\int$ par l'exponentielle $e^{-\epsilon r}$, et en considérant ϵ comme un nombre infiniment petit que l'on devra réduire à zéro, quand les intégrations seront achevées. Ainsi, par exemple, en opérant de cette manière, et posant $a(x-\mu)=\epsilon s$, on reconnaîtra que le second membre de la formule (43) est équivalent au produit

$$f(x)\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+s}-\frac{s}{(1+s)^2}\right\} ds = f(x)\int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^2} = f(x).$$

Si l'on intègre, par rapport à la quantité a, et à partir de $a=c$, les deux membres de l'équation (49), on en tirera

$$(61)\qquad \int_0^\infty \int_{x_0}^X \left\{ae^{-ar\sqrt{(x-\mu)^2}} - e^{-cr\sqrt{(x-\mu)^2}}\right\} f(\mu)\, d\mu\, dr = 2f(x).\mathrm{l}\left(\frac{a}{c}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(62)\qquad f(x) = \frac{1}{2\,\mathrm{l}\left(\frac{a}{c}\right)} \int_0^\infty \int_{x_0}^X \left\{ae^{-ar\sqrt{(x-\mu)^2}} - ce^{-cr\sqrt{(x-\mu)^2}}\right\} f(\mu)\, d\mu\, dr,$$

c étant positif, ainsi que a. On peut aisément vérifier la formule (61). Car, si l'on fait, pour abréger,

$$(63)\qquad \mathrm{f}(r) = r\int_{x_0}^X e^{-r\sqrt{(x-\mu)^2}} f(\mu)\, d\mu,$$

on trouvera, en posant $\mu - x = \frac{s}{r}$, et $r=\infty$,

(64) $$\mathrm{f}(\infty)=f(x)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{s}ds+\int_{0}^{\infty}e^{-s}ds\right\}=2f(x);$$

et par suite la formule (61) sera réduite à

(65) $$\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(ar)-\mathrm{f}(cr)}{r}dr=\mathrm{f}(\infty)\,\mathrm{l}\left(\frac{a}{c}\right).$$

Comme on aura d'ailleurs $\mathrm{f}(0)=0$, il est clair que l'équation (65) pourra encore être présentée sous la forme

(66) $$\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(ar)-\mathrm{f}(cr)}{r}dr=[\mathrm{f}(\infty)-\mathrm{f}(0)]\,\mathrm{l}\left(\frac{a}{c}\right).$$

Or, cette dernière, qui comprend, comme cas particulier, l'équation connue

(67) $$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-ar}-e^{-cr}}{r}dr=\mathrm{l}\left(\frac{c}{a}\right),$$

et qui coïncide, quand $\mathrm{f}(\infty)$ s'évanouit, avec une formule que j'ai donnée dans le 19.ᵉ Cahier du Journal de l'École polytechnique [voyez la formule (c), page 576], se déduit aisément, ainsi que M. Ostrogradsky, en a fait la remarque, de l'équation

(68) $$\int_{0}^{\infty}\mathrm{f}'(ar)\,dr=\frac{\mathrm{f}(\infty)-\mathrm{f}(0)}{a}$$

intégrée par rapport à la quantité a. On pourrait au reste établir l'équation (66), aussi bien que la formule dont il s'agit, à l'aide de la théorie des intégrales singulières.

L'équation (62) subsiste seulement pour les valeurs de x comprises entre les limites $x=x_0$, $x=X$. Le second membre s'évanouirait, si la valeur de x devenait inférieure ou supérieure aux deux limites dont il s'agit; et il se réduirait à $\frac{1}{2}f(x)$, si l'on avait $x=x_0$ ou $x=X$. On trouverait en effet, dans le premier cas, $\mathrm{f}(\infty)=0$, et dans les deux derniers $\mathrm{f}(\infty)=f(x)$. Si l'on prenait $x_0=-\infty$, $X=\infty$, alors on aurait, pour des valeurs quelconques de x,

(69) $$f(x)=\frac{1}{2\,\mathrm{l}\left(\frac{a}{c}\right)}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ae^{-ar\sqrt{(x-\mu)^2}}-ce^{-cr\sqrt{(x-\mu)^2}}\right\}f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

ou, ce qui revient au même,

(70) $$f(x)=\frac{1}{2\,\mathrm{l}\left(\frac{a}{c}\right)}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{x}\left\{ae^{-ar(x-\mu)}-ce^{-cr(x-\mu)}\right\}f(\mu)\,d\mu\,dr,$$

$$-\frac{1}{2\,\mathrm{l}\left(\frac{a}{c}\right)}\int_0^\infty\int_x^\infty\left\{ae^{ar(x-\mu)}-ce^{cr(x-\mu)}\right\}f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

Ces dernières formules peuvent être utilement employées dans l'intégration des équations aux différences partielles.

Si, dans la formule (36), on prenait $a=b=1$, on trouverait, en supposant la variable x renfermée entre les limites x_0, X,

(71) $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_{x_0}^{X}e^{-r\sqrt{(x-\mu)^2}}\left\{\cos.r\sqrt{(x-\mu)^2}-\sin.r\sqrt{(x-\mu)^2}\right\}f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

Il est facile de vérifiér directement la formule (71), dans certains cas particuliers, par exemple, dans ceux où l'on supposerait $f(x)=e^{-x}$, $f(x)=\cos x$, etc.....

On pourrait encore déduire de la formule (1) une multitude d'équations analogues aux formules (27) et (34). Supposons, par exemple, les fonctions $\varphi(p,r)$, $\chi(p,r)$, et $f(t)$ tellement choisies que l'on ait

$$\varphi(p,0)=0,\qquad \chi(p,0)=0,\qquad \varphi(p,\infty)=0,\qquad \Delta=0.$$

Alors, si l'on prend

$$p_0=c,\qquad P=b,\qquad r_0=0,\qquad R=\frac{1}{\varepsilon},$$

ε désignant un nombre infiniment petit, on tirera de l'équation (1)

(72) $$\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{d[\varphi(b,r)+\sqrt{-1}\,\chi(b,r)]}{dr}f[\varphi(b,r)+\sqrt{-1}\,\chi(b,r)].dr\\&-\int_0^\infty\frac{d[\varphi(b,r)+\sqrt{-1}\,\chi(c,r)]}{dr}f[\varphi(c,r)+\sqrt{-1}\,\chi(c,r)].dr\\&=\int_b^c\frac{d\left[\varphi\left(p,\frac{1}{\varepsilon}\right)+\sqrt{-1}\,\chi\left(p,\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{dp}f\left\{\varphi\left(p,\frac{1}{\varepsilon}\right)+\sqrt{-1}\,\chi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\}dp.\end{aligned}\right.$$

Si maintenant on suppose

(73)
$$f(t)=\int_{x_0}^{X} e^{-t\sqrt{(x-\mu)^2}} f(\mu)\,d\mu,$$

et, si l'on fait pour abréger

(74)
$$B+A\sqrt{-1}=\int_c^b \frac{d\left[\varphi\left(p,\frac{1}{\varepsilon}\right)+\sqrt{-1}\,\chi\left(p,\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{dp}\,\frac{dp}{\varphi\left(p,\frac{1}{\varepsilon}\right)+\sqrt{-1}\,\chi\left(p,\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

on tirera de l'équation (72), par des raisonnements semblables à ceux que nous avons employés pour établir la formule (27),

(75)
$$f(x)=$$
$$\frac{1}{2(B+A\sqrt{-1})}\int_0^{\infty}\int_{x_0}^{X}\frac{d[\varphi(b,r)+\sqrt{-1}\,\chi(b,r)]}{dr}\,e^{-[\varphi(b,r)+\sqrt{-1}\,\chi(b,r)]\sqrt{(x-\mu)^2}} f(\mu)\,d\mu\,dr$$
$$-\frac{1}{2(B+A\sqrt{-1})}\int_0^{\infty}\int_{x_0}^{X}\frac{d[\varphi(c,r)+\sqrt{-1}\,\chi(c,r)]}{dr}\,e^{-[\varphi(c,r)+\sqrt{-1}\,\chi(c,r)]\sqrt{(x-\mu)^2}} f(\mu)\,d\mu\,dr.$$

La formule (75) subsiste, comme la formule (27), pour des valeurs de x comprises entre les limites x_0, X. Le second membre deviendrait égal à zéro, si la variable x était située hors des limites x_0, X, et à $\frac{1}{2}f(x)$, si l'on avait $x=x_0$, ou $x=X$.

Je terminerai cet article en observant que l'on déduirait immédiatement la formule (1) de l'équation identique

(76)
$$\frac{d\left[f(t)\frac{dt}{dp}\right]}{dr}=\frac{d\left[f(t)\frac{dt}{dr}\right]}{dp},$$

dans laquelle $t=\varphi(p,r)+\sqrt{-1}\,\chi(p,r)$, si l'on intégrait les deux membres de cette équation par rapport à la variable p entre les limites $p=p_0$, $p=P$, et par rapport à la variable r entre les limites $r=r_0$, $r=R$. Alors, pour déterminer Δ, il suffirait de remplacer chaque intégrale relative à r par sa valeur principale, et de recourir à la théorie des intégrales singulières. Au reste, les applications que nous avons faites ci-dessus de la formule (1), n'exigent pas que l'on calcule la valeur de Δ, puisqu'elles se rapportent au cas dans lequel on a simplement $\Delta=0$.

DE LA DIFFÉRENCIATION SOUS LE SIGNE $\int$.

Soit $f(x,a)$ une fonction quelconque de x et de a. Soient d'ailleurs x_0, X deux valeurs réelles de la variable x. Si l'on pose

(1) $$\int_{x_0}^{X} f(x,a)\,dx = A,$$

on en conclura généralement, à l'aide de la différenciation sous le signe $\int$,

(2) $$\int_{x_0}^{X} \frac{d^n f(x,a)}{da^n}\,dx = \frac{d^n A}{da^n},$$

n désignant un nombre entier quelconque. Néanmoins, si la fonction $f(x,a)$ devient infinie pour une valeur de x renfermée entre les limites x_0, X des intégrales comprises dans les formules (1) et (2), et si, afin de lever toute incertitude sur l'évaluation de ces intégrales, qui seront le plus souvent indéterminées, on réduit chacune d'elles à sa valeur principale, l'équation (2) pourra devenir inexacte. Mais, pour trouver la cause de cette inexactitude, et fournir les moyens d'y remédier, il suffira, comme nous l'avons observé dans le 19.e Cahier du Journal de l'École royale polytechnique, de substituer à l'intégrale

(3) $$\int_{x_0}^{X} f(x,a)\,dx$$

la somme dont la valeur principale est la limite.

Supposons, pour fixer les idées,

(4) $$f(x,a) = \frac{1}{x-a}, \qquad x_0 = 0, \qquad X = 1,$$

a désignant une quantité positive et inférieure à l'unité. Les équations (1) et (2) se réduiront aux suivantes

(5) $$\int_0^1 \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(1-a)^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}a^2 = \mathrm{l}\left(\frac{1-a}{a}\right),$$

$$(6)\qquad \int_0^1 \frac{dx}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^n \mathrm{l}\left(\frac{1-a}{a}\right)}{da^n},$$

dont la dernière deviendra inexacte, si l'on prend pour n un nombre impair, puisqu'alors l'intégrale comprise dans le premier membre aura une valeur infinie. Mais, pour obtenir la correction que devra subir, dans cette hypothèse, la formule (6), il suffira de présenter l'équation (5) sous la forme

$$(7)\qquad \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{x-a} + \int_{a+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x-a} = \mathrm{l}\left(\frac{1-a}{a}\right),$$

ε désignant un nombre infiniment petit. Alors, en effectuant n différenciations relatives à la quantité a, on trouvera

$$(8)\qquad \int_0^{a-\varepsilon} \frac{d^n\left(\frac{1}{x-a}\right)}{da^n}dx + \int_{a+\varepsilon}^1 \frac{d^n\left(\frac{1}{x-a}\right)}{da^n}dx - 1.2.3\ldots(n-1)\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n - \left(\frac{1}{-\varepsilon}\right)^n\right\} = \frac{d^n \mathrm{l}\left(\frac{1-a}{a}\right)}{da^n}.$$

On aura donc généralement

$$(9)\qquad \int_0^1 \frac{d^n\left(\frac{1}{x-a}\right)}{da^n}dx = \frac{d^n \mathrm{l}\left(\frac{1-a}{a}\right)}{da^n} + 1.2.3\ldots(n-1)\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n - \left(\frac{1}{-\varepsilon}\right)^n\right\},$$

pourvu que l'on réduise l'intégrale

$$(10)\qquad \int_0^1 \frac{d^n\left(\frac{1}{x-a}\right)}{da^n}dx$$

à sa valeur principale. Si, dans la formule (9), on attribue au nombre entier n une valeur paire, on retrouvera précisément l'équation (6). Mais, si l'on prend pour n un nombre impair, la même formule donnera

$$(11)\qquad \int_0^1 \frac{d^n\left(\frac{1}{x-a}\right)}{da^n}dx = \frac{d^n \mathrm{l}\left(\frac{1-a}{a}\right)}{da^n} + 1.2.3\ldots(n-1)\,\frac{2}{\varepsilon^n} = \infty,$$

ce qui est exact.

Supposons encore

$$(12) \qquad f(x,a)=\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{f(x,y,z,\ldots)}{F(x-a,y-b,z-c,\ldots)}\ldots dz\,dy,$$

y_0, Y désignant deux fonctions de la variable x; z_0, Z deux fonctions des variables x, y; etc....; et $F(x,y,z,\ldots)$ une fonction homogène de x, y, z,... dont le degré soit inférieur d'une unité au nombre m des variables x, y, z,...... Concevons d'ailleurs que le système des valeurs

$$(13) \qquad x=a, \quad y=b, \quad z=c, \quad \text{etc.}\ldots$$

soit un de ceux que les variables x, y, z,... peuvent prendre en demeurant comprises entre les limites

$$(14) \qquad x=x_0, \quad x=X; \quad y=y_0, \quad y=Y; \quad z=z_0, \quad z=Z; \quad \text{etc.}\ldots$$

Dans cette hypothèse, l'équation (1), réduite à la forme

$$(15) \qquad A=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{f(x,y,z,\ldots)}{F(x-a,y-b,z-c,\ldots)}\ldots dz\,dy\,dx,$$

pourra s'écrire comme il suit

$$(16) \qquad A=$$

$$\int_{x_0}^{a-\varepsilon}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{f(x,y,z,\ldots)}{F(x-a,y-b,z-c,\ldots)}\ldots dz\,dy\,dx+\int_{a+\varepsilon}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{f(x,y,z,\ldots)}{F(x-a,y-b,z-c,\ldots)}\ldots dz\,dy\,dx.$$

Soit maintenant Δ la différence entre les deux valeurs que prend l'intégrale (12), quand on y pose successivement $x=a+\varepsilon$, $x=a-\varepsilon$. En différenciant l'équation (16) par rapport à la quantité a, et faisant, pour abréger,

$$(17) \qquad P=\frac{1}{F(x-a,y-b,z-c,\ldots)},$$

on trouvera

$$(18) \qquad \frac{dA}{da}=$$

$$\int_{x_0}^{a-\varepsilon}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{dP}{da}f(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx+\int_{a+\varepsilon}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{dP}{da}f(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx-\Delta,$$

On aura donc

(19) $$\frac{dA}{da} = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{dP}{da}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx - \Delta,$$

pourvu que l'on réduise l'intégrale multiple

(20) $$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{dP}{da}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx$$

à sa valeur principale.

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de la différence représentée par Δ. Or, soit δ un nombre infiniment petit qui varie avec ε, et admettons que, δ étant considéré comme un infiniment petit du premier ordre, ε soit d'un ordre plus élevé. Le rapport

(21) $$i = \frac{\varepsilon}{\delta}$$

s'évanouira en même temps que δ. Soient d'ailleurs V, W des quantités qui ne soient pas toutes comprises entre les limites -1, $+1$. Comme l'expression

(22) $$\frac{\mathrm{f}(a+i\delta,\, b+V\delta,\, c+W\delta,\ldots)}{\mathrm{F}(i\delta,\, V\delta,\, W\delta,\ldots)} - \frac{\mathrm{f}(a-i\delta,\, b+V\delta,\, c+W\delta,\ldots)}{\mathrm{F}(-i\delta,\, V\delta,\, W\delta,\ldots)}$$

deviendra rigoureusement nulle, si l'on suppose $i=0$; elle sera sensiblement nulle, dès que l'on prendra pour i une quantité infiniment petite d'un ordre suffisamment élevé: et par conséquent on pourra établir entre les deux facteurs δ et i du produit

(23) $$\varepsilon = i\delta$$

une relation telle que l'expression

(24) $$\frac{\mathrm{f}(a+\varepsilon,y,z,\ldots)}{\mathrm{F}(\varepsilon,\, y-b,\, z-c,\ldots)} - \frac{\mathrm{f}(a-\varepsilon,y,z,\ldots)}{\mathrm{F}(-\varepsilon,\, y-b,\, z-c,\ldots)}$$

s'évanouisse à très-peu près pour toutes les valeurs de $y-b$, $z-c$,... non comprises entre les deux limites $-\delta$, $+\delta$. Cette condition étant supposée remplie, il est clair que la quantité Δ différera très-peu de l'intégrale singulière

(25) $$\int_{b-\delta}^{b+\delta}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\ldots\left\{\frac{\mathrm{f}(a+\varepsilon,y,z,\ldots)}{\mathrm{F}(\varepsilon,\, y-b,\, z-c,\ldots)} - \frac{\mathrm{f}(a-\varepsilon,y,z,\ldots)}{\mathrm{F}(-\varepsilon,\, y-b,\, z-c,\ldots)}\right\}\ldots dz\,dy.$$

Donc, si l'on fait pour plus de commodité

$$(26) \qquad y = b + \varepsilon v, \qquad z = c + \varepsilon w, \ldots$$

et si l'on observe que la fonction homogène $F(x, y, z, \ldots)$, étant par hypothèse du degré $m - 1$, vérifie l'équation

$$(27) \qquad F(\pm \varepsilon, \varepsilon v, \varepsilon w, \ldots) = \varepsilon^{m-1} F(\pm 1, v, w, \ldots),$$

on trouvera sans erreur sensible

$$(28) \qquad \Delta = \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \cdots \left\{ \frac{f(a+\varepsilon, b+\varepsilon v, c+\varepsilon w, \ldots)}{F(1, v, w, \ldots)} - \frac{f(a-\varepsilon, b+\varepsilon v, c+\varepsilon w, \ldots)}{F(-1, v, w, \ldots)} \right\} \ldots dw\, dv.$$

En réduisant ε à zéro dans la formule qui précède, et en faisant, pour abréger,

$$(29) \qquad k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \left\{ \frac{1}{F(1, v, w, \ldots)} - \frac{1}{F(-1, v, w, \ldots)} \right\} \ldots dw\, dv,$$

on en conclura

$$(30) \qquad \Delta = k . f(a, b, c, \ldots).$$

Par suite, l'équation (20) donnera

$$(31) \qquad \frac{dA}{da} = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \cdots \frac{dP}{da} f(x, y, z, \ldots) \ldots dz\, dy\, dx - k f(a, b, c, \ldots).$$

Si la fonction P était déterminée, non par la formule (17), mais par celle-ci

$$(32) \qquad P = \frac{1}{F\left(\frac{x-a}{\lambda}, \frac{y-b}{\mu}, \frac{z-c}{\nu}, \ldots\right)},$$

λ, μ, ν désignant des quantités constantes, alors, en posant

$$(33) \qquad y = b + \frac{\mu}{\lambda} \varepsilon v, \qquad z = c + \frac{\nu}{\lambda} \varepsilon w, \quad \text{etc.} \ldots,$$

et raisonnant toujours de la même manière, on trouverait, à la place des équations (30) et (31)

$$(34) \qquad \Delta = \mu\nu \ldots k\,\mathrm{f}(a,b,c,\ldots),$$

$$(35) \qquad \frac{dA}{da} = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots \frac{dP}{da}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx - \mu\nu\ldots k\,\mathrm{f}(a,b,c,\ldots).$$

Si les valeurs $x=a$, $y=b$, $z=c$,... cessaient d'être renfermées entre les limites $x=x_0$, $x=X$; $y=y_0$, $y=Y$; $z=z_0$, $z=Z$; ... ou, si la fonction homogène $\mathrm{F}(x,y,z,\ldots)$ était d'un degré inférieur à $m-1$, la différence représentée par Δ dans les formules précédentes disparaîtrait ou s'évanouirait; et l'on aurait simplement

$$(36) \qquad \frac{dA}{da} = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots \frac{dR}{da}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx.$$

Si, au contraire, la fonction homogène $\mathrm{F}(x,y,z,\ldots)$ était d'un degré supérieur à $m-1$, la quantité Δ deviendrait généralement infinie en même temps que l'intégrale (25); et par conséquent l'équation (19) donnerait, pour des valeurs de a, b, c... renfermées entre les limites $x=x_0$, $x=X$; $y=y_0$, $y=Y$; $z=z_0$, $z=Z$; etc. ...,

$$(37) \qquad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots \frac{dP}{da}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx = \pm\infty.$$

Nous observerons encore que, si l'on différencie la valeur de A déterminée par l'équation (16), non plus, par rapport à la quantité a, mais par rapport à l'une des quantités b, c,... on trouvera simplement, et quel que soit le degré de la fonction homogène $\mathrm{F}(x,y,z,\ldots)$,

$$(38) \qquad \begin{cases} \dfrac{dA}{db} = \displaystyle\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots \frac{dP}{db}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx, \\ \dfrac{dA}{dc} = \displaystyle\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots \frac{dP}{dc}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx, \\ \text{etc.} \ldots, \end{cases}$$

pourvu que, dans l'évaluation des seconds membres des formules (38), chacune des intégrales relatives à x soit réduite à sa valeur principale.

Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, supposons

$$(39) \qquad S = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots \frac{\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx}{\left\{\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y-b}{\mu}\right)^2+\left(\frac{z-c}{\nu}\right)^2+\ldots\right\}^{\frac{m}{2}-1}},$$

et de plus

(40) $$A=\frac{dS}{da},\qquad B=\frac{dS}{db},\qquad C=\frac{dS}{dc},\qquad \text{etc...},$$

m désignant toujours le nombre des variables $x, y, z, \ldots$ et $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ des quantités constantes. Si l'on fait, pour abréger,

(41) $$R=\frac{1}{\left\{\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y-b}{\mu}\right)^2+\left(\frac{z-c}{\nu}\right)^2+\ldots\right\}^{\frac{m}{2}-1}},$$

on aura

(42) $$S=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots R\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx;$$

et, comme l'expression

(43) $$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{m}{2}-1}$$

est une fonction homogène du degré $m-2$, on tirera des formules (36) et (38)

(44) $$\begin{cases} A=\dfrac{dS}{da}=\displaystyle\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{dR}{da}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx, \\ B=\dfrac{dS}{db}=\displaystyle\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{dR}{db}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx, \\ C=\dfrac{dS}{dc}=\displaystyle\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{dR}{dc}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx. \\ \text{etc. ....} \end{cases}$$

On trouvera d'ailleurs

(45) $$\begin{cases} \dfrac{dR}{da}=\dfrac{m-2}{\lambda^2}\,\dfrac{x-a}{\left\{\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y-b}{\mu}\right)^2+\left(\frac{z-c}{\nu}\right)^2+\ldots\right\}^{\frac{m}{2}}}, \\ \dfrac{dR}{db}=\dfrac{m-2}{\mu^2}\,\dfrac{y-b}{\left\{\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y-b}{\mu}\right)^2+\left(\frac{z-c}{\nu}\right)^2+\ldots\right\}^{\frac{m}{2}}}, \\ \dfrac{dR}{dc}=\dfrac{m-2}{\nu^2}\,\dfrac{z-c}{\left\{\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y-b}{\mu}\right)^2+\left(\frac{z-c}{\nu}\right)^2+\ldots\right\}^{\frac{m}{2}}}, \\ \text{etc. ...;} \end{cases}$$

et, comme l'expression

$$(46)\qquad \frac{\lambda}{m-2}\,\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{m}{2}}}{x}$$

sera une fonction homogène du degré $m-1$, on aura encore, en vertu des formules (35) et (38),

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{dA}{da} &= \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{d^2R}{da^2}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx - \mu\nu\ldots k\,\mathrm{f}(a,b,c,\ldots).\\
\frac{dB}{db} &= \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{d^2R}{db^2}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx,\\
\frac{dC}{dc} &= \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{d^2R}{dc^2}\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx,\\
&\text{etc.}\ \ldots,
\end{aligned}\right.$$

pourvu que, dans les seconds membres des équations (47), on remplace chaque intégrale relative à x par sa valeur principale. Ajoutons que la constante k sera déterminée par la formule (29), dans laquelle on devra substituer à $F(x,y,z,\ldots)$ l'expression (46). On aura donc

$$(48)\qquad k=\frac{2(m-2)}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ldots dw\,dv}{(1+v^2+w^2+\ldots)^{\frac{m}{2}}}.$$

Si maintenant on observe qu'on a, pour des valeurs positives de n et de t,

$$(49)\qquad \int_0^{\infty} s^{n-1}e^{-st} = \frac{\Gamma(n)}{t^n},$$

$$(50)\qquad \frac{1}{t^n}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} s^{n-1}e^{-st}\,ds,$$

et par suit

$$(51)\qquad \frac{1}{(1+v^2+w^2+\ldots)^{\frac{m}{2}}}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^{\infty} s^{\frac{m}{2}-1}e^{-s(1+v^2+w^2+\ldots)}\,ds,$$

on tirera de l'équation (49)

(52) $$k=\frac{2(m-2)}{\lambda\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{0}^{\infty} s^{\frac{m}{2}-1}e^{-s(1+v^2+w^2+\dots)}\,ds\dots dw\,dv,$$

puis, en ayant égard à la formule

(53) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv^2}\,dv=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sw^2}\,dw=\dots=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}},$$

on trouvera définitivement

(54) $$k=\frac{2(m-2)\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\lambda\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_{0}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}}e^{-s}\,ds=\frac{2(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{\lambda\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

En d'autres termes, on aura, pour des valeurs paires du nombre entier m,

(55) $$k=\frac{2(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{1.2.3\dots\frac{m-2}{2}\lambda},$$

et, pour des valeurs impaires de m,

(56) $$k=\frac{2(m-2)\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{m-2}{2}\lambda}.$$

Concevons maintenant que l'on différencie la première des équations (45) par rapport à la quantité a, la seconde par rapport à b, la troisième par rapport à c, etc... puis, qu'on ajoute ces mêmes équations ainsi différenciées, après les avoir respectivement multipliées par les facteurs λ^2, μ^2, ν^2, etc.... On trouvera

(57) $$\lambda^2\frac{d^2R}{da^2}+\mu^2\frac{d^2R}{db^2}+\nu^2\frac{d^2R}{dc^2}+\dots=0.$$

Cela posé, on tirera des équations (47) et (54)

(58) $$\lambda^2\frac{dA}{da}+\mu^2\frac{dB}{db}+\nu^2\frac{dC}{dc}+\dots=-\frac{2(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\lambda\mu\nu\dots f(a,b,c,\dots);$$

puis on en conclura, en ayant égard aux formules (40),

$$(59)\qquad \lambda^2\frac{d^2S}{da^2}+\mu^2\frac{d^2S}{db^2}+\nu^2\frac{d^2S}{dc^2}+\ldots=-\frac{2(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\lambda\mu\nu\ldots\mathrm{f}(a,b,c,\ldots).$$

En conséquence, la valeur de S, déterminée par la formule (39), vérifiera, pour des valeurs paires de m, l'équation aux différences partielles

$$(60)\qquad \lambda^2\frac{d^2S}{da^2}+\mu^2\frac{d^2S}{db^2}+\nu^2\frac{d^2S}{dc^2}+\ldots=-\frac{2(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{1.2.3\ldots\frac{m-2}{2}}\lambda\mu\nu\ldots\mathrm{f}(a,b,c,\ldots),$$

et, pour des valeurs impaires de m, l'équation

$$(61)\qquad \lambda^2\frac{d^2S}{da^2}+\mu^2\frac{d^2S}{db^2}+\nu^2\frac{d^2S}{dc^2}+\ldots=-\frac{2(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\ldots\frac{m-2}{2}}\lambda\mu\nu\ldots\mathrm{f}(a,b,c,\ldots).$$

Les équations (60) et (61) supposent, comme la première des formules (47), que les valeurs $x=a$, $y=b$, $z=c,\ldots$ sont renfermées entre les limites des intégrations indiquées dans la formule (39). Si le contraire arrivait, il faudrait à la première des formules (47) substituer l'équation

$$(62)\qquad \frac{dA}{da}=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots\frac{d^2R}{da^2}\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx,$$

et l'on aurait par suite

$$(63)\qquad \lambda^2\frac{d^2S}{da^2}+\mu^2\frac{d^2S}{db^2}+\nu^2\frac{d^2S}{dc^2}+\ldots=0,$$

Il ne sera pas inutile de remarquer que l'une des équations (59) ou (63) serait encore vérifiée, si la valeur de S était donnée, non par la formule (39) ou (42), mais par la suivante

$$(64)\qquad S=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\ldots(Q+R)\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\ldots dz\,dy\,dx,$$

Q désignant une fonction qui renfermerait, avec x, y, z, les quantités a, b, $c,\ldots$ et qui serait du premier degré seulement par rapport à chacune de ces quantités. Si l'on supposait en particulier

$$(65)\qquad Q=-1,\qquad\text{et}\qquad \mathrm{f}(x,y,z,\ldots)=\frac{f(x,y,z,\ldots)}{1-\frac{m}{2}},$$

on tirerait de l'équation (64) réunie à la formule (41)

(66) $$S=$$

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\dots\frac{\left\{\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y-b}{\mu}\right)^2+\left(\frac{z-c}{\nu}\right)^2+\dots\right\}^{1-\frac{m}{2}}-1}{1-\frac{m}{2}}f(x,y,z,\dots)\dots dz\,dy\,dx,$$

puis, en prenant $m=2$,

(67) $$S=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\mathrm{l}\left\{\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y-b}{\mu}\right)^2\right\}f(x,y)\,dy\,dx.$$

Alors aussi l'équation (59) donnera

(68) $$\lambda^2\frac{d^2S}{da^2}+\mu^2\frac{d^2S}{db^2}=4\pi\lambda\mu f(a,b),$$

tandis que l'équation (63) deviendra

(69) $$\lambda^2\frac{d^2S}{da^2}+\mu^2\frac{d^2S}{db^2}=0,$$

Donc la valeur de S, déterminée par la formule (67), vérifie l'équation (68), lorsque les quantités a, b représentent des valeurs de x et de y comprises entre les limites $x=x_0$, $x=X$; $y=y_0$, $y=Y$; et l'équation (69) dans le cas contraire.

Lorsqu'on suppose $m=3$, la valeur de S, donnée par la formule (39), se réduit à

(70) $$S=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\frac{\mathrm{f}(x,y,z)}{\left\{\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y-b}{\mu}\right)^2+\left(\frac{z-c}{\nu}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}dz\,dy\,dx,$$

Alors aussi l'on tire des formules (54) et (59)

(71) $$k=\frac{4\pi}{\lambda},$$

(72) $$\lambda^2\frac{d^2S}{da^2}+\mu^2\frac{d^2S}{db^2}+\nu^2\frac{d^2S}{dc^2}=-4\pi\lambda\mu\nu\,\mathrm{f}(a,b,c),$$

tandis que la formule (63) devient

(73) $$\lambda^2 \frac{d^2S}{da^2} + \mu^2 \frac{d^2S}{db^2} + \nu^2 \frac{d^2S}{dc^2} = 0.$$

On déduit aisément des principes que nous venons d'exposer une des propriétés les plus remarquables de l'intégrale triple qui sert à la détermination des composantes rectangulaires de l'attraction exercée par une masse quelconque M sur un point matériel pris au-dedans ou au-dehors de cette masse. En effet, soient a, b, c les coordonnées rectangulaires du point matériel dont il s'agit, x, y, z celles d'un point quelconque de la masse M, $f(x,y,z)$ la densité de M au point (x,y,z), et

(74) $$r = \sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}$$

la distance respective des deux points (x,y,z) et (a,b,c). Désignons en outre par Δx, Δy, Δz des accroissements très-petits attribués aux variables x, y, z, par m un élément de masse renfermé entre six plans menés parallèlement aux plans coordonnés par les points (x,y,z), $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$; et supposons la masse M terminée par deux plans perpendiculaires à l'axe des x, deux surfaces cylindriques perpendiculaires au plan des x, y, et deux surfaces courbes dont les équations soient respectivement

(75) $$x = x_0,\quad x = X;\qquad y = y_0,\quad y = Y;\qquad z = z_0,\quad z = Z.$$

On aura, sans erreur sensible,

(76) $$m = f(x,y,z)\,\Delta x \Delta y \Delta z;$$

et, si l'on nomme λ l'attraction qu'exerceraient l'une sur l'autre deux masses représentées par l'unité, et placées à l'unité de distance,

(77) $$\frac{\lambda m}{r^2} = \frac{\lambda}{r^2} f(x,y,z)\,\Delta x \Delta y \Delta z$$

sera la force accélératrice qui mesurera l'attraction exercée par la molécule m sur le point (a,b,c) placé à la distance r de cette molécule. De plus, comme le rayon vecteur r, mené du point (a,b,c) au point (x,y,z), formera évidemment, avec les demi-axes des coordonnées positives, des angles qui auront pour cosinus les trois rapports

(78) $$\frac{x-a}{r} = -\frac{dr}{da},\qquad \frac{y-b}{r} = -\frac{dr}{db},\qquad \frac{z-c}{r} = -\frac{dr}{dc},$$

les projections algébriques de la force accélératrice dont il s'agit sur les mêmes axes se trouveront représentées par les trois produits

$$(79)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda \frac{x-a}{r^3} f(x,y,z)\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{d\left(\frac{\lambda}{r}\right)}{da} f(x,y,z)\Delta x \Delta y \Delta z, \\ &\lambda \frac{y-b}{r^3} f(x,y,z)\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{d\left(\frac{\lambda}{r}\right)}{db} f(x,y,z)\Delta x \Delta y \Delta z, \\ &\lambda \frac{z-c}{r^3} f(x,y,z)\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{d\left(\frac{\lambda}{r}\right)}{dc} f(x,y,z)\Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned} \right.$$

Donc, si l'on nomme A, B, C les projections algébriques de la force accélératrice qui mesure l'attraction exercée par la masse M sur le point (a, b, c), on aura

$$(80)\qquad A = \frac{dS}{da}, \qquad B = \frac{dS}{db}, \qquad C = \frac{dS}{dc}.$$

la valeur de S étant donnée par la formule

$$(81)\qquad S = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \frac{\lambda f(x,y,z)}{r}\, dz\, dy\, dx.$$

Or, la valeur précédente de S, étant celle que fournit l'équation (70), quand on suppose $\lambda = \mu = \nu$, vérifiera nécessairement l'une des équations (72) ou (73), réduites par cette supposition aux deux formules

$$(82)\qquad \frac{d^2 S}{da^2} + \frac{d^2 S}{db^2} + \frac{d^2 S}{dc^2} = -4\pi\lambda f(a,b,c),$$

$$(83)\qquad \frac{d^2 S}{da^2} + \frac{d^2 S}{db^2} + \frac{d^2 S}{dc^2} = 0,$$

savoir, la formule (82), si le point (a, b, c) est situé au-dehors de la masse M, et la formule (83) dans le cas contraire. En d'autres termes, on aura, dans le premier cas,

$$(84)\qquad \frac{dA}{da} + \frac{dB}{db} + \frac{dC}{dc} = -4\pi\lambda f(a,b,c),$$

et dans le second

$$\frac{dA}{da}+\frac{dB}{db}+\frac{dC}{dc}=0\,, \tag{85}$$

L'équation (83) était connue depuis long-temps. Quant à l'équation (82), M. Poisson l'a démontrée dans le Bulletin de la Société Philomatique de décembre 1813; et M. Ostrogradsky a remarqué le premier qu'elle pouvait se déduire des principes que j'avais établis relativement à la différenciation sous le signe $\int$ dans le 19.e cahier du Journal de l'École royale polytechnique.

Tout ce qui a été dit ci-dessus montre comment on doit modifier la formule (2), dans le cas où la fonction $f(x,a)$ devient infinie pour $x=a$. Il serait également facile de trouver la correction que devrait subir cette formule, si la fonction $f(x,a)$, ou l'une des fonctions dérivées

$$\frac{df(x,a)}{da}\,,\quad \frac{d^2f(x,a)}{da^2}\,,\quad \frac{d^3f(x,a)}{da^3}\,,\quad \text{etc.}\ldots$$

devenait discontinue pour $x=a$, en conservant néanmoins une valeur finie. Supposons, pour fixer les idées,

$$f(x,a)=e^{c\sqrt{(x-a)^2}}\,, \tag{86}$$

c désignant une quantité constante. Dans cette hypothèse, la fonction dérivée

$$\frac{df(x,a)}{da}=c\,\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2}}\,e^{c\sqrt{(x-a)^2}}\,\mathrm{f}(x) \tag{87}$$

deviendra discontinue pour $x=a$, en passant brusquement de la valeur $-\mathrm{f}(a)$ à la valeur $+\mathrm{f}(a)$. De plus on trouvera généralement

$$\frac{d^nf(x,a)}{da^n}=c^n\left(\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2}}\right)^n e^{c\sqrt{(x-a)^2}}\,\mathrm{f}(x)\,, \tag{88}$$

et l'on aura en conséquence, 1.° pour des valeurs paires de n,

$$\frac{d^nf(x,a)}{da^n}=c^n e^{c\sqrt{(x-a)^2}}\,\mathrm{f}(x)\,, \tag{89}$$

2.° pour des valeurs impaires de n,

(90) $$\frac{d^n f(x,a)}{da^n} = c^n \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2}} e^{c\sqrt{(x-a)^2}} \mathrm{f}(x),$$

d'où il résulte que les dérivées d'ordre impair de $f(x,a)$, prises par rapport à la quantité a, offriront toutes, pour $x=a$, une solution de continuité. Cela posé, si l'on fait

(91) $$A = \int_{x_0}^{X} f(x,a)\,dx = \int_{x_0}^{X} e^{c\sqrt{(x-a)^2}} \mathrm{f}(x)\,dx,$$

et si l'on suppose la valeur de a comprise entre les limites x_0, X, la formule (2) deviendra inexacte, dès que l'on aura $n > 1$. Mais, pour corriger cette formule, il suffira de recourir aux considérations que nous allons indiquer.

L'équation (91) peut s'écrire comme il suit

(92) $$A = \int_{x_0}^{a} e^{c(a-x)} \mathrm{f}(x)\,dx + \int_{a}^{X} e^{c(x-a)} \mathrm{f}(x)\,dx.$$

Or, si l'on différencie la formule (92) plusieurs fois de suite par rapport à la quantité a, on en tirera

(93) $$\left\{\begin{aligned}
\frac{dA}{da} &= \int_{x_0}^{a} c e^{c(a-x)} \mathrm{f}(x)\,dx - \int_{a}^{X} c e^{c(x-a)} \mathrm{f}(x)\,dx,\\
\frac{d^2A}{da^2} &= \int_{x_0}^{a} c^2 e^{c(a-x)} \mathrm{f}(x)\,dx + \int_{a}^{X} c^2 e^{c(x-a)} \mathrm{f}(x)\,dx + 2c\mathrm{f}(a),\\
\frac{d^3A}{da^3} &= \int_{x_0}^{a} c^3 e^{c(a-x)} \mathrm{f}(x)\,dx - \int_{a}^{X} c^3 e^{c(x-a)} \mathrm{f}(x)\,dx + 2c\mathrm{f}'(a),\\
\frac{d^4A}{da^4} &= \int_{x_0}^{a} c^4 e^{c(a-x)} \mathrm{f}(x)\,dx + \int_{a}^{X} c^4 e^{c(x-a)} \mathrm{f}(x)\,dx + 2c\mathrm{f}''(a) + 2c^3\mathrm{f}(a),\\
&\text{etc.}\ldots
\end{aligned}\right.$$

On aura donc

(94) $$\frac{dA}{da} = \int_{x_0}^{X} c \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2}} e^{c\sqrt{(x-a)^2}} \mathrm{f}(x)\,dx,$$

de sorte que la formule (2) sera vérifiée pour $n=1$. Mais, en supposant $n > 1$, on trouvera

$$\text{(95)} \qquad \frac{d^n A}{da^n} = \int_{x_0}^{x} c^n \left(\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2}} \right)^n e^{c\sqrt{(x-a)^2}} \, \mathrm{f}(x)\, dx + \Delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{(96)} \qquad \frac{d^n A}{da^n} = \int_{x_0}^{X} \frac{d^n f(x,a)}{da^n} dx + \Delta,$$

la valeur de Δ étant donnée par l'équation

$$\text{(97)} \qquad \Delta = 2c[\mathrm{f}^{(n-2)}(a) + c^2 \mathrm{f}^{(n-4)}(a) + c^4 \mathrm{f}^{(n-6)}(a) + \ldots],$$

dans laquelle la suite

$$\text{(98)} \qquad \mathrm{f}^{(n-2)}(a), \quad c^2 \mathrm{f}^{(n-4)}(a), \quad c^4 \mathrm{f}^{(n-6)}(a), \ldots$$

s'arrête au terme qui renferme l'une des deux fonctions $\mathrm{f}(a)$, $\mathrm{f}'(a)$.

Dans le cas particulier où les fonctions

$$\mathrm{f}(x), \quad \mathrm{f}'(x), \quad \mathrm{f}''(x), \ldots \mathrm{f}^{(m)}(x)$$

s'évanouissent pour $x = a$, les valeurs de

$$\frac{d^2 A}{da^2}, \quad \frac{d^3 A}{da^3}, \quad \frac{d^4 A}{da^4}, \ldots \frac{d^{m+2} A}{da^{m+2}},$$

tirées de l'équation (95), se réduisent à celles que fournirait l'équation (2).

SUR LES FONCTIONS RÉCIPROQUES.

Soit x une variable réelle et positive, et $f(x)$ une fonction quelconque de cette variable. Il résulte des formules (59) et (60) [page 120], données pour la première fois par M. Fourier, que, si l'on suppose

(1) $$\varphi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \cos rx . f(r)\, dr,$$

on aura réciproquement

(3) $$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \cos rx . \varphi(r)\, dr;$$

et que, si l'on suppose

(3) $$\psi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \sin rx . f(r)\, dr,$$

on aura réciproquement

(4) $$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \sin rx . \psi(r)\, dr.$$

On voit donc ici se manifester une loi de réciprocité, 1.° entre les fonctions f et φ, 2.° entre les fonctions f et ψ; de telle sorte que chacune des équations (1) et (3) subsiste quand on échange entre elles les fonctions f et φ, ou f et ψ. C'est pour cette raison que, dans le Bulletin de la Société philomatique d'août 1817, j'ai désigné les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sous le nom de *fonctions réciproques de première espèce*, et les fonctions $f(x)$, $\psi(x)$ sous le nom de *fonctions réciproques de seconde espèce.* Ces deux espèces de fonctions peuvent être, ainsi que les formules citées de M. Fourier, employées avec avantage dans la solution d'un grand nombre de problèmes, et jouissent de propriétés importantes que je vais rappeler en peu de mots.

D'abord, en différenciant plusieurs fois de suite par rapport à x l'équation (1), on reconnaît facilement que, si

$$\varphi(x) \quad \text{et} \quad f(x)$$

sont deux fonctions réciproques de première espèce,

$$\varphi''(x) \quad \text{et} \quad -x^2 f(x)$$

seront encore deux fonctions réciproques de première espèce, et qu'il en sera de même des fonctions

$$\varphi^{\text{IV}}(x) \quad \text{et} \quad x^4 f(x),$$

$$\varphi^{\text{VI}}(x) \quad \text{et} \quad -x^6 f(x),$$

etc....

$$\varphi^{(2n)}(x) \quad \text{et} \quad (-1)^n x^{2n} f(x),$$

Au contraire

$$\varphi'(x) \quad \text{et} \quad x f(x),$$

$$\varphi'''(x) \quad \text{et} \quad -x^3 f(x),$$

etc....

$$\varphi^{(2n+1)}(x) \quad \text{et} \quad (-1)^n x^{2n+1} f(x)$$

seront des fonctions réciproques de seconde espèce. On arriverait à des conclusions analogues, en différenciant plusieurs fois de suite, par rapport à x, les deux membres de l'équation (3).

De même, en désignant par k une constante réelle, on reconnaîtra sans peine que, si

$$\varphi(x) \quad \text{et} \quad f(x)$$

sont deux fonctions réciproques de première espèce, la fonction

$$f(x)\cos kx$$

aura pour réciproque de première espèce

$$\frac{\varphi[\sqrt{(x+k)^2}]+\varphi[\sqrt{(x-k)^2}]}{2};$$

tandis que la fonction

$$f(x)\sin kx$$

aura pour réciproque de seconde espèce

$$\frac{\varphi[\sqrt{(x-k)^2}]-\varphi[\sqrt{(x+k)^2}]}{2}.$$

On peut observer encore que, si $f(x)$ et $\chi(x)$ sont deux fonctions réciproques de

première ou de seconde espèce, $a f(x)$ et $a \chi(x)$ seront réciproques de même espèce, a étant une constante prise à volonté.

Lorsqu'on pose

(5) $$f(x) = x^{m-1} e^{-ax},$$

a et m désignant deux constantes positives, on tire des équations (15) de la page 114

(6) $$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty r^{m-1} e^{-ar} \cos rx \,.\, dr = \frac{\Gamma(m)}{(a^2+x^2)^{\frac{m}{2}}} \cos\left\{ m \arctang \frac{x}{a} \right\}, \\ &\int_0^\infty r^{m-1} e^{-ar} \sin rx \,.\, dr = \frac{\Gamma(m)}{(a^2+x^2)^{\frac{m}{2}}} \sin\left\{ m \arctang \frac{x}{a} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Or, de ces dernières formules, comparées aux équations (1) et (3), il résulte évidemment que la fonction (5) a pour réciproque de première espèce

(7) $$\varphi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(m)}{(a^2+x^2)^{\frac{m}{2}}} \cos\left\{ m \arctang \frac{x}{a} \right\} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(a-x\sqrt{-1})^{-m}+(a+x\sqrt{-1})^{-m}}{2} \Gamma(m),$$

et pour réciproque de seconde espèce

(8) $$\psi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(m)}{(a^2+x^2)^{\frac{m}{2}}} \sin\left\{ m \arctang \frac{x}{a} \right\} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(a-x\sqrt{-1})^{-m}-(a+x\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}} \Gamma(m).$$

Par suite, en prenant pour b une constante réelle, on conclura sans peine, des remarques précédemment faites, que la fonction

(9) $$f(x) = x^{m-1} e^{-ax} \cos bx$$

a pour réciproque de première espèce

(10) $$\varphi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{[a-(b+x)\sqrt{-1}]^{-m}+[a+(b+x)\sqrt{-1}]^{-m}+[a-(b-x)\sqrt{-1}]^{-m}+[a+(b-x)\sqrt{-1}]^{-m}}{4} \Gamma(m),$$

tandis que la fonction

(11) $$f(x) = x^{m-1} e^{-ax} \sin bx$$

a pour réciproque de seconde espèce

(12) $$\psi(x) =$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{[a-(b+x)\sqrt{-1}]^{-m}+[a+(b+x)\sqrt{-1}]^{-m}-[a-(b-x)\sqrt{-1}]^{-m}-[a+(b-x)\sqrt{-1})]^{-m}}{4}\,\Gamma(m).$$

Dans le cas particulier où l'on prend $m=1$, la fonction (5), réduite à la forme

(13) $$f(x) = e^{-ax},$$

a pour réciproque de première espèce

(14) $$\varphi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a}{x^2+a^2},$$

et pour réciproque de seconde espèce

(15) $$\psi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2+a^2}.$$

Concevons maintenant que, dans l'équation (33) de la page 104 du premier volume, on pose successivement

$$f(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)} e^{rx\sqrt{-1}}, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{f}(-x)}{\mathrm{F}(-x)} e^{rx\sqrt{-1}},$$

$\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(x)}$ désignant une fraction rationnelle. On en tirera, en échangeant entre elles les variables x et r,

(16) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(r)}{\mathrm{F}(r)} e^{rx\sqrt{-1}} dr = 2\pi\sqrt{-1} \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\mathcal{E}}} \underset{0}{\overset{\infty}{}} \frac{\mathrm{f}(r).e^{rx\sqrt{-1}}}{((\mathrm{F}(r)))};$$

et

(17) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(-r)}{\mathrm{F}(-r)} e^{rx\sqrt{-1}} dr = 2\pi\sqrt{-1} \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\mathcal{E}}} \underset{0}{\overset{\infty}{}} \frac{\mathrm{f}(-r).e^{rx\sqrt{-1}}}{((\mathrm{F}(-r)))},$$

ou, ce qui revient au même,

(18) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(r)}{\mathrm{F}(r)} e^{-rx\sqrt{-1}} dr = 2\pi\sqrt{-1} \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\mathcal{E}}} \underset{0}{\overset{\infty}{}} \frac{\mathrm{f}(-r).e^{rx\sqrt{-1}}}{((\mathrm{F}(-r)))}.$$

De plus, on conclura des formules (16) et (18), combinées entre elles par voie d'addition et de soustraction,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r)}{F(r)} \cos rx\, dr = \pi\sqrt{-1}\, {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty} \left\{ \frac{f(r)}{F(r)} + \frac{f(r)}{F(r)} \right\} e^{rx\sqrt{-1}}, \quad \text{et} \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r)}{F(r)} \sin rx\, dr = \pi\sqrt{-1}\, {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty} \left\{ \frac{f(r)}{F(r)} - \frac{f(r)}{F(r)} \right\} e^{rx\sqrt{-1}}, \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{f(r)}{F(r)} + \frac{f(-r)}{F(-r)} \right\} \cos rx\, dr = \pi\sqrt{-1}\, {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty} \left\{ \frac{f(r)}{F(r)} + \frac{f(-r)}{F(-r)} \right\} e^{rx\sqrt{-1}}, \text{ et} \\ &\int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{f(r)}{F(r)} - \frac{f(-r)}{F(-r)} \right\} \sin rx\, dr = \pi\sqrt{-1}\, {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty} \left\{ \frac{f(r)}{F(r)} - \frac{f(-r)}{F(-r)} \right\} e^{rx\sqrt{-1}}. \end{aligned}\right.$$

Or, il résulte évidemment des équations précédentes que la fonction

$$(21)\qquad f(x) = \frac{f(x)}{F(x)} + \frac{f(-x)}{F(-x)}$$

a pour réciproque de première espèce

$$(22)\qquad \varphi(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\, {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty} \left\{ \frac{f(r)}{F(r)} + \frac{f(-r)}{F(-r)} \right\} e^{rx\sqrt{-1}},$$

tandis que la fonction

$$(23)\qquad f(x) = \frac{f(x)}{F(x)} - \frac{f(-x)}{F(-x)}$$

a pour réciproque de seconde espèce

$$(24)\qquad \psi(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\, {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty} \left\{ \frac{f(r)}{F(r)} - \frac{f(-r)}{F(-r)} \right\} e^{rx\sqrt{-1}}.$$

Concevons enfin que l'on prenne

$$(25)\qquad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

L'équation (15) de la page 56 du premier volume donnera

$$(26)\qquad \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cos rx\, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Par conséquent la fonction (16) se confond avec sa réciproque de première espèce. Il est aisé d'en conclure que la fonction

$$(27)\qquad f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cos kx\,,$$

a pour réciproque de première espèce

$$(28)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{2}\left\{e^{-\frac{(x+k)^2}{2}}+e^{-\frac{(x-k)^2}{2}}\right\}.$$

Les principaux usages auxquels on peut employer les fonctions réciproques, ou les formules de M. Fourier déjà citées, sont ceux dont nous allons faire mention.

Premièrement elles servent à la détermination des intégrales définies. Ainsi, par exemple, en prenant pour $f(x)$ la fonction (5), on tirera des équations (2), (7) et (8)

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{(a-r\sqrt{-1})^{-m}+(a+r\sqrt{-1})^{-m}}{2}\cos rx\,dr=\frac{\pi}{2\Gamma(m)}\,x^{m-1}e^{-ax},\\ &\int_0^\infty \frac{(a-r\sqrt{-1})^{-m}-(a+r\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}\sin rx\,dr=\frac{\pi}{2\Gamma(m)}\,x^{m-1}e^{-ax};\end{aligned}\right.$$

puis on conclura des formules (29), combinées entre elles par voie d'addition et de soustraction,

$$(30)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{rx\sqrt{-1}}\,dr}{(a+r\sqrt{-1})^m}=\frac{2\pi}{\Gamma(m)}\,x^{m-1}e^{-ax},$$

$$(31)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{rx\sqrt{-1}}\,dr}{(a-r\sqrt{-1})^m}=0.$$

Ajoutons que, si l'on différencie les formules (29), (30) ou (31) par rapport à l'une des quantités x ou m, ou par rapport à toutes les deux, on en déduira de nouvelles équations dignes de remarque. Ainsi, par exemple, en désignant par n un nombre entier quelconque, on trouvera

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{(a-r\sqrt{-1})^{-m}+(a+r\sqrt{-1})^{-m}}{2}\,r^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+rx\right)dr=\frac{\pi}{2\Gamma(m)}\,\frac{d^n(x^{m-1}e^{-ax})}{dx^n},\\ &\int_0^\infty \frac{(a-r\sqrt{-1})^{-m}-(a+r\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}\,r^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+rx\right)dr=\frac{\pi}{2\Gamma(m)}\,\frac{d^n(x^{m-1}e^{-ax})}{dx^n};\end{aligned}\right.$$

puis, en ayant égard à la formule (25) de la page 61 du premier volume, on tirera des équations (30) et (31),

$$(33)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{l}(a+r\sqrt{-1})}{(a+r\sqrt{-1})^m}\, e^{rx\sqrt{-1}}\, dr = \frac{2\pi}{\Gamma(m)}\, x^{m-1} e^{-ax} \left\{ \int_0^1 \frac{1-z^{m-1}}{1-z}\, dz - c - \mathrm{l}(x) \right\}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{l}(a-r\sqrt{-1})}{(a-r\sqrt{-1})^m}\, e^{rx\sqrt{-1}}\, dr = 0, \end{cases}$$

c désignant la constante dont Euler fait mention à la page 444 de son Calcul différentiel, et dont la valeur approchée est $0{,}577216\ldots$

J'ai donné les formules (29) au commencement de 1815, dans un Mémoire où elles étaient appliquées à la conversion des différences finies des puissances positives en intégrales définies. On peut, au reste, opérer cette conversion en s'appuyant ou sur la formule (30), ou sur une autre qui s'accorde avec elle, et qui a été donnée par M. Laplace.

Lorsque, dans les équations (29), on pose $m = 1$, on obtient les formules

$$(34)\quad \int_0^{\infty} \cos rx \frac{a\,dx}{a^2+r^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \qquad \int_0^{\infty} \sin rx \frac{r\,dx}{a^2+r^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ax},$$

qui ont été données par M. Laplace, et qui se trouvent comprises l'une et l'autre dans les équations (20).

Les fonctions réciproques peuvent encore servir à transformer les intégrales aux différences finies, et les sommes des séries, quand la loi de leurs termes est connue, en intégrales définies ordinaires. En effet, si l'on pose $\Delta x = h$, et si l'on désigne par x_0, X deux valeurs de x tellement choisies que la différence $X - x_0$ soit un multiple de h, on aura, en vertu des équations (2) et (4),

$$(35)\quad \sum_{x_0}^{X} f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(rX - \frac{rh}{2}\right) - \sin\left(rx_0 - \frac{rh}{2}\right)}{2\sin\frac{rh}{2}}\, \varphi(r)\, dr,$$

et

$$(36)\quad \sum_{x_0}^{X} f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(rx_0 - \frac{rh}{2}\right) - \cos\left(rX - \frac{rh}{2}\right)}{2\sin\frac{rh}{2}}\, (r)\, dr.$$

De même, si l'on représente par z une variable comprise entre les limites -1,

$+1$, et par α une quantité constante, on déduira sans peine de l'équation (2) ou (3) les sommes des séries

(37) $$f(0),\quad zf(1),\quad z^2f(2),\quad z^3f(3),\quad \text{etc.}\dots,$$

et

(38) $$f(0),\quad zf(\alpha),\quad z^2f(2\alpha),\quad z^3f(3\alpha),\quad \text{etc.}\dots$$

On trouvera, par exemple, en considérant la seconde de ces deux séries,

(39) $$f(0)+zf(\alpha)+z^2f(2\alpha)+\dots=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty (1+z\cos\alpha r+z^2\cos 2\alpha r+\dots)\varphi(r)\,dr,$$

et

(40) $$zf(\alpha)+z^2f(2\alpha)+\dots\dots\dots\dots=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty (z\sin\alpha r+z^2\sin 2\alpha r+\dots\dots)\psi(r)\,dr.$$

On a d'ailleurs, en supposant $z^2<1$,

(41) $$\begin{cases}(1+z\cos\alpha r+z^2\cos 2\alpha r+\dots)+(z\sin\alpha r+z^2\sin 2\alpha r+\dots)\sqrt{-1}\\ \qquad =1+ze^{\alpha r\sqrt{-1}}+z^2e^{2\alpha r\sqrt{-1}}+\dots\\ =\dfrac{1}{1-ze^{\alpha r\sqrt{-1}}}=\dfrac{1}{1-z\cos\alpha r-z\sin\alpha r.\sqrt{-1}}=\dfrac{1-z\cos\alpha r}{1-2z\cos\alpha r+z^2}+\dfrac{z\sin\alpha r}{1-2z\cos\alpha r+z^2}\sqrt{-1},\end{cases}$$

et par suite

(42) $$\begin{cases}1+z\cos\alpha r+z^2\cos 2\alpha r+\dots=\dfrac{1-z\cos\alpha r}{1-2z\cos\alpha r+z^2},\\ z\sin\alpha r+z^2\sin 2\alpha r+\dots\dots\dots=\dfrac{z\sin\alpha r}{1-2z\cos\alpha r+z^2}.\end{cases}$$

Cela posé, on conclura des formules (39) et (40)

(43) $$f(0)+zf(\alpha)+z^2f(2\alpha)+\dots=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{1-z\cos\alpha r}{1-2z\cos\alpha r+z^2}\,\varphi(r)\,dr,$$

et

(44) $$zf(\alpha)+z^2f(2\alpha)+\dots\dots\dots\dots=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{z\sin\alpha r}{1-2z\cos\alpha r+z^2}\,\psi(r)\,dr.$$

Si, dans l'équation (44), on réduit z à l'unité, on trouvera

(45) $$f(\alpha)+f(2\alpha)+\ldots=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \psi(r).\cot\frac{\alpha r}{2}.\,dr.$$

Ainsi, la sommation de la série

(46) $$f(\alpha),\quad f(2\alpha),\quad f(3\alpha),\quad \text{etc.}\ldots$$

se trouve rámenée à l'évaluation de l'intégrale définie

(47) $$\int_0^\infty \psi(r)\cot\frac{\alpha r}{2}.\,dr.$$

A la vérité, cette intégrale a une valeur générale indéterminée, attendu que la fonction sous le signe $\int$ devient infinie, avec le facteur $\cot\frac{\alpha r}{2}$, pour toutes les valeurs de r propres à vérifier l'équation

(48) $$\sin\frac{\alpha r}{2}=0,$$

et par conséquent, pour les valeurs de r de la forme

(49) $$r=\frac{2n\pi}{\alpha},$$

n étant un nombre entier quelconque. Mais il est facile de s'assurer, comme on le verra ci-après, que, dans l'équation (45), l'intégrale dont il s'agit doit être réduite à sa valeur principale.

Si l'on prend

(50) $$z=1-\varepsilon,$$

ε désignant un nombre infiniment petit, on trouvera

(51) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{1-z\cos\alpha r}{1-2z\cos\alpha r+z^2}=\frac{1}{2}+\frac{1-z^2}{2}\,\frac{1}{1-2z\cos\alpha r+z^2}=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2},\\&\frac{z\sin\alpha r}{1-2z\cos\alpha r+z^2}=(1-\varepsilon)\,\frac{\sin\alpha r}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}.\end{aligned}\right.$$

Par suite, si l'on a égard à la formule

$$f(0)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \varphi(r)\,dr, \tag{52}$$

on tirera des équations (43) et (44)

$$\frac{1}{2}f(0)+f(\alpha)+f(2\alpha)+\ldots=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_0^\infty \frac{\varepsilon\varphi(r).dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}, \tag{53}$$

$$f(\alpha)+f(2\alpha)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)\int_0^\infty \frac{\psi(r).\sin\alpha r.dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}. \tag{54}$$

De plus, si l'on désigne par δ un nombre qui s'évanouisse avec ε, on aura encore

$$\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\varepsilon\varphi(r)dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}=A+\int_\delta^{\frac{2\pi}{\alpha}-\delta}\frac{\varepsilon\varphi(r)dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}\\ &+\int_{\frac{2\pi}{\alpha}+\delta}^{\frac{4\pi}{\alpha}-\delta}\frac{\varepsilon\varphi(r)dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}+\int_{\frac{4\pi}{\alpha}+\delta}^{\frac{6\pi}{\alpha}-\delta}\frac{\varepsilon\varphi(r)dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}+\ldots,\end{aligned}\right. \tag{55}$$

et

$$\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\psi(r)\sin\alpha r\,dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}=B+\int_\delta^{\frac{2\pi}{\alpha}-\delta}\frac{\psi(r)\sin\alpha r\,dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}\\ &+\int_{\frac{2\pi}{\alpha}+\delta}^{\frac{2\pi}{\alpha}-\delta}\frac{\psi(r)\sin\alpha r\,dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}+\int_{\frac{4\pi}{\alpha}-\delta}^{\frac{4\pi}{\alpha}+\delta}\frac{\psi(r)\sin\alpha r\,dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}+\ldots;\end{aligned}\right. \tag{56}$$

A et B étant les sommes d'intégrales singulières que déterminent les équations

$$A=\int_0^\delta \frac{\varepsilon\varphi(r)dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{\frac{2n\pi}{\alpha}-\delta}^{\frac{2n\pi}{\alpha}+\delta}\frac{\varepsilon\varphi(r)dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}, \tag{57}$$

$$B=\int_0^\delta \frac{\psi(r)\sin\alpha r\,dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{\frac{2n\pi}{\alpha}-\delta}^{\frac{2n\pi}{\alpha}+\delta}\frac{\psi(r)\sin\alpha r\,dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}, \tag{58}$$

et le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs positives du nombre entier n.

D'ailleurs, dans chacune des intégrales que renferme le second membre de l'équation (55), la fonction sous le signe $\int$ est le produit des deux facteurs

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}, \qquad \text{et} \qquad \varphi(r)$$

dont le premier reste, pour toutes les valeurs de r comprises entre les limites de l'intégration, inférieur au rapport

(59)
$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha\delta}{2}\right)^2}=\frac{\frac{\varepsilon}{\delta^2}}{\varepsilon\frac{\varepsilon}{\delta^2}+(1-\varepsilon)\left(\frac{2}{\delta}\sin\frac{\alpha\delta}{2}\right)^2}.$$

Or, ce rapport sera sensiblement nul, si, δ étant considéré comme infiniment petit du premier ordre, on prend pour ε une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur à 2, par exemple, si l'on suppose

$$\varepsilon=\delta^4, \qquad \text{ou} \qquad \delta=\varepsilon^{\frac{1}{4}}.$$

Par conséquent, dans cette hypothèse, les intégrales que renferme le second membre de la formule (55) seront nulles à très-peu près, et l'on aura, sans erreur sensible,

(60)
$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon\varphi(r)\,dr}{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\left(2\sin\frac{\alpha r}{2}\right)^2}=A.$$

Dans la même hypothèse, en prenant

$$r=\varepsilon s, \qquad \text{ou} \qquad r=\frac{2n\pi}{\alpha}+\varepsilon s,$$

on tirera des formules (57) et (58)

(61)
$$A=\int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}}\frac{\varphi(\varepsilon s)\,ds}{1+(1-\varepsilon)\left(\frac{2}{\varepsilon}\sin\frac{\alpha\varepsilon s}{2}\right)^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}}\frac{\varphi\left(\frac{2n\pi}{\alpha}+\varepsilon s\right)ds}{1+(1-\varepsilon)\left(\frac{2}{\varepsilon}\sin\frac{\alpha\varepsilon s}{2}\right)^2},$$

(62)
$$B=\int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon s)\sin\alpha\varepsilon s.\,ds}{1+(1-\varepsilon)\left(\frac{2}{\varepsilon}\sin\frac{\alpha\varepsilon s}{2}\right)^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{2n\pi}{\alpha}+\varepsilon s\right)\sin\alpha\varepsilon s\,ds}{1+(1-\varepsilon)\left(\frac{2}{\varepsilon}\sin\frac{\alpha\varepsilon s}{2}\right)^2};$$

puis, en réduisant ε à zéro, $\psi(\varepsilon s)$ à $\psi(0)=0$, et l'intégrale

(63) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha s\,ds}{1+\alpha^2 s^2}$$

à sa valeur principale, c'est-à-dire à zéro, l'on trouvera définitivement

(64) $$A=\varphi(0)\int_0^{\infty} \frac{ds}{1+\alpha^2 s^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi\left(\frac{2n\pi}{\alpha}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{1+\alpha^2 s^2},$$

ou plus simplement

(65) $$A=\frac{\pi}{\alpha}\left\{\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)+\varphi\left(\frac{4\pi}{\alpha}\right)+\ldots\right\},$$

et

(66) $$B=\sum_{n=1}^{n=\infty} \psi\left(\frac{2n\pi}{\alpha}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha s\,ds}{1+\alpha^2 s^2}=0.$$

Faisons maintenant, pour abréger, $\frac{2\pi}{\alpha}=\beta$, en sorte qu'on ait

(67) $$\alpha\beta=2\pi.$$

Il est clair que, pour des valeurs décroissantes de ε, les seconds membres des formules (55) et (56) convergeront vers deux limites équivalentes, la première à la quantité

(68) $$A=\frac{\pi}{\alpha}\left\{\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi(\beta)+\varphi(2\beta)+\ldots\right\},$$

la seconde à la valeur principale de l'intégrale définie

(69) $$\int_0^{\infty} \frac{\psi(r).\sin\alpha r}{4\sin^2\frac{\alpha r}{2}}\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \varphi(r).\cot\frac{\alpha r}{2}.\,dr.$$

Donc, la formule (54) pourra être remplacée par l'équation (45), et la formule (55) donnera

(70) $$\frac{1}{2}f(0)+f(\alpha)+f(2\alpha)+=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\alpha}\left\{\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi(\beta)+\varphi(2\beta)+\ldots\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(71)\quad \alpha^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}f(0)+f(\alpha)+f(2\alpha)+\ldots\right\}=\beta^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi(\beta)+\varphi(2\beta)+\ldots\right\}$$

Ainsi, l'équation (71) subsiste entre les fonctions réciproques de première espèce, désignées par les lettres f et φ, toutes les fois que les nombres α et β vérifient la formule (67).

Si, dans l'équation (71), on remplace la fonction $f(x)$ par le produit

$$f(x)\cos\theta x,$$

θ désignant une constante réelle, on devra, en vertu d'une remarque précédemment faite, remplacer en même temps la fonction $\varphi(x)$ par la demi-somme

$$(72)\quad \frac{\varphi[\sqrt{(x+\theta)^2}]+\varphi[\sqrt{(x-\theta)^2}]}{2};$$

et l'on aura par suite, pour toutes les valeurs de θ comprises entre les limites $0, \beta$,

$$(73)\quad \alpha^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}f(0)+f(\alpha)\cos\theta\alpha+f(2\alpha)\cos2\theta\alpha+\ldots\right\}=\frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{2}}\left\{\varphi(\theta)+\varphi(\beta-\theta)+\varphi(\beta+\theta)+\varphi(2\beta-\theta)+\ldots\right\}$$

Lorsque, dans les équations (71) et (73), on pose $\alpha=1$, β se réduit à 2π, et l'on trouve

$$(74)\quad \frac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi(2\pi)+\varphi(4\pi)+\ldots\right\},$$

$$(75)\quad \frac{1}{2}f(0)+f(1)\cos\theta+f(2)\cos2\theta+\ldots=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\varphi(\theta)+\varphi(2\pi-\theta)+\varphi(2\pi+\theta)+\varphi(4\pi-\theta)+\varphi(4\pi+\theta)+\ldots\right\}$$

La formule (75) subsiste seulement pour les valeurs de θ renfermées entre les limites $0, 2\pi$. Si l'on y remplace l'arc θ par l'arc $\theta+\pi$, on en tirera, pour toutes les valeurs de θ comprises entre les limites $-\pi, +\pi$

$$(76)\quad \frac{1}{2}f(0)-f(1)\cos\theta+f(2)\cos2\theta-\ldots=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\varphi(\pi-\theta)+\varphi(\pi+\theta)+\varphi(3\pi-\theta)+\varphi(3\pi+\theta)+\ldots\right\}.$$

Appliquons maintenant les formules que nous venons de trouver à quelques exemples, et d'abord supposons les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, déterminées par les équations (5), (7), (8). Alors on tirera des formules (45), (71) et (73), 1.° en supposant $m>1$,

$$(77)\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty \frac{(a-r\sqrt{-1})^{-m}-(a+r\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}\cot\frac{\alpha r}{2}\,dr\\ \displaystyle=\int_0^\infty \sin\left(m\,\text{arctang}\,\frac{r}{a}\right)\cot\frac{\alpha r}{2}\,\frac{dr}{(a^2+r^2)^{\frac{m}{2}}}\\ \displaystyle=\frac{\pi}{\Gamma(m)}\alpha^{m-1}(e^{-a\alpha}+2^{m-1}e^{-2a\alpha}+3^{m-1}e^{-3a\alpha}+\ldots),\end{cases}$$

$$(78)\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{2}a^{-m}+\frac{(a-\beta\sqrt{-1})^{-m}+(a+\beta\sqrt{-1})^{-m}}{2}+\frac{(a-2\beta\sqrt{-1})^{-m}+(a+2\beta\sqrt{-1})^{-m}}{2}+\ldots\\ \displaystyle=\frac{1}{2a^m}+\frac{\cos\left(m\,\text{arctang}\,\frac{\beta}{a}\right)}{(a^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}}}+\frac{\cos\left(m\,\text{arctang}\,\frac{2\beta}{a}\right)}{(a^2+4\beta^2)^{\frac{m}{2}}}+\frac{\cos\left(m\,\text{arctang}\,\frac{3\beta}{a}\right)}{(a^2+9\beta^2)^{\frac{m}{2}}}+\ldots\\ \displaystyle=\frac{\alpha^m}{2\Gamma(m)}\left\{e^{-a\alpha}+2^{m-1}e^{-2a\alpha}+3^{m-1}e^{-3a\alpha}+\ldots\right\},\end{cases}$$

$$(79)\begin{cases}\displaystyle\frac{(a-\theta\sqrt{-1})^{-m}+(a+\theta\sqrt{-1})^{-m}}{2}+\frac{[a-(\beta-\theta)\sqrt{-1}]^{-m}+[a+(\beta-\theta)\sqrt{-1}]^{-m}}{2}+\ldots\\ \displaystyle=\frac{\cos\left(m\,\text{arctang}\,\frac{\theta}{a}\right)}{(a^2+\theta^2)^{\frac{m}{2}}}+\frac{\cos\left(m\,\text{arctang}\,\frac{\beta-\theta}{a}\right)}{[a^2+(\beta-\theta)^2]^{\frac{m}{2}}}+\frac{\cos\left(m\,\text{arctang}\,\frac{\beta+\theta}{a}\right)}{[a^2+(\beta+\theta)^2]^{\frac{m}{2}}}+\ldots\\ \displaystyle=\frac{\alpha^m}{\Gamma(m)}\left\{e^{-a\alpha}\cos\theta\alpha+2^{m-1}e^{-2a\alpha}\cos2\theta\alpha+3^{m-1}e^{-3a\alpha}\cos3\theta\alpha+\ldots\right\};\end{cases}$$

2.° en prenant $m=1$, et ayant égard à la première des formules (42),

$$(80)\qquad \int_0^\infty \cot\frac{\alpha r}{2}\cdot\frac{r\,dr}{a^2+r^2}=\pi[e^{-a\alpha}+e^{-2a\alpha}+e^{-3a\alpha}+\ldots]=\frac{\pi}{e^{a\alpha}-1},$$

$$(81)\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a^2+\beta^2}+\frac{1}{a^2+4\beta^2}+\frac{1}{a^2+9\beta^2}+\ldots=\frac{\alpha}{2a}\left\{\frac{1}{2}+e^{-a\alpha}+e^{-2a\alpha}+\ldots\right\}=\frac{\alpha}{4a}\,\frac{1+e^{-a\alpha}}{1-e^{-a\alpha}}\\ \displaystyle=\frac{\pi}{2a\beta}\,\frac{e^{\frac{a\pi}{\beta}}+e^{-\frac{a\pi}{\beta}}}{e^{\frac{a\pi}{\beta}}-e^{-\frac{a\pi}{\beta}}}.\end{cases}$$

$$(82)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2+\theta^2}+\dfrac{1}{a^2+(\beta+\theta)^2}+\dfrac{1}{a^2+(\beta+\theta)^2}+\ldots=\dfrac{\alpha}{a}\left\{\dfrac{1}{2}+e^{-a\alpha}\cos\theta\alpha+e^{-2a\alpha}\cos 2\theta\alpha+\ldots\right\} \\[2ex] \qquad =\dfrac{\alpha}{2a}\,\dfrac{1-e^{-2a\alpha}}{1-2e^{-a\alpha}\cos\theta\alpha+e^{-2a\alpha}}=\dfrac{\pi}{a\beta}\,\dfrac{e^{\frac{2a\pi}{\beta}}-e^{-\frac{2a\pi}{\beta}}}{e^{\frac{2a\pi}{\beta}}-2\cos\dfrac{2\theta\pi}{\beta}+e^{-\frac{2a\pi}{\beta}}}\,; \end{cases}$$

Concevons maintenant que l'on échange entre elles les valeurs de $f(x)$ et de $\varphi(x)$, déterminées par les formules (5) et (7), ou les valeurs de $f(x)$ et de $\psi(x)$ déterminées par les formules (5) et (8). Alors on tirera des formules (45) et (73) de nouvelles équations qui se réduiront, pour $m=1$, aux deux suivantes

$$(83)\qquad \int_0^\infty e^{-ar}\cot\frac{ar}{2}\,dr=2\alpha\left\{\frac{1}{a^2+\alpha^2}+\frac{2}{a^2+4\alpha^2}+\frac{3}{a^2+9\alpha^2}+\ldots\right\},$$

$$(84)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{\cos\theta\alpha}{a^2+\alpha^2}+\dfrac{\cos 2\theta\alpha}{a^2+4\alpha^2}+\dfrac{\cos 3\theta\alpha}{a^2+9\alpha^2}+\ldots=\dfrac{\pi}{2a\alpha}\left\{e^{-a\theta}+e^{-a(\beta-\theta)}+e^{-a(\beta+\theta)}+\ldots\right\} \\[2ex] \qquad =\dfrac{\pi}{2a\alpha}\,\dfrac{e^{-a\theta}+e^{-a(\beta-\theta)}}{1-e^{-a\beta}}=\dfrac{\pi}{2a\alpha}\,\dfrac{e^{a\left(\frac{\pi}{\alpha}-\theta\right)}+e^{-a\left(\frac{\pi}{\alpha}-\theta\right)}}{e^{\frac{a\pi}{\alpha}}-e^{-\frac{a\pi}{\alpha}}}. \end{cases}$$

Les formules (79), (82) et (84) supposent le nombre θ renfermé entre les limites 0 et $\beta=\dfrac{2\pi}{\alpha}$.

Considérons encore le cas où les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ se réduisent à la fonction (25). Faisons d'ailleurs

$$(85)\qquad \alpha^2=2a^2,\qquad \beta^2=2b^2,\qquad \theta^2=2\tau^2,$$

l'équation (67) donnera

$$(86)\qquad ab=\pi\,;$$

puis l'on tirera des formules (45), (71), (73),

$$(87)\qquad \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}\cot\frac{ar}{\sqrt{2}}\,dr=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left\{e^{-a^2}+e^{-4a^2}+e^{-9a^2}+\ldots\right\},$$

ou plus simplement

$$(88)\qquad \int_0^\infty e^{-r^2}\cot ar.dr=\pi^{\frac{1}{2}}\left\{e^{-a^2}+e^{-4a^2}+e^{-9a^2}+\ldots\right\};$$

et de plus

$$(89)\quad a^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}e^{-a^2}+e^{-4a^2}+e^{-9a^2}+\dots\right\}=b^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+e^{-9b^2}+\dots\right\},$$

$$(90)\quad a^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}+e^{-a^2}\cos 2a\tau+e^{-4a^2}\cos 4a\tau+\dots\right\}=\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}\left\{e^{-\tau^2}+e^{-(b-\tau)^2}+e^{-(b+\tau)^2}+\dots\right\}.$$

La dernière équation suppose $\tau < b$.

J'ai signalé les formules (71) et (89) avec la méthode par laquelle je viens de les établir, dans le Bulletin de la Société philomathique d'août 1817, et j'ai développé cette méthode dans les Leçons données en 1817 au collège de France. J'ai remarqué d'ailleurs, dans le Bulletin dont il s'agit, qu'on pouvait déduire immédiatement de la formule (71) la sommation des séries qu'Euler a traitées dans son Introduction à l'Analyse des infiniment petits; et de plusieurs autres qui renferment les premières. Telles sont, par exemple, les séries (81), (82), (84), etc......... La formule (89) parut digne d'attention à l'auteur de la mécanique céleste, qui me dit l'avoir vérifiée par une méthode particulière, dans le cas où l'un des nombres a et b est très-petit. Enfin, dans le 19.e Cahier du Journal de l'Ecole polytechnique, et dans un Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies, M. Poisson a reproduit les formules (71) et (89) avec leurs principales conséquences, en s'appuyant aussi, pour établir la formule (71), sur la décomposition d'une intégrale définie en intégrales singulières, c'est-à-dire, en intégrales dont chacune est prise entre des limites infiniment rapprochées de la variable. De plus, il a donné, dans le Mémoire que je viens de citer, la formule (90), en la déduisant de la formule (71).

On pourrait encore se servir des fonctions réciproques, ou des formules de M. Fourier, pour l'intégration des équations aux différences partielles, comme on le fait dans la théorie de la chaleur, dans la théorie des ondes, etc....... Mais, ainsi que je l'ai déjà observé, la méthode d'intégration devient plus facile, lorsqu'aux formules dont il s'agit on substitue l'équation (51) de la page 119. C'est ce que je montrerai plus en détail dans un autre article.



SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS

DE PLUSIEURS VARIABLES EN INTÉGRALES MULTIPLES.

J'ai précédemment indiqué les moyens de transformer une fonction quelconque de la variable x en une intégrale double, dans laquelle cette fonction était remplacée par des exponentielles dont les exposants réels ou imaginaires étaient du premier degré par rapport à x. Les formules auxquelles je suis parvenu de cette manière peuvent être facilement étendues au cas où l'on se proposerait de transformer en une intégrale multiple une fonction de plusieurs variables indépendantes $x, y, z \ldots$. C'est ce que je vais expliquer en peu de mots.

Si, dans les équations (40) et (51) des pages 118 et 119, on écrit $f(x)$, x et λ, au lieu de $f(x)$, r et μ, on trouvera, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites x_0, X,

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda)\, d\lambda\, d\alpha,$$

et, pour des valeurs quelconques de x,

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda)\, d\lambda\, d\alpha.$$

Cela posé, si l'on désigne par $f(x,y)$ une fonction des deux variables indépendantes x, y, on tirera de l'équation (1), 1.° pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites x_0, X,

$$(3) \qquad f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda,y)\, d\lambda\, d\alpha;$$

2.° pour toutes les valeurs de y renfermées entre les limites y_0, Y,

$$(4) \qquad f(\lambda,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y_0}^{Y} e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}} f(\lambda,\mu)\, d\mu\, d\beta.$$

Donc par suite, on aura, pour des valeurs des variables x, y renfermées entre les limites $x = x_0$, $x = X$; $y = y_0$, $y = Y$,

$$(5)\qquad f(x,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}}f(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu\,d\alpha\,d\beta.$$

Par des raisonnements semblables appliqués à une fonction de m variables $x, y, z, \ldots$ on établirait généralement la formule

$$(6)\qquad f(x,y,z,\ldots)=$$
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\int_{z_0}^{Z}\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\ldots e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}}e^{\gamma(z-\nu)\sqrt{-1}}\ldots f(\lambda,\mu,\nu\ldots)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\ldots d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots$$

qui subsiste pour des valeurs de $x, y, z, \ldots$ renfermées entre les limites

$$x=x_0,\quad x=X;\qquad y=y_0,\quad y=Y;\qquad z=z_0,\quad z=Z;\quad \text{etc.}\ldots,$$

et dans laquelle les intégrales relatives aux variables auxiliaires $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sont prises entre les limites $-\infty$, $+\infty$.

Si les quantités $x_0, y_0, z_0 \ldots$ se réduisaient à $-\infty$, et les quantités $X, Y, Z, \ldots$ à $+\infty$, on trouverait, pour des valeurs quelconques des variables $x, y, z, \ldots$

$$(7)\qquad f(x,y,z,\ldots)=$$
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}}e^{\gamma(z-\nu)\sqrt{-1}}\ldots f(\lambda,\mu,\nu,\ldots)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\ldots d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

On étendrait avec la même facilité à des fonctions de plusieurs variables les formules (27), (36), (48), (50), (52), (62), (69), (75) des pages 116 et suivantes. Ainsi, par exemple, en partant de la formule (52) [page 120], on trouverait, pour des valeurs quelconques des variables réelles $x, y, z, \ldots$ et des constantes réelles $a, b, c, \ldots$

$$(8)\qquad f(x,y,z,\ldots)=$$
$$\frac{abc..}{2^m}\,\frac{d^m\int_0^{\infty}..\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}..\int_{-\infty}^{\infty}abc..\,e^{-a\alpha\sqrt{(x-\lambda)^2}}e^{-b\beta\sqrt{(x-\mu)^2}}..f(\lambda,\mu,\nu,..)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu..d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots}{da\,db\,dc..}$$



SUR L'ANALOGIE DES PUISSANCES ET DES DIFFÉRENCES.

§ 1.er *Considérations générales.*

On a reconnu depuis long-temps l'analogie qui existe entre les puissances et les différences des divers ordres finies ou infiniment petites. En suivant cette analogie, et employant une seule caractéristique placée devant une fonction de x, pour indiquer la fonction dérivée, puis, se servant de caractéristiques différentes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ placées devant une fonction u de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ pour indiquer les dérivées de u relatives à ces diverses variables, on se trouve naturellement conduit à représenter une fonction linéaire de u et de ses dérivées successives d'un ordre égal ou inférieur à m, par un produit de la forme

$$(1) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)\, u,$$

$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ désignant une fonction entière du degré m. En étendant cette notation au cas où le degré m devient infini, M. Brisson est parvenu à exprimer les intégrales des équations linéaires à coefficients constants, avec ou sans dernier terme variable, par des formules symboliques* qui méritent d'être remarquées, et qu'il a exposées dans deux Mémoires portant les dates de mai 1821 et de novembre 1823. Le même auteur observe que, si la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ n'est pas développable en série ordonnée suivant les puissances ascendantes, entières et positives de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, on pourra développer cette fonction d'une autre manière, par exemple, en une série dont les différents termes seront proportionnels aux puissances négatives de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; et, pour fixer, dans ce dernier cas, le sens de la notation (1), il propose de considérer, ainsi qu'on l'avait déjà fait, les caractéristiques affectées d'exposants négatifs comme indiquant des dérivées d'ordres négatifs, c'est-à-dire des intégrales des divers ordres. Enfin,

---

* Pour empêcher que l'expression (1) ne puisse être confondue avec un véritable produit, M. Brisson renferme entre deux crochets, l'un supérieur, l'autre inférieur, la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ qu'il place après la lettre u, ainsi qu'il suit

$$u \,.\, \overline{\underline{f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)}}\,.$$

dans le Mémoire de 1823, M. Brisson a indiqué la transformation de l'expression (1) en intégrales définies par le théorème de M. Fourier comme un dernier moyen propre à faire connaître la valeur de l'expression dont il s'agit. Cette transformation, appliquée aux formules symboliques qui représentent les intégrales des équations linéaires aux différences partielles, reproduit les formules qu'on a obtenues dans les problèmes des ondes, de la chaleur, des plaques vibrantes, etc...., et celles que j'ai données dans le 19.ᵉ cahier du Journal de l'École Royale Polytechnique. De plus, lorsque la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ cesse d'être entière, il est aisé de voir, 1.° qu'on ne saurait établir la convergence des séries, dans lesquelles l'expression (1) peut être développée, indépendamment de la valeur attribuée à la fonction u; 2.° que, parmi les divers développements, les uns se composent de termes dont les valeurs sont complètement déterminées, et les autres de termes qui renferment des constantes arbitraires, d'où il résulte que ces développements fournissent, pour l'expression (1), diverses valeurs qui n'ont pas toutes le même degré de généralité. On doit même observer que les développements qui ont pour termes successifs des intégrales des divers ordres, renferment une infinité de constantes arbitraires. Il suit de ces réflexions que l'usage des développements en séries laisse subsister beaucoup d'incertitude sur le sens de la notation (1), et sur le degré de généralité qu'elle comporte, dans le cas où la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ cesse d'être entière, et devient, par exemple, irrationnelle. Cet inconvénient paraît s'opposer à ce qu'on adopte généralement la notation (1), en y considérant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ comme de véritables caractéristiques, et attribuant une valeur quelconque à la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. Toutefois il m'a semblé qu'on pouvait procurer au calcul infinitésimal, ainsi qu'au calcul des différences finies, la plupart des avantages que cette notation présente, et même simplifier encore les formules relatives à l'intégration des équations linéaires, en substituant à la notation (1) d'autres notations du même genre, établies de manière à recevoir, dans tous les cas, une interprétation claire et précise. Tel est l'objet que je me suis proposé dans plusieurs paragraphes des Mémoires présentés à l'Académie Royale des Sciences le 27 décembre 1824, et le 17 janvier 1825. Parmi les diverses notations que l'on peut employer pour arriver à ce but, celles que je vais indiquer me paraissent devoir être adoptées de préférence.

---

§ 2. *Sur les différences finies ou infiniment petites des fonctions d'une seule variable.*

Soient $y = f(x)$ une fonction de la variable indépendante x, $\Delta x = h$ la différence finie de cette même variable, et n un nombre entier quelconque. Je désignerai

(1) $\begin{cases} \text{par } Dy \text{ ou } D_x y \ldots \text{ la fonction dérivée } \dfrac{dy}{dx} = f'(x), \\ \text{par } \Delta y \text{ ou } \Delta_x y \ldots \text{ la différence finie } f(x+\Delta x) - f(x), \\ \text{par } D^n y \text{ ou } D_x{}^n y \ldots \text{ la fonction dérivée de l'ordre } n, \text{ savoir, } \dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x), \\ \text{par } \Delta^n y \text{ ou } \Delta_x{}^n y \ldots \text{ la différence finie, du } n^{me} \text{ ordre, de la fonction } y. \end{cases}$

Soient de plus $\mathrm{F}(\alpha)$, $\mathrm{f}(\alpha)$, $\mathrm{F}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{f}(\alpha,\beta)$ des fonctions entières des variables α, β, et A un coefficient constant. Je représenterai par les notations

(2) $$\mathrm{F}(D)y, \quad \mathrm{F}(\Delta)y, \quad \mathrm{F}(D,\Delta)y$$

les fonctions linéaires de y, Dy, Δy, D^2y, ΔDy, $\Delta^2 y$,... auxquelles on parvient quand, après avoir développé les expressions (2) en termes de la forme

(3) $$AD^m\Delta^n y,$$

on considère D et Δ comme de véritables caractéristiques; et je désignerai par

(4) $$u = \frac{\mathrm{f}(D)}{\mathrm{F}(D)} f(x), \quad v = \frac{\mathrm{f}(\Delta)}{\mathrm{F}(\Delta)} f(x), \quad w = \frac{\mathrm{f}(D,\Delta)}{\mathrm{F}(D,\Delta)} f(x),$$

les valeurs de u, v, w,... propres à vérifier les équations

(5) $$\mathrm{F}(D)u = \mathrm{f}(D).f(x), \quad \mathrm{F}(\Delta)v = \mathrm{f}(\Delta).f(x), \quad \mathrm{F}(D,\Delta)w = \mathrm{f}(D,\Delta).f(x).$$

Cela posé, on établira aisément les formules

(6) $$\begin{cases} \mathrm{F}(D)[\mathrm{f}(D).f(x)] = [\mathrm{F}(D).\mathrm{f}(D)]f(x) = \mathrm{f}(D)[\mathrm{F}(D).f(x)], \\ \mathrm{F}(\Delta)[\mathrm{f}(\Delta).f(x)] = [\mathrm{F}(\Delta).\mathrm{f}(\Delta)]f(x) = \mathrm{f}(\Delta)[\mathrm{F}(\Delta).f(x)], \\ \mathrm{F}(D,\Delta)[\mathrm{f}(D,\Delta).f(x)] = [\mathrm{F}(D,\Delta).\mathrm{f}(D,\Delta)]f(x) = \mathrm{f}(D,\Delta)[\mathrm{F}(D,\Delta).f(x)]; \end{cases}$$

et, comme, en attribuant au coefficient r une valeur constante, soit réelle, soit imaginaire, on aura évidemment

(7) $$D^n e^{rx} = r^n e^{rx},$$ (8) $$\Delta^n e^{rx} = (e^{rh}-1)^n e^{rx},$$

(9) $$D^n[e^{rx}f(x)] = e^{rx}(r+D)^n f(x),$$ (10) $$\Delta^n[e^{rx}f(x)] = e^{rx}[e^{rh}(1+\Delta)-1]^n f(x),$$

on trouvera encore

$$(11)\qquad F(D).e^{rx}=e^{rx}F(r),\quad F(\Delta)e^{rx}=e^{rx}F(e^{rh}-1),\quad F(D,\Delta)e^{rx}=e^{rx}F(r,e^{rh}-1),$$

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &F(D)[e^{rx}f(x)]=e^{rx}F(r+D)f(x),\\ &F(\Delta)[e^{rx}f(x)]=e^{rx}F[e^{rh}(1+\Delta)-1]f(x),\\ &F(D,\Delta)[e^{rx}f(x)]=e^{rx}F[r+D,e^{rh}(1+\Delta)-1]f(x). \end{aligned}\right.$$

Ajoutons qu'il est facile de transformer chacune des expressions (2) en intégrale double. En effet, on a généralement [voy. l'équation (2) de l'article précédent]

$$(13)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}f(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda.$$

Or, on tire de la formule (13) combinée avec les équations (7) et (8)

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &F(D)f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}F(\alpha\sqrt{-1}).f(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda,\\ &F(\Delta)f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}F\left(e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right).f(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda,\\ &F(D,\Delta)f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}F\left(\alpha\sqrt{-1},e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right).f(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, chacune des expressions (2) peut être convertie en une intégrale double de la forme

$$(15)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\varphi(\alpha).f(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda,$$

$\varphi(\alpha)$ désignant une fonction entière de α et de l'exponentielle $e^{h\alpha\sqrt{-1}}$.

Dans le cas où $\varphi(\alpha)$ devient une fonction quelconque, l'intégrale (15) continue à jouir de propriétés importantes, dont nous ferons un fréquent usage. Nous allons en exposer ici quelques-unes, et, pour abréger, nous désignerons l'intégrale dont il s'agit par la notation

$$(16)\qquad \varphi(\alpha).f(\overline{x}),$$

en sorte qu'on aura identiquement

$$(17)\qquad \varphi(\alpha).f(\overline{x})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\varphi(\alpha).f(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda.$$

Cela posé, soit a une constante réelle. Si, dans l'équation (17), on remplace $f(x)$ par $e^{ax\sqrt{-1}}$, on trouvera

$$\varphi(\alpha).e^{a\overline{x}\sqrt{-1}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}e^{a\lambda\sqrt{-1}}\varphi(\alpha)\,d\alpha\,d\lambda. \tag{18}$$

D'ailleurs, si, dans la formule (13), on échange entre elles les variables α et λ, et si l'on y remplace en même temps x par a, on en tirera

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a-\alpha)\lambda\sqrt{-1}}f(\alpha)\,d\alpha\,d\lambda,$$

puis, en posant

$$f(a)=e^{ax\sqrt{-1}}\varphi(a),$$

$$e^{ax\sqrt{-1}}\varphi(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}e^{a\lambda\sqrt{-1}}\varphi(a)\,d\alpha\,d\lambda.$$

On aura donc définitivement

$$\varphi(\alpha)e^{a\overline{x}\sqrt{-1}}=e^{ax\sqrt{-1}}\varphi(a). \tag{19}$$

Soient maintenant $a, b, c, \ldots\ldots$ plusieurs constantes réelles, $\varphi(\alpha)$, $\chi(\alpha)$ des fonctions quelconques de la variable α, et $A, B, C, \ldots\ldots$ des coefficients réels ou imaginaires. On tirera immédiatement de l'équation (19)

$$\left\{\begin{aligned}&\varphi(\alpha)\left[Ae^{a\overline{x}\sqrt{-1}}+Be^{b\overline{x}\sqrt{-1}}+Ce^{c\overline{x}\sqrt{-1}}+\ldots\right]\\&=Ae^{ax\sqrt{-1}}\varphi(a)+Be^{bx\sqrt{-1}}\varphi(b)+Ce^{cx\sqrt{-1}}\varphi(c)+\ldots,\end{aligned}\right. \tag{20}$$

et par suite

$$\varphi(\alpha).\Sigma e^{a\overline{x}\sqrt{-1}}\chi(a)=\Sigma e^{ax\sqrt{-1}}\varphi(a)\chi(a), \tag{21}$$

le signe Σ indiquant une somme de termes semblables au produit

$$e^{ax\sqrt{-1}}\chi(a), \quad \text{ou} \quad e^{ax\sqrt{-1}}\varphi(a)\chi(a).$$

On trouvera de même, en désignant par r_0, R deux valeurs distinctes de la quantité r supposée réelle, et par Δr un élément de la différence $R-r_0$,

$$\varphi(\alpha)\Sigma e^{r\overline{x}\sqrt{-1}}\chi(r)\Delta r=\Sigma e^{rx\sqrt{-1}}\varphi(r)\chi(r)\Delta r, \tag{22}$$

le signe Σ s'étendant à tous les éléments de $R-r_0$; puis on en conclura, 1.° en faisant décroître ces éléments au-delà de toute limite,

$$\varphi(\alpha) \int_{r_0}^{R} e^{r\overline{x}\sqrt{-1}} \chi(r)\, dr = \int_{r_0}^{R} e^{rx\sqrt{-1}} \varphi(r)\chi(r)\, dr, \tag{23}$$

2.° en prenant $r_0 = -\infty$, $R = \infty$,

$$\varphi(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e^{r\overline{x}\sqrt{-1}} \chi(r)\, dr = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx\sqrt{-1}} \varphi(r)\chi(r)\, dr. \tag{24}$$

Comme on tire d'ailleurs de l'équation (17), en remplaçant la fonction φ par la fonction χ, et la lettre α par la lettre r dans le second membre,

$$\chi(\alpha) \cdot f(\overline{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{r(x-\lambda)\sqrt{-1}} \chi(r) f(\lambda)\, dr\, d\lambda, \tag{25}$$

on trouvera, en ayant égard à la formule (24),

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\alpha)[\chi(\alpha) f(\overline{x})] &= \frac{1}{2\pi} \varphi(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{r(\overline{x}-\lambda)\sqrt{-1}} \chi(r) f(\lambda)\, dr\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{r(x-\lambda)\sqrt{-1}} \varphi(r)\chi(r) f(\lambda)\, dr\, d\lambda, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

ou plus simplement

$$\varphi(\alpha)[\chi(\alpha) f(\overline{x})] = [\varphi(\alpha) \cdot \chi(\alpha)] f(\overline{x}). \tag{27}$$

De même, comme on aura, en désignant par a une constante réelle,

$$e^{ax\sqrt{-1}} \chi(\alpha) f(\overline{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+r)x\sqrt{-1}} e^{-\lambda r\sqrt{-1}} \chi(r) f(\lambda)\, dr\, d\lambda, \tag{28}$$

on trouvera encore

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\alpha)\left\{e^{a\overline{x}\sqrt{-1}} \chi(\alpha) f(\overline{x})\right\} &= \frac{1}{2\pi} \varphi(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+r)\overline{x}\sqrt{-1}} e^{-\lambda r\sqrt{-1}} \chi(r) f(\lambda)\, dr\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+r)x\sqrt{-1}} e^{-\lambda r\sqrt{-1}} \varphi(a+r)\chi(r) f(\lambda)\, dr\, d\lambda, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

ou plus simplement

$$\varphi(\alpha)\left[e^{a\overline{x}\sqrt{-1}} \chi(\alpha) f(\overline{x})\right] = e^{ax\sqrt{-1}} [\varphi(a+\alpha)\chi(\alpha)] f(\overline{x}). \tag{30}$$

Les formules (27) et (30) expriment deux propriétés remarquables de la fonction de

x représentée par la notation (16). Dans le cas particulier où la fonction φ est entière, il suffirait, pour établir ces mêmes propriétés, de combiner les premières des formules (6) et (12) avec la première des équations (14). En effet, lorsqu'on fait usage de la notation (16), les équations (14) se réduisent à

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned}
&F(D)\,f(x)=F(\alpha\sqrt{-1})\,f(\overline{x}),\\
&F(\Delta)\,f(x)=F\left(e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)f(\overline{x}),\\
&F(D,\Delta)\,f(x)=F\left(\alpha\sqrt{-1},\,e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)f(\overline{x}).
\end{aligned}\right.$$

Par suite, les équations (6) et (12) donneront

$$(32)\quad\left\{\begin{aligned}
&F(\alpha\sqrt{-1})\,[\mathrm{f}(\alpha\sqrt{-1})\,f(\overline{x})]=[F(\alpha\sqrt{-1})\,\mathrm{f}(\alpha\sqrt{-1})]\,f(\overline{x}),\\
&F\left(e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)\left[\mathrm{f}\left(e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)f(\overline{x})\right]=\left[F\left(e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)\mathrm{f}\left(e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)\right]f(\overline{x}),\\
&F\left(\alpha\sqrt{-1},e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)\left[\mathrm{f}\left(\alpha\sqrt{-1},e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)f(\overline{x})\right]\\
&\qquad=\left[F\left(\alpha\sqrt{-1},e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)\mathrm{f}\left(\alpha\sqrt{-1},e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)\right]f(\overline{x});
\end{aligned}\right.$$

et

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}
&F(\alpha\sqrt{-1})\left[e^{r\overline{x}}f(\overline{x})\right]=e^{rx}f(r+\alpha\sqrt{-1})\,f(\overline{x}),\\
&F\left(e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)\left[e^{r\overline{x}}f(\overline{x})\right]=e^{rx}F\left[e^{h(r+\alpha\sqrt{-1})}-1\right]f(\overline{x}),\\
&F\left(\alpha\sqrt{-1},e^{h\alpha\sqrt{-1}}-1\right)\left[e^{r\overline{x}}f(\overline{x})\right]=e^{rx}F\left[r+\alpha\sqrt{-1},e^{h(r+\alpha\sqrt{-1})}-1\right]f(\overline{x}).
\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on pose

$$F(\alpha\sqrt{-1})=\varphi(\alpha),\qquad \mathrm{f}(\alpha\sqrt{-1})=\chi(\alpha),\qquad r=a\sqrt{-1},$$

$\varphi(\alpha)$, $\chi(\alpha)$ seront des fonctions entières de α; et la première des formules (32) se réduira immédiatement à l'équation (27), tandis que la première des formules (33), réduite à l'équation (30), subsistera non-seulement pour des valeurs réelles, mais encore pour des valeurs imaginaires de la constante a.

---

§ 3. *Sur les différences finies ou infiniment petites des fonctions de plusieurs variables indépendantes.*

Il est facile de voir comment les notations admises dans le paragraphe précédent peuvent être étendues au cas où l'on considère une fonction de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots t$. En effet, soient

$$(1) \qquad u = f(x, y, z, \ldots t)$$

une semblable fonction,

$$\Delta x = h, \qquad \Delta y = k, \qquad \Delta z = l, \ldots$$

les différences finies des variables $x, y, z, \ldots t$; et n un nombre entier quelconque. En vertu des conventions ci-dessus adoptées [pages 161 et 162], on devra évidemment employer les caractéristiques

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \ldots D_t; \quad D_x^2, \quad D_y^2, \quad D_z^2, \ldots D_t^2; \text{ etc}\ldots \quad D_x^n, \quad D_y^n, \quad D_z^n, \ldots D_t^n,$$

et

$$\Delta_x, \quad \Delta_y, \quad \Delta_z, \ldots \Delta_t; \quad \Delta_x^2, \quad \Delta_y^2, \quad \Delta_z^2, \ldots \Delta_t^2; \text{ etc}\ldots \quad \Delta_x^n, \quad \Delta_y^n, \quad \Delta_z^n, \ldots \Delta_t^n,$$

placées devant la fonction u pour indiquer les dérivées partielles et les différences finies de u, du premier, du second, ... du n^{me} ordre, prises par rapport aux diverses variables indépendantes. De plus, si l'on désigne par

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \theta, \lambda, \mu, \nu, \ldots \tau), \qquad f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \theta, \lambda, \mu, \nu, \ldots \tau)$$

des fonctions entières des variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \theta; \lambda, \mu, \nu, \ldots \tau$, par A un coefficient constant, et par $m, n \ldots p, q \ldots$ des nombres entiers quelconques, on devra se servir des expressions

$$(2) \qquad F(D_x, D_y, D_z, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \ldots \Delta_t)u$$

et

$$(3) \qquad \frac{f(D_x, D_y, D_z, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \ldots \Delta_t)}{F(D_x, D_y, D_z, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \ldots \Delta_t)} u$$

pour indiquer, 1.° la fonction linéaire de u et de ses dérivées ou différences partielles finies ou infiniment petites mêlées ou non mêlées, à laquelle on parvient quand, après avoir développé l'expression (2) en termes de la forme

(4) $$A D_x^m D_y^n \ldots \Delta_x^p \Delta_y^q \ldots u,$$

on considère D_x^m, $D_y^n, \ldots \Delta_x^p$, $\Delta_y^q \ldots$ comme de véritables caractéristiques, 2.° la valeur générale de v propre à vérifier l'équation aux différences mêlées et partielles

(5) $$F(D_x, D_y, D_z, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \ldots \Delta_t)\, v = f(D_x, D_y, D_z, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \ldots \Delta_t)\, u.$$

Enfin, si l'on désigne par

(6) $$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \theta)$$

une fonction quelconque des variables $\alpha, \beta, \gamma \ldots \theta$, on devra employer la notation

(7) $$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \theta) f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots \overline{t})$$

dans laquelle la lettre α se rapporte à la variable x, la lettre β à la variable y, etc... pour représenter l'intégrale multiple

(8) $$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}} \ldots e^{\theta(t-\tau)\sqrt{-1}} \varphi(\alpha, \beta, \ldots \theta) f(\lambda, \mu, \ldots \tau) \frac{d\alpha\, d\lambda}{2\pi} \frac{d\beta\, d\mu}{2\pi} \ldots \frac{d\theta\, d\tau}{2\pi},$$

en sorte qu'on aura identiquement

(9) $$\varphi(\alpha, \beta, \ldots \theta) f(\overline{x}, \overline{y}, \ldots \overline{t}) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}} \ldots e^{\theta(t-\tau)\sqrt{-1}} \varphi(\alpha, \beta, \ldots \theta) f(\lambda, \mu, \ldots \tau) \frac{d\alpha\, d\lambda}{2\pi} \frac{d\beta\, d\mu}{2\pi} \ldots \frac{d\theta\, d\tau}{2\pi}.$$

Cela posé, en généralisant les formules (6), (11) et (12) du paragraphe 2, et attribuant aux coefficients $r, s, \ldots$ des valeurs constantes réelles ou imaginaires, on établira facilement les équations

(10) $$\left\{ \begin{aligned} & F(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)\, [f(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t) f(x, y, z, \ldots t)] \\ & = f(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)\, [F(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t) f(x, y, z, \ldots t)] \\ & = [f(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t) . F(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)] f(x, y, z, \ldots t). \end{aligned} \right.$$

(11) $$F(D_x, D_y, \ldots \Delta_x, \Delta_y, \ldots) e^{rx+sy+\ldots} = e^{rx+sy+\ldots} F(r, s, \ldots e^{rk} - 1, e^{sk} - 1 \ldots).$$

$$(12)\quad F(D_x, D_y, \ldots \Delta_x, \Delta_y, \ldots)\left[e^{rx+sy+\ldots} f(x,y,\ldots)\right] =$$

$$e^{rx+sy+\ldots} F\left[r + D_x, s + D_y, \ldots e^{rh}(1+\Delta_x) - 1, e^{sk}(1+\Delta_y) - 1, \ldots\right] f(x,y\ldots).$$

De plus, comme on aura, en vertu de l'équation (7) de l'article précédent,

$$(13)\quad f(x,y,\ldots t) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}} \ldots e^{\theta(t-\tau)\sqrt{-1}} f(\lambda,\mu,\ldots\tau) \frac{d\alpha\, d\lambda}{2\pi} \frac{d\beta\, d\mu}{2\pi} \ldots \frac{d\theta\, d\tau}{2\pi},$$

on trouvera encore

$$(14)\quad F(D_x, D_y, \ldots \Delta_x, \Delta_y, \ldots) f(x,y,\ldots) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} \ldots F(\alpha\sqrt{-1}, \beta\sqrt{-1}, \ldots e^{h\alpha\sqrt{-1}} - 1, e^{k\beta\sqrt{-1}} - 1 \ldots) f(\lambda,\mu\ldots) \frac{d\alpha\, d\lambda}{2\pi} \frac{d\beta\, d\mu}{2\pi} \ldots,$$

les intégrations étant toutes effectuées entre les limites $-\infty$, $+\infty$; puis on tirera de la formule (14), en faisant usage de la notation (7),

$$(15)\quad F(D_x, D_y, \ldots \Delta_x, \Delta_y, \ldots) f(x,y,\ldots) = F(\alpha\sqrt{-1}, \beta\sqrt{-1}, \ldots e^{h\alpha\sqrt{-1}} - 1, e^{k\beta\sqrt{-1}} - 1, \ldots) f(\bar{x}, \bar{y}, \ldots)$$

Soient maintenant $a, b, c, \ldots$ des constantes réelles, et $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ $\chi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ des fonctions quelconques des variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Supposons d'ailleurs que l'on continue de représenter par la lettre F une fonction entière, et par $r, s, \ldots$ des coefficients constants, soit réels, soit imaginaires. En généralisant les formules (19), (27), (30) et (33) du paragraphe 2, on établira sans peine les équations

$$(16)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots) e^{(a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z}+\ldots)\sqrt{-1}} = e^{(ax+by+cz+\ldots)\sqrt{-1}} \varphi(a,b,c,\ldots);$$

$$(17)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)[\chi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots) f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\ldots)] = [\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)\chi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)] f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\ldots),$$

$$(18)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)[e^{(a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z}+\ldots)\sqrt{-1}} \chi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots) f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\ldots)] = \\ e^{(ax+by+cz+\ldots)\sqrt{-1}} [\varphi(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma,\ldots)\chi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots) f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\ldots)], \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} F(\alpha\sqrt{-1}, \beta\sqrt{-1}, \ldots e^{h\alpha\sqrt{-1}} - 1, e^{k\beta\sqrt{-1}} - 1, \ldots)[e^{r\bar{x}+s\bar{y}+\ldots} f(\bar{x},\bar{y},\ldots)] = \\ e^{rx+sy+\ldots} F[r+\alpha\sqrt{-1}, s+\beta\sqrt{-1}, \ldots e^{h(r+\alpha\sqrt{-1})} - 1, e^{k(s+\beta\sqrt{-1})} - 1, \ldots] f(\bar{x},\bar{y},\ldots). \end{cases}$$

Je terminerai cet article en indiquant le parti qu'on peut tirer de plusieurs des notations et formules ci-dessus établies pour l'intégration des équations linéaires à coefficients constants.

---

§ 4. *Sur l'emploi des caractéristiques D et Δ dans l'intégration des équations linéaires, aux différences finies ou infiniment petites, mêlées ou non mêlées, et à coefficients constants.*

Les principes ci-dessus établis relativement aux caractéristiques D et Δ, fournissent le moyen de représenter les intégrales des équations linéaires à coefficients constants par des formules symboliques du genre de celles que M. Brisson a obtenues. On peut en effet y parvenir dans un grand nombre de cas à l'aide de deux méthodes différentes, déjà employées par ce géomètre, et que je vais reproduire avec quelques modifications.

La première méthode est fondée sur la remarque suivante.

Soit

$$(1)\qquad F(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)\,u = f(x, y, z \ldots t)$$

une équation linéaire à coefficients constants et avec un dernier terme variable entre la variable principale u et les variables indépendantes $x, y, \ldots t$. Si la fonction entière désignée par F peut être décomposée en deux facteurs de même nature qu'elle, si l'on a, par exemple,

$$(2)\quad F(D_x, D_y, .. D_t, \Delta_x, \Delta_y, .. \Delta_t) = F_1(D_x, D_y, .. D_t, \Delta_x, \Delta_y, .. \Delta_t) \,.\, F_2(D_x, D_y, .. D_t \Delta_x, \Delta_y, .. \Delta_t),$$

on pourra évidemment substituer à l'équation (1) le système des deux équations linéaires

$$(3)\qquad F_1(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)\,v = f(x, y, \ldots t)$$

$$(4)\qquad F_2(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)\,u = v,$$

qui seront l'une et l'autre d'un ordre moins élevé. Si les fonctions entières, désignées par F_1, F_2, sont elles-mêmes décomposables en facteurs, l'intégration de la formule (1), ou, ce qui revient au même, l'intégration des formules (3), (4) pourra être encore réduite à celle d'autres formules du même genre, mais d'un ordre inférieur. On arriverait d'ailleurs directement à la même conclusion, en observant que, si la fonction F est décomposable en plusieurs fonctions entières désignées par $F_1, F_2, \ldots F_{n-1}, F_n$, la formule (1) pourra être remplacée par le système des équations linéaires

$$(5)\quad \begin{cases} F_1(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)\, u_{n-1} = f(x, y, \ldots t) \\ F_2(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)\, u_{n-2} = u_{n-1}, \\ \text{etc...}, \\ F_{n-1}(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)\, u_1 = u_2, \\ F_n(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)\, u = u_1\,; \end{cases}$$

qui devront être intégrées dans l'ordre où elles se présentent ici.

Cela posé, il est clair que, si la fonction F, étant du degré n, on peut la décomposer en fonctions du premier degré, l'intégration de la formule (1) pourra être réduite à l'intégration de n équations linéaires du premier ordre. Donc alors, en supposant connues les intégrales générales des équations linéaires du premier ordre, on parviendra sans peine à l'intégrale générale de l'équation (1).

Pour montrer le parti qu'on peut tirer de l'observation précédente, considérons d'abord une équation différentielle linéaire et à coefficients constants, entre la variable x et une fonction y de cette variable. Si l'équation donnée est du premier ordre, alors, en désignant par μ un coefficient constant, on pourra la présenter sous l'une des formes

(6) $$(D - r)y = f(x),$$ (7) $$\frac{dy}{dx} - ry = f(x),$$

et son intégrale générale sera

(8) $$y = e^{rx} \int e^{-rx} f(x)\, dx,$$

ou, ce qui revient au même,

(9) $$y = e^{rx} \left\{ \int_{x_0}^{x} e^{-rx} f(x)\, dx + \mathcal{C} \right\},$$

x_0 désignant une valeur particulière de la variable x. Mais, si l'équation proposée est de l'ordre n et de la forme

(10) $$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x),$$

alors, en faisant, pour abréger,

(11) $$F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n,$$

et désignant par $r_1, r_2, \ldots r_n$ les valeurs réelles ou imaginaires de r propres à vérifier l'équation

(12) $$F(r) = 0,$$

on pourra substituer à la formule (10) l'une quelconque des deux suivantes

(13) $$F(D) y = f(x),$$

(14) $$(D - r_1)(D - r_2) \ldots (D - r_n) = \frac{f(x)}{a_0}.$$

Or, pour intégrer la dernière, il suffit de poser successivement

(15) $$\begin{cases} (D - r_1) y_{n-1} = \frac{f(x)}{a_0}, \\ (D - r_2) y_{n-2} = y_{n-1}, \\ \text{etc.}\ldots, \\ (D - r_{n-1}) y_1 = y_2, \\ (D - r_n) y = y_1; \end{cases}$$

et il est clair que les valeurs de $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots y_1, y$, propres à vérifier les équations (15), s'obtiendront aussi facilement que la valeur de y propre à vérifier la formule (6).

Il est important d'observer que les valeurs de $y, y_1, y_2, \ldots$ déduites des équations (15) renfermeront en général des intégrales multiples. Mais on pourra toujours remplacer ces intégrales multiples par des intégrales simples; et, pour y parvenir, il suffira de recourir à l'intégration par parties, c'est-à-dire, à la formule

(16) $$\int u dv = uv - \int v du.$$

1.er *Exemple.* Soit donnée l'équation différentielle

(17) $$\frac{d^2y}{dx^2} - y = f(x),$$

ou

(18) $$(D^2 - 1) y = f(x).$$

Comme on aura

$$D^2 - 1 = (D-1)(D+1),$$

on pourra substituer à l'équation (17) le système des deux formules

(19) $$(D-1)z = f(x), \qquad (D+1)y = z;$$

ou, en d'autres termes, le système des deux équations

(20) $$\frac{dz}{dx} - z = f(x), \qquad \frac{dy}{dx} + y = z.$$

Or on tirera de ces dernières

(21) $$z = e^x \int e^{-x} f(x)\,dx, \qquad y = e^{-x} \int z e^x\,dx,$$

et par suite

(22) $$y = e^{-x} \int e^{2x} \left(\int e^{-x} f(x)\,dx \right) dx.$$

Si maintenant on veut décomposer en intégrales simples l'intégrale double que renferme la valeur précédente de y, il suffira de poser dans l'équation (16)

$$u = \int e^{-x} f(x)\,dx, \qquad dv = e^{2x}\,dx;$$

Alors en effet on trouvera

$$\int e^{2x} \left(\int e^{-x} f(x)\,dx \right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \int e^{-x} f(x)\,dx - \frac{1}{2} \int e^x f(x)\,dx;$$

et l'on en conclura

(23) $$y = \frac{1}{2} e^x \int e^{-x} f(x)\,dx - \frac{1}{2} e^{-x} \int e^x f(x)\,dx,$$

ou, ce qui revient au même,

(24) $$y = \frac{1}{2} e^x \left\{ \int_{x_0}^{x} e^{-x} f(x)\,dx + \mathcal{C} \right\} - \frac{1}{2} e^{-x} \left\{ \int e^x f(x)\,dx + \mathcal{C}' \right\},$$

$\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ désignant deux constantes arbitraires, et x_0 une valeur particulière de la variable x.

2.° *Exemple.* Soit donnée l'équation différentielle

(25) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = f(x),$$

ou

(26) $$(D^2-2D+1)y=f(x).$$

Comme on aura

$$D^2-2D+1=(D-1)^2,$$

on pourra substituer à l'équation (25) le système des deux formules

(27) $$(D-1)z=f(x), \qquad (D-1)y=z,$$

ou, en d'autres termes, le système des deux équations

(28) $$\frac{dz}{dx}-z=f(x), \qquad \frac{dy}{dx}-y=z.$$

Or on tirera de ces dernières, en désignant par $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ deux constantes arbitraires,

(29) $$z=e^x\left\{\int_0^x e^{-x}f(x)\,dx+\mathfrak{C}\right\},$$

(30) $$y=e^x\left\{\int_0^x ze^{-x}dx+\mathfrak{C}'\right\},$$

puis, en remettant dans la formule (30), à la place du produit ze^{-x}, sa valeur tirée de la formule (29),

(31) $$y=e^x\left\{\mathfrak{C}x+\mathfrak{C}'+\int_0^x\int_0^x e^{-x}f(x)\,dx^2\right\}.$$

Comme on trouve d'ailleurs, en intégrant par parties,

(32) $$\int_0^x\int_0^x e^{-x}f(x)\,dx^2=x\int_0^x e^{-x}f(x)\,dx-\int_0^x xe^{-x}f(x)\,dx$$

$$=\int_0^x(x-z)\,e^{-z}f(z)\,dz,$$

on pourra encore remplacer l'équation (31) par la suivante

(33) $$y=e^x\left\{\mathfrak{C}x+\mathfrak{C}'+\int_0^x(x-z)e^{-z}f(z)\,dz\right\}.$$

Cette dernière s'accorde avec la formule (17) de la page 204 du premier volume.

Revenons à l'équation (10). Si l'on y pose $n=2$, elle deviendra

(34) $$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 = f(x),$$

et son intégrale générale, fournie par la méthode que nous venons d'exposer, sera

(35) $$y = \frac{1}{a_0} e^{r_2 x} \int e^{(r_1 - r_2)x} \left(\int e^{-r_1 x} f(x)\, dx \right) dx,$$

r_1, r_2 désignant les racines de l'équation algébrique

(36) $$a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

De plus, à l'aide de l'intégration par parties, la formule (35) pourra être réduite à

(37) $$y = \frac{1}{a_0} \left\{ \frac{e^{r_1 x}}{r_1 - r_2} \int e^{-r_1 x} f(x)\, dx + \frac{e^{r_2 x}}{r_2 - r_1} \int e^{-r_2 x} f(x)\, dx \right\},$$

ou, ce qui revient au même, à

(38) $$y = \frac{1}{a_0} \left\{ \frac{e^{r_1 x}}{r_1 - r_2} \left[\mathcal{C} + \int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x} f(x)\, dx \right] + \frac{e^{r_2 x}}{r_2 - r_1} \left[\mathcal{C}' + \int_{x_0}^{x} e^{-r_2 x} f(x)\, dx \right] \right\}$$

On doit seulement excepter le cas où l'on aurait $r_2 = r_1$. Alors l'équation (35) prendrait la forme suivante

(39) $$y = \frac{1}{a_0} e^{rx} \iint e^{-rx} f(x)\, dx^2,$$

et l'intégration par parties donnerait

(40) $$y = \frac{e^{rx}}{a_0} \left\{ x \int e^{-rx} f(x)\, dx - \int x e^{-rx} f(x)\, dx \right\},$$

ou, ce qui revient au même,

(41) $$y = \frac{e^{rx}}{a_0} \left\{ \mathcal{C} x + \mathcal{C}' + \int_{x_0}^{x} (x - z) e^{-rz} f(z)\, dz \right\}.$$

En restituant au nombre entier n, dans l'équation (10), une valeur quelconque, on tirera des formules (15)

(42) $$y = \frac{1}{a_0} e^{r_n x} \int e^{(r_{n-1}-r_n)x} \left(\int e^{(r_{n-2}-r_{n-1})x} \ldots \left(\int e^{(r_1-r_2)x} \left(\int e^{-r_1 x} f(x)\,dx \right) dx .. \right) dx \right) dx$$

Telle sera la valeur générale de y, exprimée par une intégrale multiple, que l'on pourra décomposer en intégrales simples à l'aide de l'intégration par parties.

Dans le cas particulier où, les racines $r_1, r_2 \ldots r_n$ étant égales entre elles, on suppose $x_0 = 0$, l'équation (10) peut être présentée sous l'une quelconque des formes

(43) $$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^n y}{dx^n} - nr \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} r^2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} - \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)}{1.2} r^{n-2} \frac{d^2 y}{dx^2} \mp \frac{n}{1} r^{n-1} \frac{dy}{dx} \pm r^n y = f(x), \end{array} \right.$$

(44) $$(D - r)^n y = f(x),$$

et la valeur générale de y se réduit à

(45) $$y = e^{rx} \int\int \ldots \int e^{-rx} f(x)\,dx^n .$$

De plus, en intégrant par parties, on tire de la formule (45)

(46) $$y = \frac{e^{rx}}{1.2..(n-1)} \left\{ x^{n-1} \int e^{-rx} f(x)\,dx - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int x e^{-rx} f(x)\,dx + .. \pm \int x^{n-1} e^{-rx} f(x)\,dx \right\},$$

puis on en conclut, en mettant les constantes arbitraires en évidence,

(47) $$y = e^{rx} \left\{ \mathfrak{C} x^{n-1} + \mathfrak{C}' x^{n-2} + \ldots + \mathfrak{C}^{(n-2)} x + \mathfrak{C}^{(n-1)} + \int \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2..(n-1)} e^{-rz} f(z)\,dz \right\},$$

Considérons maintenant une équation linéaire aux différences finies et à coefficients constants entre une variable x et une fonction y de cette variable. Si l'équation donnée est du premier ordre, on pourra la présenter sous l'une des formes

(48) $$(\Delta - r) y = f(x),$$ ou (49) $$\Delta y - ry = f(x),$$

et son intégrale générale sera

$$(50) \qquad y=(1+r)^{\frac{x}{h}-1}\left\{\Sigma(1+r)^{-\frac{x}{h}}f(x)+\varpi(x)\right\},$$

$h=\Delta x$ désignant la différence finie de x, et $\varpi(x)$ une fonction périodique, mais arbitraire, dont la valeur ne change pas quand x reçoit pour accroissement un multiple de h. Au contraire, si l'équation donnée est de l'ordre n et de la forme

$$(51) \qquad a_0\Delta^n y+a_1\Delta^{n-1}y+a_2\Delta^{n-2}y+\ldots+a_{n-1}\Delta y+a_n y=f(x),$$

alors, en se servant des notations précédemment adoptées, on pourra la remplacer par l'une des deux formules

$$(52) \qquad F(\Delta)y=f(x),$$

$$(53) \qquad (\Delta-r_1)(\Delta-r_2)\ldots(\Delta-r_n)y=\frac{f(x)}{a_0}.$$

Or, pour intégrer la dernière, il suffira de poser successivement

$$(54) \qquad \left\{\begin{array}{l}(\Delta-r_1)y_{n-1}=\dfrac{f(x)}{a_0},\\ (\Delta-r_2)y_{n-2}=y_{n-1},\\ \text{etc.}\ldots,\\ (\Delta-r_{n-1})y_1=y_2,\\ \quad(\Delta-r_n)y=y_1;\end{array}\right.$$

et il est clair que les valeurs de y_{n-1}, y_{n-2}, ... y_1, y, propres à vérifier les équations (54), s'obtiendront aussi facilement que la valeur de y propre à vérifier la formule (48).

Il est important d'observer, 1.° que, la fonction périodique $\varpi(x)$ pouvant être censée comprise dans l'intégrale indéfinie

$$\Sigma(1+r)^{-\frac{x}{h}}f(x),$$

l'équation (50) peut s'écrire plus simplement comme il suit

$$(55) \qquad y=(1+r)^{\frac{x}{h}-1}\Sigma(1+r)^{-\frac{x}{h}}f(x),$$

2.° que les valeurs de y, y_1, y_2 ..., déduites des équations (54), renfermeront en

général des intégrales multiples aux différences finies. Mais on pourra toujours décomposer ces intégrales multiples en intégrales simples ; et, pour y parvenir, il suffira d'intégrer par parties en recourant à la formule

$$\Sigma u \Delta v = uv - \Sigma(v + \Delta v)\Delta u, \tag{56}$$

que l'on déduit immédiatement de l'équation

$$u\Delta v = \Delta(uv) - (v + \Delta v)\Delta u,$$

et qui remplace, dans le calcul aux différences finies, la formule (16).

Exemple. Soit donnée l'équation aux différences finies

$$\Delta^2 y - 2\Delta y + y = f(x), \tag{57}$$

ou

$$(\Delta^2 - 2\Delta + 1)y = f(x). \tag{58}$$

Comme on aura

$$\Delta^2 - 2\Delta + 1 = (\Delta - 1)^2,$$

on pourra substituer à l'équation (57) le système des deux formules

$$(\Delta - 1)z = f(x), \qquad (\Delta - 1)y = z\,; \tag{59}$$

ou, en d'autres termes, le système des deux équations

$$\Delta z - z = f(x), \qquad \Delta y - y = z. \tag{60}$$

Or on tirera de ces dernières

$$z = 2^{\frac{x}{h}-1}\Sigma 2^{-\frac{x}{h}} f(x), \qquad y = 2^{\frac{x}{h}-1}\Sigma 2^{-\frac{x}{h}} z, \tag{61}$$

et par suite

$$y = 2^{\frac{x}{h}-2}\Sigma\left\{\Sigma 2^{-\frac{x}{h}} f(x)\right\}. \tag{62}$$

Si maintenant on veut décomposer en intégrales simples l'intégrale double que renferme la valeur précédente de y, il suffira de prendre, dans l'équation (56)

$$u = \Sigma 2^{-\frac{x}{h}} f(x), \qquad \Delta v = 1.$$

Alors, en effet, on trouvera, pour une des valeurs de v,

$$v=\frac{x}{h},$$

et par suite

$$(63)\qquad \Sigma\left\{\Sigma 2^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}=\frac{x}{h}\Sigma 2^{-\frac{x}{h}}f(x)-\Sigma\frac{x+h}{h}2^{-\frac{x}{h}}f(x);$$

puis l'on en conclura

$$(64)\qquad y=2^{\frac{x}{h}-2}\left\{\frac{x}{h}\Sigma 2^{-\frac{x}{h}}f(x)-\Sigma\frac{x+h}{h}2^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}.$$

Si, dans le second membre de l'équation (64), on met en évidence les fonctions périodiques, et qu'on les désigne par $\varpi_1(x)$, $\varpi_2(x)$, cette équation prendra la forme suivante

$$(65)\qquad y=2^{\frac{x}{h}-2}\left\{\frac{x}{h}\left[\varpi_1(x)+\Sigma 2^{-\frac{x}{h}}f(x)\right]-\left[\varpi_2(x)+\Sigma\frac{x+h}{h}2^{-\frac{x}{h}}f(x)\right]\right\}.$$

Revenons à l'équation (51). Si l'on pose $n=2$, elle deviendra

$$(66)\qquad a_0\Delta^2 y+a_1\Delta y+a_2 y=f(x),$$

et son intégrale générale, fournie par la méthode ci-dessus exposée, sera

$$(67)\qquad y=\frac{1}{a_0}\frac{(1+r_2)^{\frac{x}{h}}}{(1+r_1)(1+r_2)}\Sigma\left\{\left(\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{x}{h}}\Sigma(1+r_1)^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}.$$

D'ailleurs, si, dans la formule (56), on prend

$$u=\Sigma(1+r_1)^{-\frac{x}{h}}f(x),\qquad \Delta v=\left(\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{x}{h}},$$

on trouvera, pour une des valeurs de v,

$$v=\frac{1+r_2}{r_1-r_2}\left(\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{x}{h}},$$

et par suite

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned}&\Sigma\left\{\left(\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{x}{h}}\Sigma(1+r_1)^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}\\&=\frac{1+r_2}{r_1-r_2}\left(\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{x}{h}}\Sigma(1+r_1)^{-\frac{x}{h}}f(x)+\frac{1+r_2}{r_2-r_1}\Sigma(1+r_2)^{-\frac{x}{h}}f(x).\end{aligned}\right.$$

Donc la valeur de y pourra être présentée sous la forme

$$(69)\qquad y=\frac{1}{a_0}\left\{\frac{(1+r_1)^{\frac{x}{h}-1}}{r_1-r_2}\Sigma(1+r_1)^{-\frac{x}{h}}f(x)+\frac{(1+r_2)^{\frac{x}{h}-1}}{r_2-r_1}\Sigma(1+r_2)^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}.$$

Si l'on met en évidence les fonctions périodiques, et qu'on les désigne par $\varpi_1(x)$, $\varpi_2(x)$, l'équation (69) donnera

$$(70)\qquad y=$$
$$\frac{(1+r_1)^{\frac{x}{h}-1}}{a_0(r_1-r_2)}\left\{\varpi_1(x)+\Sigma(1+r_1)^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}+\frac{(1+r_2)^{\frac{x}{h}-1}}{a_0(r_2-r_1)}\left\{\varpi_2(x)+\Sigma(1+r_2)^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}.$$

Dans le cas particulier où l'on a $r_2=r_1$, l'équation (67) se trouve réduite à la forme

$$(71)\qquad y=\frac{1}{a_0}(1+r)^{\frac{x}{h}-2}\Sigma\Sigma(1+r)^{-\frac{x}{h}}f(x),$$

et l'on en conclut, en opérant comme dans l'exemple que nous avons traité plus haut,

$$(72)\qquad y=\frac{1}{a_0}(1+r)^{\frac{x}{h}-2}\left\{\frac{x}{h}\Sigma(1+r)^{-\frac{x}{h}}f(x)-\Sigma\frac{x+h}{h}(1+r)^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}.$$

Si l'on mettait en évidence les fonctions périodiques, on trouverait

$$(73)\qquad y=$$
$$\frac{(1+r)^{\frac{x}{h}-2}}{a_0}\frac{x}{h}\left\{\varpi_1(x)+\Sigma(1+r)^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}-\frac{(1+r)^{\frac{x}{h}-2}}{a_0}\left\{\varpi_2(x)+\Sigma\frac{x+h}{h}(1+r)^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}$$

En restituant au nombre entier n, dans l'équation (51), une valeur quelconque, on tirera des formules (54)

$$(74)\quad y=\frac{(1+r_n)^{\frac{x}{h}}}{a_0(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)}\Sigma\left(\frac{1+r_{n-1}}{1+r_n}\right)^{\frac{x}{h}}\Sigma\left(\frac{1+r_{n-2}}{1+r_{n-1}}\right)^{\frac{x}{h}}\dots\Sigma\left(\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{x}{h}}\Sigma\frac{f(x)}{(1+r_1)^{\frac{x}{h}}},$$

chacun des signes Σ étant relatif à la fonction comprise entre ce même signe et la virgule placée à la suite du rapport $\frac{f(x)}{(1+r_1)^{\frac{x}{h}}}$. Ainsi, la valeur générale de y se trouvera exprimée par une intégrale multiple. Mais on pourra toujours décomposer cette intégrale multiple en intégrales simples à l'aide de l'équation (56).

Si, les racines $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$ étant égales entre elles, on supposait $a_0 = 1$, l'équation (51) pourrait être présentée sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(75)\quad \Delta^n y - \frac{n}{1} r \Delta^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} r^2 \Delta^{n-2} y - \ldots \pm \frac{n(n-1)}{1.2} r^{n-2} \Delta^2 y \mp \frac{n}{1} r^{n-1} \Delta y \pm r^n y = f(x),$$

$$(76)\qquad (\Delta - r)^n y = f(x),$$

et la valeur générale de y se réduirait à

$$(77)\qquad y = (1+r)^{\frac{x}{h}-n} \Sigma\Sigma \ldots \Sigma (1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x).$$

De plus, en intégrant par parties, on tirerait de la formule (77)

$$(78)\qquad y = \frac{(1+r)^{\frac{x}{h}-n}}{1.2..(n-1)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)..\left(\frac{x}{h}-n+2\right)\Sigma(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x) - \frac{n-1}{1}\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)..\left(\frac{x}{h}-n+3\right)\Sigma\left(\frac{x}{h}+1\right)(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x) \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-n+4\right)\Sigma\left(\frac{x}{h}+1\right)\left(\frac{x}{h}+2\right)(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x) - \text{etc.}\ldots\ldots \\ ..\mp\frac{(n-1)}{1}\frac{x}{h}\Sigma\left(\frac{x}{h}+1\right)..\left(\frac{x}{h}+n-2\right)(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x) \pm \Sigma\left(\frac{x}{h}+1\right)..\left(\frac{x}{h}+n-1\right)(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x) \end{array} \right\}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(79)\qquad y = (1+r)^{\frac{x}{h}-n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)..\left(\frac{x}{h}-n+2\right)}{1.2.3..(n-1)}\Sigma(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x) - \frac{\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)..\left(\frac{x}{h}-n+3\right)}{1.2.3..(n-2)}\Sigma\frac{\frac{x}{h}+1}{1}(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x) + .. \\ ..\pm\frac{\left(\frac{x}{h}\right)}{1}\Sigma\frac{\left(\frac{x}{h}+1\right)..\left(\frac{x}{h}+n-2\right)}{1.2.3..(n-2)}(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x) \pm \Sigma\frac{\left(\frac{x}{h}+1\right)..\left(\frac{x}{h}+n-1\right)}{1.2.3..(n-1)}(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x) \end{array} \right\}$$

Il est important d'observer que, dans l'équation (78) ou (79), chaque intégrale simple renferme une fonction périodique.

Proposons-nous maintenant d'intégrer une équation linéaire aux différences partielles, et à coefficients constants, entre deux variables indépendantes x, y, et une variable principale z. Supposons d'ailleurs que les dérivées partielles de z, comprises dans le premier membre de l'équation, soient toutes du même ordre. Si cet ordre se réduit à l'unité, l'équation pourra être présentée sous l'une des formes

(80) $(D_x - r D_y) z = f(x,y)$, (81) $\frac{dz}{dx} - r \frac{dz}{dy} = f(x,y)$,

et son intégrale générale sera

(82) $$z = \int_{x_0}^{x} f[s, y + r(x-s)] ds + \varphi(y + rx),$$

φ désignant une fonction arbitraire, et x_0 une valeur particulière de x. Mais, si l'équation proposée est de l'ordre n et de la forme

(83) $$a_0 \frac{d^n z}{dx^n} + a_1 \frac{d^n z}{dx^{n-1} dy} + a_2 \frac{d^n z}{dx^{n-2} dy^2} + .. + a_{n-1} \frac{d^n z}{dx dy^{n-1}} + a_n \frac{d^n z}{dy^n} = f(x,y).,$$

alors, en se servant des notations précédemment adoptées, on pourra la remplacer par l'une des deux formules

(84) $$\left\{ D_y^n \mathrm{F}\left(\frac{Dx}{Dy}\right) \right\} z = f(x,y),$$

(85) $$(D_x - r_1 D_y)(D_x - r_2 D_y) \dots (D_x - r_n D_y) z = \frac{f(x,y)}{a_0}.$$

Or, pour intégrer la dernière, il suffira de poser successivement

(86) $$\left\{ \begin{array}{l} (D_x - r_1 D_y) z_{n-1} = \frac{f(x,y)}{a_0}, \\ (D_x - r_2 D_y) z_{n-2} = z_{n-1}, \\ \text{etc....}, \\ (D_x - r_{n-1} D_y) z_1 = z_2, \\ (D_x - r_n D_y) z = z_1; \end{array} \right.$$

et, comme les équations (86) sont toutes semblables à la formule (80), il est clair que les inconnues $z_{n-1}, z_{n-2}, \dots z_2, z_1, z$ se déduiront les unes des autres, et l'inconnue z_{n-1} de la fonction $\frac{f(x,y)}{a_0}$, par des équations semblables à la formule (82).

1.er *Exemple.* Soit donnée l'équation aux différences partielles

(87) $$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{d^2 z}{dy^2} = ax + by,$$

ou

(88) $$(D_x^2 - D_y^2)z = ax + by,$$

a et b désignant deux quantités constantes. Comme on aura

$$D_x^2 - D_y^2 = (D_x - D_y)(D_x + D_y),$$

on pourra substituer à l'équation (87) le système des deux formules

(89) $$(D_x - D_y)z_1 = ax + by, \qquad (D_x + D_y)z = z_1,$$

ou, en d'autres termes, le système des deux équations

(90) $$\frac{dz_1}{dx} - \frac{dz_1}{dy} = ax + by, \qquad \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} = z_1.$$

Or on tirera de ces dernières

(91) $$\left\{\begin{aligned} z_1 &= \int_0^x [as + b(y + x - s)]ds + \varphi(y + x) = \frac{a+b}{2}x^2 + bxy + \varphi(y + x), \\ z &= \int_0^x \left[\frac{a+b}{2}s^2 + bs(y - x + s)\right] ds + \int_0^x \varphi(y - x + 2s)\,ds + \varphi_1(y - x) \\ &= \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2y}{2} + \int_0^x \varphi(y - x + 2s)\,ds + \varphi_1(y - x). \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$y - x + 2s = t, \qquad \int_0^t \varphi(t)\,dt = 2\Phi(t), \qquad \varphi_1(t) - \Phi(t) = \Phi_1(t),$$

on trouvera

$$\int_0^x \varphi(y - x + 2s)\,ds = \frac{1}{2}\int_{y-x}^{y+x} \varphi(t)\,dt = \Phi(y + x) - \Phi(y - x),$$

et la seconde des formules (91) pourra être réduite à

(92) $$z = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2y}{2} + \Phi(y + x) + \Phi_1(y - x).$$

L'équation (92), dans laquelle Φ, Φ_1 désignent deux fonctions arbitraires, est effectivement l'intégrale générale de l'équation (87).

2.° *Exemple.* Soit donnée l'équation aux différences partielles

(93) $$\frac{d^2 z}{dx^2} - 2\frac{d^2 z}{dx dy} + \frac{d^2 z}{dy^2} = e^{ax+by},$$

ou

(94) $$(D_x - D_y)^2 z = e^{ax+by}.$$

On pourra lui substituer le système des deux formules

(95) $$(D_x - D_y) z_1 = e^{ax+by}, \qquad (D_x - D_y) z = z_1,$$

ou, en d'autres termes, le système des deux équations

(96) $$\frac{dz_1}{dx} - \frac{dz_1}{dy} = e^{ax+by}, \qquad \frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} = z_1.$$

Or on tirera de ces dernières

(97) $$\begin{cases} z_1 = \int_0^x e^{as+b(y+x-s)} ds + \varphi(y+x) = \frac{e^{ax+by} - e^{b(x+y)}}{a-b} + \varphi(y+x), \\ z = \frac{1}{a-b}\int_0^x e^{as+b(y+x-s)} ds + \left[\varphi(y+x) - \frac{e^{b(y+x)}}{a-b}\right]\int_0^x ds + \varphi_1(y+x) \\ \quad = \frac{e^{ax+by}}{(a-b)^2} + x\left[\varphi(y+x) - \frac{e^{b(y+x)}}{a-b}\right] + \varphi_1(y+x) - \frac{e^{b(y+x)}}{(a-b)^2}; \end{cases}$$

puis, en posant, pour abréger,

$$\varphi(t) - \frac{e^{bt}}{a-b} = \Phi(t), \qquad \varphi_1(t) + \frac{e^{bt}}{(a-b)^2} = \Phi_1(t),$$

on trouvera simplement

(98) $$z = \frac{e^{ax+by}}{(a-b)^2} + x\Phi(y+x) + \Phi_1(y+x).$$

L'équation (98) dans laquelle Φ, Φ_1 désignent deux fonctions arbitraires est effectivement l'intégrale générale de l'équation (93).

Considérons enfin une équation linéaire aux différences finies partielles, et à coefficients constants, entre deux variables indépendantes x, y et une variable principale z. Supposons d'ailleurs que les différences finies de z, comprises dans le premier membre de l'équation, soient toutes du même ordre. Si cette équation est de l'ordre n, et de la forme

(99) $$a_0 \Delta_x^n z + a_1 \Delta_x^{n-1}\Delta_y z + a_2 \Delta_x^{n-2}\Delta_y^2 z + \ldots + a_{n-1}\Delta_x \Delta_y^{n-1} z + a_n \Delta_y^n z = f(x,y),$$

on pourra, en se servant des notations précédemment adoptées, la réduire à

$$(100)\qquad (\Delta_x - r_1\Delta_y)(\Delta_x - r_2\Delta_y)\dots(\Delta_x - r_n\Delta_y)\,z = \frac{f(x,y)}{a_0},$$

et lui substituer le système des formules

$$(101)\qquad \begin{cases} (\Delta_x - r_1\Delta_y)\,z_{n-1} = \dfrac{f(x,y)}{a_0}, \\ (\Delta_x - r_2\Delta_y)\,z_{n-2} = z_{n-1}, \\ \text{etc.....}, \\ (\Delta_x - r_{n-1}\Delta_y)\,z_1 = z_2, \\ (\Delta_x - r_n\Delta_y)\,z = z_1. \end{cases}$$

La question se trouvera ainsi ramenée à l'intégration de plusieurs équations du premier ordre, et qui seront toutes de la forme

$$(102)\qquad (\Delta_x - r\Delta_y)\,z = f(x,y).$$

Nous montrerons dans un autre article comment cette intégration peut être effectuée.

A la méthode dont nous venons de faire usage pour intégrer des équations linéaires à coefficients constants, on peut en joindre une seconde qui s'appuye sur le théorême dont voici l'énoncé.

THÉORÊME. *Supposons que les lettres* f, F, *accompagnées ou dépourvues d'indices, désignent des fonctions entières quelconques, que la fonction entière*

$$(103)\qquad \mathrm{F}(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau)$$

soit divisible par chacune des suivantes

$$(104)\qquad \mathrm{F}_1(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau);\qquad \mathrm{F}_2(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau),\qquad \text{etc...},$$

et que la fraction

$$\frac{\mathrm{f}(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau)}{\mathrm{F}(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau)}$$

soit décomposable en plusieurs fractions de même espèce, en sorte qu'on ait

$$(105)\qquad \frac{\mathrm{f}(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau)}{\mathrm{F}(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau)} = \frac{\mathrm{f}_1(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau)}{\mathrm{F}_1(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau)} + \frac{\mathrm{f}_2(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau)}{\mathrm{F}_2(\alpha,\beta,\dots\theta,\lambda,\mu,\dots\tau)} + \text{etc....}$$

Soit d'ailleurs $f(x,y,\ldots t)$ *une fonction quelconque des variables indépendantes* $x,y,\ldots t$. *La valeur de* u *donnée par la formule*

(106) $$u = \frac{\mathrm{f}(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)}{\mathrm{F}(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)} f(x,y,\ldots t),$$

c'est-à-dire, l'intégrale générale de l'équation linéaire

(107) $$\mathrm{F}(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)\,u = \mathrm{f}(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)\,f(x,y,\ldots t),$$

ou du moins l'une des valeurs de u, *propres à vérifier cette équation, coïncidera toujours avec la somme*

(108) $$u = \frac{\mathrm{f}_1(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)}{\mathrm{F}_1(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)} f(x,y,\ldots t) + \frac{\mathrm{f}_2(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)}{\mathrm{F}_2(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)} f(x,y,\ldots t) + \ldots$$

Démonstration. Soient u_1, u_2, ... les différents termes qui composent le second membre de l'équation (108). Cette équation donnera

(109) $$u = u_1 + u_2 + \text{etc.}\ldots,$$

et les fonctions u, u_1, ... vérifieront les formules

(110) $$\begin{cases} \mathrm{F}_1(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)\,u_1 = \mathrm{f}_1(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)\,f(x,y,\ldots t), \\ \mathrm{F}_2(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)\,u_2 = \mathrm{f}_2(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)\,f(x,y,\ldots t), \\ \text{etc.}\ldots \end{cases}$$

De plus, comme chacun des rapports

$$\frac{\mathrm{F}(\alpha,\beta,\ldots \theta,\lambda,\mu,\ldots \tau)}{\mathrm{F}_1(\alpha,\beta,\ldots \theta,\lambda,\mu,\ldots \tau)}, \qquad \frac{\mathrm{F}(\alpha,\beta,\ldots \theta,\lambda,\mu,\ldots \tau)}{\mathrm{F}_2(\alpha,\beta,\ldots \theta,\lambda,\mu,\ldots \tau)}, \qquad \text{etc.}\ldots$$

sera, par hypothèse, une fonction entière de α, β, ... θ, λ, μ, ν, ... τ, on conclura des formules (110)

(111) $$\begin{cases} \mathrm{F}(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)\,u_1 = \\ \dfrac{\mathrm{F}(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)}{\mathrm{F}_1(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)}\,\mathrm{f}_1(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)\,f(x,y,\ldots t), \\ \mathrm{F}(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)\,u_2 = \\ \dfrac{\mathrm{F}(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)}{\mathrm{F}_2(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)}\,\mathrm{f}_2(D_x,D_y,\ldots D_t,\Delta_x,\Delta_y,\ldots \Delta_t)\,f(x,y,\ldots t), \\ \text{etc.}\ldots \end{cases}$$

Enfin, comme, en vertu de l'équation (105), on aura identiquement

$$(112)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{f}(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t) \\ & = \frac{\mathrm{F}(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)}{\mathrm{F}_1(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)} \mathrm{f}_1(D_x, D_y, \ldots D_t) \\ & + \frac{\mathrm{F}(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)}{\mathrm{F}_2(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)} \mathrm{f}_2(D_x, D_y, \ldots D_t) \\ & + \text{etc.}\ldots, \end{aligned}\right.$$

on tirera des formules (111), ajoutées membre à membre,

$$(113)\quad \mathrm{F}(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t)(u_1 + u_2 + \ldots) = \mathrm{f}(D_x, D_y, \ldots D_t, \Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_t) f(x, y, \ldots t).$$

Or il résulte évidemment de l'équation (113) que la somme $u_1 + u_2 +$ etc... est une valeur de u propre à vérifier la formule (107).

Le théorême qui précède fournit un nouveau moyen de parvenir très-facilement aux intégrales générales des formules (10), (51) et (83). Considérons d'abord la formule (10) ou (13), de laquelle on tire

$$(114)\quad y = \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{F}(D)}.$$

Si les racines $r_1, r_2, \ldots r_n$ de l'équation (12) sont inégales, on aura

$$(115)\quad \frac{1}{\mathrm{F}(r)} = \frac{1}{\mathrm{F}'(r_1)} \frac{1}{r - r_1} + \frac{1}{\mathrm{F}'(r_2)} \frac{1}{r - r_2} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{F}'(r_n)} \frac{1}{r - r_n};$$

et l'on conclura du théorême dont il s'agit qu'on peut encore satisfaire à la formule (10) en prenant

$$(116)\quad y = \frac{1}{\mathrm{F}'(r_1)} \frac{f(x)}{D - r_1} + \frac{1}{\mathrm{F}'(r_2)} \frac{f(x)}{D - r_2} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{F}'(r_n)} \frac{f(x)}{D - r_n}.$$

De plus, comme la notation

$$(117)\quad \frac{f(x)}{D - r}$$

sert à représenter l'intégrale générale de l'équation

$$(D - r) y = f(x)$$

c'est-à-dire, un produit de la forme

$$(118) \qquad e^{rx}\int e^{-rx} f(x)\, dx,$$

il est clair que la formule (116) pourra s'écrire comme il suit

$$(119) \qquad y =$$

$$\frac{1}{F'(r_1)} e^{r_1 x}\int e^{-r_1 x} f(x)\, dx + \frac{1}{F'(r_2)} e^{r_2 x}\int e^{-r_2 x} f(x)\, dx + \ldots + e^{r_n x}\int e^{-r_n x} f(x)\, dx.$$

On doit observer que, dans le second membre de l'équation (119), chaque intégrale, étant indéfinie, comprend une constante arbitraire. Donc la valeur de y, fournie par cette équation, renfermera n constantes arbitraires, et représentera, aussi bien que l'équation (114), l'intégrale générale de la formule (10).

Si plusieurs des racines $r_1, r_2, \ldots r_n$ devenaient égales entr'elles, si l'on avait, par exemple,

$$(120) \qquad r_1 = r_2 = \ldots = r_m = \rho,$$

alors il faudrait, dans le second membre de la formule (115), substituer à la somme des m premiers termes le résidu de la fonction

$$(121) \qquad \frac{1}{(r-z)F(z)}$$

relatif à la valeur ρ de la variable z, ou, ce qui revient au même, le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ dans le développement du rapport

$$(122) \qquad \frac{1}{(r-\rho-\varepsilon)F(\rho+\varepsilon)}$$

en une série ordonnée suivant des puissances ascendantes de ε. Comme on aurait d'ailleurs

$$\frac{1}{r-\rho-\varepsilon} = \frac{1}{r-\rho} + \frac{\varepsilon}{(r-\rho)^2} + \ldots + \frac{\varepsilon^{m-2}}{(r-\rho)^{m-1}} + \frac{\varepsilon^{m-1}}{(r-\rho)^m} + \text{etc.}\ldots,$$

et par suite, en faisant pour abréger $\frac{\varepsilon^m}{F(\rho+\varepsilon)} = E$,

$$\frac{1}{(r-\rho-\varepsilon)\mathrm{F}(\rho+\varepsilon)}=\frac{E}{\varepsilon^m}\frac{1}{r-\rho}+\ldots+\frac{E}{\varepsilon^2}\frac{1}{(r-\rho)^{m-1}}+\frac{E}{\varepsilon}\frac{1}{(r-\rho)^m}+\text{etc}\ldots,$$

il est clair que le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$, dans le développement du rapport (122), serait ce que devient le polynome

$$(123)\quad \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}E}{d\varepsilon^{m-1}}\frac{1}{r-\rho}+\ldots+\frac{1}{1}\frac{dE}{d\varepsilon}\frac{1}{(r-\rho)^{m-1}}+E\frac{1}{(r-\rho)^m},$$

quand on pose, après les différenciations $\varepsilon=0$. Il en résulte qu'on devrait, dans l'hypothèse admise, modifier le second membre de la formule (116), en y remplaçant la somme des m premiers termes par l'expression

$$(124)\quad \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}E}{d\varepsilon^{m-1}}\frac{f(x)}{D-\rho}+\ldots+\frac{1}{1}\frac{dE}{d\varepsilon}\frac{1}{(D-\rho)^{m-1}}+E\frac{1}{(D-\rho)^m},$$

ou plutôt par la suivante

$$(125)\quad R_{m-1}\frac{f(x)}{D-\rho}+R_{m-2}\frac{f(x)}{(D-\rho)^2}+\ldots+R_1\frac{f(x)}{(D-\rho)^{m-1}}+R_0\frac{f(x)}{(D-\rho)^m},$$

dans laquelle

$$(126)\quad R_0=\frac{1.2.3\ldots m}{\mathrm{F}^{(m)}(\rho)},\qquad R_1,\qquad R_2,\ldots R_{m-1}$$

désignent les valeurs des coefficients

$$(127)\quad \frac{\varepsilon^m}{\mathrm{F}(\rho+\varepsilon)},\ \frac{1}{1}\frac{d\frac{\varepsilon^m}{\mathrm{F}(\rho+\varepsilon)}}{d\varepsilon},\ \frac{1}{1.2}\frac{d^2\frac{\varepsilon^m}{\mathrm{F}(\rho+\varepsilon)}}{d\varepsilon^2},\ldots\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}\frac{\varepsilon^m}{\mathrm{F}(\rho+\varepsilon)}}{d\varepsilon^{m-1}},$$

correspondantes à une valeur nulle de ε. De plus, comme la notation

$$(128)\quad \frac{f(x)}{(D-r)^n}$$

sert à représenter l'intégrale générale de l'équation

$$(D-r)^n y=f(x),$$

c'est-à-dire, le produit

$$(129)\quad e^{rx}\int\int\ldots\int e^{-rx}f(x)\,dx^n,$$

on peut évidemment à l'expression (125) substituer la suivante

$$(130)\quad e^{\rho x}\left\{R_{m-1}\int e^{-\rho x}f(x)\,dx+R_{m-2}\int\int e^{-\rho x}f(x)\,dx^2+..+R_0\int\int..\int e^{-\rho x}f(x)\,dx^m\right\},$$

Les diverses formules que l'on vient d'obtenir s'accordent avec celles que nous avons établies dans les Leçons données à l'École Royale Polytechnique, ainsi qu'avec la formule (14) de la page 204 du 1.er volume des Exercices.

Considérons maintenant l'équation (51) de laquelle on tire

$$(131)\qquad y=\frac{f(x)}{F(\Delta)}.$$

Il suit du théorême précédemment démontré que, si les racines $r_1, r_2, \ldots r_n$ sont inégales, on vérifiera encore l'équation (51), en prenant

$$(132)\qquad y=\frac{1}{F'(r_1)}\,\frac{f(x)}{\Delta-r_1}+\frac{1}{F'(r_2)}\,\frac{f(x)}{\Delta-r_2}+\ldots+\frac{1}{F'(r_n)}\,\frac{f(x)}{\Delta-r_n},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(133)\quad y=\frac{1}{F'(r_1)}(1+r_1)^{\frac{x}{h}-1}\Sigma(1+r_1)^{-\frac{x}{h}}f(x)+..+\frac{1}{F'(r_n)}(1+r_n)^{\frac{x}{h}-1}\Sigma(1+r_n)^{-\frac{x}{h}}f(x).$$

Il est bon d'observer que, dans le second membre de l'équation (133), chaque intégrale, étant indéfinie, comprend une fonction périodique. Donc la valeur de y fournie par cette équation, renfermera n fonctions périodiques, et représentera, aussi bien que la formule (131), l'intégrale générale de l'équation proposée.

Si les racines $r_1, r_2, \ldots r_m$ devenaient égales, ρ désignant la valeur de chacune d'elles, il faudrait, dans l'équation (132) ou (133), substituer à la somme des m premiers termes l'une des deux expressions

$$(134)\qquad R_{m-1}\frac{f(x)}{\Delta-\rho}+R_{m-2}\frac{f(x)}{(\Delta-\rho)^2}+\ldots+R_1\frac{f(x)}{(\Delta-\rho)^{m-1}}+R_0\frac{f(x)}{(\Delta-\rho)^m},$$

$$(135)\quad (1+\rho)^{\frac{x}{h}-n}\left\{R_{m-1}\Sigma(1+\rho)^{-\frac{x}{h}}f(x)+R_{m-2}\Sigma\Sigma(1+\rho)^{-\frac{x}{h}}f(x)+..+R_0\Sigma\Sigma..\Sigma(1+\rho)^{-\frac{x}{h}}f(x)\right\}.$$

Considérons enfin l'équation (85). Si l'on pose dans cette équation

$$(136)\qquad f(x,y)=D_y^{\,n-1}\mathfrak{f}(x,y),$$

ou, ce qui revient au même, si l'on fait,

$$(137)\qquad \mathfrak{f}(x,y)=\frac{f(x,y)}{D_y^{\,n-1}}=\int\int\ldots\int f(x,y)\,dy^{n-1},$$

elle donnera

(138) $$z = \frac{D_y^{n-1}}{D_y^n F\left(\frac{D_x}{D_y}\right)} f(x,y) = \frac{D_y^{n-1}}{a_0(D_x - r_1 D_y)(D_x - r_2 D_y)\dots(D_x - r_n D_y)} f(x,y),$$

et comme, en supposant d'abord les racines $r_1, r_2, \dots r_n$ inégales, on aura identiquement

$$\frac{D_y^{n-1}}{a_0(D_x - r_1 D_y)(D_x - r_2 D_y)\dots(D_x - r_n D_y)} =$$

$$\frac{1}{F'(r_1)} \frac{1}{D_x - r_1 D_y} + \frac{1}{F'(r_2)} \frac{1}{D_x - r_2 D_y} + \dots + \frac{1}{F'(r_n)} \frac{1}{D_n - r_n D_y},$$

on tirera de l'équation (138) et du théorême précédemment démontré

(139) $$z = \frac{1}{F'(r_1)} \frac{f(x,y)}{D_x - r_1 D_y} + \frac{1}{F'(r_2)} \frac{f(x,y)}{D_x - r_2 D_y} + \dots + \frac{1}{F'(r_n)} \frac{f(x,y)}{D_x - r_n D_y}.$$

De plus, comme la notation

(140) $$\frac{f(x,y)}{D_x - r D_y}$$

sert à représenter l'intégrale générale de l'équation

$$(D_x - r D_y) z = f(x,y),$$

c'est-à-dire, un produit de la forme

(141) $$\int_{x_0}^{x} f[s, y + r(x - s)]\, ds + \varphi(y + rx),$$

la lettre φ désignant une fonction arbitraire; il est clair que la formule (139) pourra s'écrire ainsi qu'il suit

(142) $$z = \frac{1}{F'(r_1)} \left\{ \int_{x_0}^{x} f[s, y + r_1(x - s)]\, ds + \varphi_1(y + r_1 x) \right\}$$
$$+ \text{etc.} \dots$$
$$+ \frac{1}{F'(r_n)} \left\{ \int_{x_0}^{x} f[s, y + r_n(x - s)]\, ds + \varphi_n(y + r_n x) \right\}.$$

Cette dernière valeur de z, renfermant n fonctions arbitraires, représentera, aussi bien que la formule (138), l'intégrale générale de l'équation proposée.

Il est important d'observer que, dans l'équation (142), on peut attribuer à la fonction

$f(x,y)$ l'une quelconque des valeurs propres à vérifier la formule (136) ou (137), et supposer, par exemple,

$$(143)\qquad f(x,y)=\int_0^y\int_0^y\cdots\int_0^y f(x,y)\,dy^{n-1}=\int_0^y\frac{(y-t)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}f(x,t)\,dt.$$

Dans le cas particulier où la fonction $f(x,y)$ s'évanouit, l'équation (143) donne pareillement $f(x,y)=0$, et la valeur de z se réduit à

$$(144)\qquad z=\varphi_1(y+r_1x)+\varphi_2(y+r_2x)+\ldots+\varphi_n(y+r_nx).$$

Si les racines r_1, r_2, ... r_n devenaient égales, ρ désignant la valeur de chacune d'elles, il faudrait, dans le premier membre de l'équation (139), substituer à la somme des m premiers termes le polynome

$$(145)\qquad R_{m-1}\frac{f(x,y)}{D_x-\rho D_y}+R_{m-2}\frac{D_y f(x,y)}{(D_x-\rho D_y)^2}+\ldots+R_0\frac{D_y{}^{m-1}f(x,y)}{(D_x-\rho D_y)^m}.$$

Or il est facile de calculer ce polynome, quand on regarde comme connues les expressions de la forme

$$(146)\qquad \frac{f(x,y)}{(D_x-rD_y)^n}.$$

D'ailleurs l'expression (146) n'est autre chose que l'intégrale générale de l'équation

$$(147)\qquad (D_x-rD_y)^n z=f(x,y),$$

et cette intégrale, que fournit la première des deux méthodes ci-dessus indiquées, peut s'écrire ainsi qu'il suit

$$(148)\qquad z=\int_{x_0}^x\frac{(x-s)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(s,y+rx-rs)\,ds$$
$$+x^{n-1}\varphi_1(y+rx)+x^{n-2}\varphi_2(y+rx)+\ldots+x\varphi_{n-1}(y+rx)+\varphi_n(y+rx).$$

Donc le polynome, qui doit être substitué à la somme des m premiers termes, dans le second membre de l'équation (139), lorsque la condition (120) se trouve remplie, c'est-à-dire, le polynome (145), sera équivalent à l'expression

$$(149)\quad\left\{\begin{aligned}&R_{m-1}\int_{x_0}^x f(s,y+\rho x-\rho s)\,ds+R_{m-2}\int_{x_0}^x\frac{x-s}{1}\,\frac{df(s,y+\rho x-\rho s)}{dy}\,ds+\ldots\ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+R_0\int_{x_0}^x\frac{(x-s)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{d^{m-1}f(s,y+\rho x-\rho s)}{dy^{m-1}}\,ds\\&+x^{m-1}\varphi(y+\rho x)+x^{m-2}\varphi_1(y+\rho x)+\ldots+x\varphi_{m-2}(y+\rho x)+\varphi_{m-1}(y+\rho x).\end{aligned}\right.$$

La formule (83) n'est pas la seule équation linéaire aux différences partielles qui s'in-

tègre à l'aide des méthodes exposées dans ce paragraphe ; et l'on pourrait appliquer ces méthodes à l'intégration de beaucoup d'autres équations du même genre. Considérons, par exemple, l'équation aux différences partielles

$$(150)\quad a^4\frac{d^4z}{dx^4}-2a^2b^2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+b^4\frac{d^4z}{dy^4}-2\left(a^2\frac{d^2z}{dx^2}+b^2\frac{d^2z}{dy^2}\right)+z=f(x,y),$$

ou

$$(151)\quad [a^4D_x^4-2a^2b^2D_x^2D_y^2+b^4D_y^4-2(a^2D_x^2+b^2D_y^2)+1]z=f(x,y).$$

Comme on aura identiquement

$$a^4D_x^4-2a^2b^2D_x^2D_y^2+b^4D_y^4-2(a^2D_x^2+b^2D_y^2)+1$$
$$=(aD_x+bD_y+1)(aD_x+bD_y-1)(aD_x-bD_y+1)(aD_x-bD_y-1),$$

il est clair que, pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (150), il suffira d'intégrer successivement les quatre équations du premier ordre

$$(152)\quad \begin{cases}(aD_x+bD_y+1)z_3=f(x,y),\\ (aD_x+bD_y-1)z_2=z_3,\\ (aD_x-bD_y+1)z_1=z_2,\\ (aD_x-bD_y-1)z=z_3,\end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, les quatre équations

$$(153)\quad \begin{cases}a\dfrac{dz_3}{dx}+b\dfrac{dz_3}{dy}+z_3=f(x,y),\\ a\dfrac{dz_2}{dx}+b\dfrac{dz_2}{dy}-z_2=z_3,\\ a\dfrac{dz_1}{dx}-b\dfrac{dz_1}{dy}+z_1=z_2,\\ a\dfrac{dz}{dx}-b\dfrac{dz}{dy}-z=z_1,\end{cases}$$

Or l'intégration d'une équation du premier ordre peut toujours être effectuée par les méthodes connues, sans aucune difficulté.

Je montrerai, dans un autre article, les avantages que présente l'emploi des notations

$$\varphi(\alpha)f(\overline{x}),\qquad \varphi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\ldots),$$

quand on se propose d'intégrer des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites, mêlées ou non mêlées, et à coefficients constants.

ADDITION A L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

On a vu, dans l'article précédent qu'il était facile d'intégrer les formules (10), (51), (83) et (99) du § 4, quand on connaissait les intégrales générales des quatre équations du premier ordre

(1) $$\frac{dy}{dx}-ry=f(x), \quad \text{ou} \quad (D-r)y=f(x),$$

(2) $$\Delta y-ry=f(x), \quad \text{ou} \quad (\Delta-r)y=f(x),$$

(3) $$\frac{dz}{dx}-r\frac{dz}{dy}=f(x,y), \quad \text{ou} \quad (\Delta_x-r\Delta_y)z=f(x,y),$$

(4) $$\Delta_x z-r\Delta_y z=f(x,y), \quad \text{ou} \quad (\Delta_x-r\Delta_y)z=f(x,y).$$

Nous allons montrer ici le parti qu'on peut tirer des caractéristiques D et Δ pour intégrer ces quatre équations, dont les trois premières ont été souvent traitées par les géomètres.

Considérons d'abord l'équation (1). Si l'on y suppose $f(x)=0$, elle donnera

$$\frac{dy}{y}=r\,dx, \quad \mathrm{l}(y)=rx+\text{const.},$$

et par suite

(5) $$y=\mathcal{C}e^{rx},$$

$\mathcal{C}$ désignant une constante arbitraire. Mais, si la fonction $f(x)$ cesse d'être nulle, alors, pour que la formule (5) continue de fournir l'intégrale cherchée, il faudra nécessairement y remplacer la constante $\mathcal{C}$ par une fonction z de la variable x. Posons, en conséquence, dans le cas dont il s'agit,

(6) $$y=e^{rx}z.$$

En substituant la valeur précédente de y dans l'équation (1), et ayant égard à la première des formules (12) de la page 162, on trouvera

$$(D-r)[e^{rx}z]=e^{rx}Dz=f(x), \qquad Dz=e^{-rx}f(x),$$

et par suite

(7) $$z=\frac{e^{-rx}f(x)}{D}=\int e^{-rx}f(x)\,dx.$$

Donc la valeur cherchée de y sera celle que présente la formule (8) de la page 170, savoir

(8) $$y=e^{rx}\int e^{-rx}f(x)\,dx.$$

Il est bon d'observer qu'on peut intégrer de la même manière l'équation linéaire

(9) $$(D-r)^n y=f(x).$$

En effet, si l'on substitue dans cette équation la valeur de y tirée de la formule (6), et si l'on a toujours égard à la première des formules (12) de la page 162, on trouvera

$$(D-r)^n[e^{rx}z]=e^{rx}D^n z=f(x), \qquad D^n z=e^{-rx}f(x),$$

et par suite

(10) $$z=\int\int\ldots\int e^{-rx}f(x)\,dx^n,$$

(11) $$y=e^{rx}\int\int\ldots\int e^{-rx}f(x)\,dx^n.$$

On pourrait encore parvenir aux équations (8) et (11) à l'aide des remarques suivantes.

Si, dans la formule déjà citée de la page 162, on remplace la fonction $f(x)$ par le produit $e^{-rx}f(x)$, on en conclura

(12) $$\mathrm{F}(D)[f(x)]=e^{rx}\mathrm{F}(D+r)[e^{-rx}f(x)].$$

De plus, il est aisé de s'assurer que l'équation (12) subsiste dans le cas où la fonction $\mathrm{F}(D)$ cesse d'être entière, et devient fractionnaire. En partant de ce principe, on tirera immédiatement de la formule (1), ainsi que l'a observé M. Brisson,

(13) $$y=\frac{f(x)}{D-r}=e^{rx}\frac{1}{D}[e^{-rx}f(x)]=e^{rx}\int e^{-rx}f(x)\,dx,$$

et de la formule (9)

(14) $$y=\frac{f(x)}{(D-r)^n}=e^{rx}\frac{1}{D^n}[e^{-rx}f(x)]=e^{rx}\int\int\ldots\int e^{-rx}f(x)\,dx^n.$$

Considérons maintenant l'équation (2). Si l'on y suppose d'abord $f(x) = 0$, on en tirera, en désignant par h la différence finie de x, et par $\mathcal{F}(x)$ la valeur générale de y,

$$\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x) = r\mathcal{F}(x),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathcal{F}(x+h) = (1+r)\mathcal{F}(x), \qquad \text{et par suite}$$

$$\mathcal{F}(x+2h) = (1+r)\mathcal{F}(x+h),$$

$$\mathcal{F}(x+nh) = (1+r)\mathcal{F}[x+(n-1)h];$$

puis, en combinant ces dernières formules par voie de multiplication, on trouvera

(15) $$\mathcal{F}(x+nh) = (1+r)^n\mathcal{F}(x).$$

Si, dans l'équation (15), on attribue à x une valeur particulière x_0, elle donnera

(16) $$\mathcal{F}(x_0+nh) = (1+r)^n\mathcal{F}(x_0).$$

Enfin, si l'on pose dans l'équation (16) $x_0 = 0$, $nh = x$, on en conclura

(17) $$\mathcal{F}(x) = (1+r)^{\frac{x}{h}}\mathcal{F}(0).$$

Par conséquent, lorsque x sera un multiple de h, la valeur de y propre à vérifier l'équation

(18) $$\Delta y - ry = 0$$

sera de la forme

(19) $$y = (1+r)^{\frac{x}{h}}\mathcal{C},$$

$\mathcal{C}$ désignant la valeur constante de y qui correspond à $x = 0$.

Concevons à présent que la variable x, et la fonction $f(x)$ comprise dans le second membre de l'équation (2), reprennent des valeurs quelconques. Alors, pour que la formule (19) fournisse encore l'intégrale de cette équation, il faudra que la constante $\mathcal{C}$ soit remplacée par une fonction z de la variable x. Posons en conséquence

(20) $$y = (1+r)^{\frac{x}{h}}z.$$

En substituant la valeur précédente de y dans l'équation (2), on trouvera

$$(21) \qquad (\Delta - r)\left[(1+r)^{\frac{x}{h}} z\right] = f(x).$$

D'ailleurs, si l'on écrit $\Delta - r$ au lieu de $F(\Delta)$, et $\frac{l(1+r)}{h}$ au lieu de r, dans la seconde des formules (12) de la page 162, on en tirera

$$(22) \qquad (\Delta - r)\left[(1+r)^{\frac{x}{h}} z\right] = (1+r)^{\frac{x}{h}+1} \Delta z.$$

Donc l'équation (21) donnera

$$(1+r)^{\frac{x}{h}+1} \Delta z = f(x), \qquad \Delta z = (1+r)^{-\frac{x}{h}-1} f(x),$$

et par suite

$$(23) \qquad z = \frac{(1+r)^{-\frac{x}{h}-1} f(x)}{\Delta} = \Sigma (1+r)^{-\frac{x}{h}-1} f(x), \quad = (1+r)^{-1} \Sigma (1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x),$$

la valeur de l'intégrale aux différences finies comprenant une fonction périodique. Donc la valeur de y, propre à vérifier l'équation (2), sera celle que présente la formule (55) de la page 176, savoir

$$(24) \qquad y = (1+r)^{\frac{x}{h}-1} \Sigma (1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x).$$

Il est bon d'observer qu'on pourrait intégrer de la même manière l'équation linéaire

$$(25) \qquad (\Delta - r)^n y = f(x).$$

En effet, si l'on substitue dans cette équation la valeur de y tirée de la formule (20), et si l'on a toujours égard à la seconde des formules (12) de la page 162, on trouvera

$$(\Delta - r)^n \left[(1+r)^{\frac{x}{h}} z\right] = (1+r)^{\frac{x}{h}+n} \Delta^n z = f(x),$$

$$\Delta^n z = (1+r)^{-\frac{x}{h}-n} f(x),$$

et par suite

$$(26) \qquad z = (1+r)^{-n} \Sigma\Sigma \ldots \Sigma (1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x),$$

$$(27) \qquad y = (1+r)^{\frac{x}{h}-n} \Sigma\Sigma \ldots \Sigma (1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x).$$

On pourrait encore parvenir aux équations (24) et (27) à l'aide des remarques suivantes.

Si, dans la formule déjà citée de la page 162, on remplace r par $\frac{\mathrm{l}(1+r)}{h}$, et la fonction $f(x)$ par le produit $(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x)$, on en conclura

$$\text{(28)} \qquad \mathrm{F}(\Delta)[f(x)] = (1+r)^{\frac{x}{h}} \mathrm{F}[(1+r)(1+\Delta)-1][(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x)].$$

De plus, il est aisé de s'assurer que l'équation (28) subsiste dans le cas où la fonction $\mathrm{F}(\Delta)$ cesse d'être entière, et devient fractionnaire. En partant de ce principe, on tirera immédiatement de la formule (2)

$$\text{(29)} \qquad y = \frac{f(x)}{\Delta - r} = (1+r)^{\frac{x}{h}} \frac{(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x)}{(1+r)\Delta} = (1+r)^{\frac{x}{h}-1} \Sigma (1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x),$$

et de la formule (25)

$$\text{(30)} \qquad y = \frac{f(x)}{(\Delta - r)^n} = (1+r)^{\frac{x}{h}} \frac{(1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x)}{(1+r)^n \Delta^n} = (1+r)^{\frac{x}{h}-n} \Sigma\Sigma \ldots \Sigma (1+r)^{-\frac{x}{h}} f(x).$$

Passons maintenant à l'équation (3), et soit

$$\text{(31)} \qquad z = \mathfrak{f}(x, y)$$

une quelconque des valeurs de z propres à vérifier cette équation. Si l'on conçoit que la variable y devienne elle-même fonction de la variable x, et si l'on désigne par ζ la valeur que prend alors la variable z; on aura, en considérant y comme une fonction de x, et faisant $\frac{dy}{dx} = y'$,

$$\text{(32)} \qquad \zeta = \mathfrak{f}(x, y) = z,$$

et par suite

$$\text{(33)} \qquad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{dz}{dx} + y' \frac{dz}{dy}.$$

D'ailleurs, pour faire coïncider le second membre de la formule (33) avec le premier membre de l'équation (3), il suffira de supposer

$$\text{(34)} \qquad y' = -r,$$

ou, ce qui revient au même,

(35) $$y = \Theta - rx,$$

Θ désignant une constante arbitraire. Alors la formule (33) se trouvera réduite à

(36) $$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{dz}{dx} - r\frac{dz}{dy},$$

et pourra s'écrire comme il suit

(37) $$D_x\zeta = (D_x - rD_y)z.$$

Ajoutons que, dans la même hypothèse, on tirera de l'équation (3)

(38) $$(D_x - rD_y)z = f(x, \Theta - rx).$$

On aura donc définitivement

(39) $$D_x\zeta = f(x, \Theta - rx).$$

Or l'intégrale générale de cette dernière équation est

(40) $$\zeta = \int f(x, \Theta - rx)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(s, \Theta - rs)\,ds + \Theta_1,$$

x_0 désignant une valeur particulière de x, et Θ_1 une nouvelle constante arbitraire qui pourra dépendre de la première d'une manière quelconque. Donc, si l'on représente par $\varphi(\Theta)$ une fonction arbitraire de Θ, la valeur la plus générale de ζ, exprimée en fonction de x et de Θ, sera de la forme

(41) $$\zeta = \int_{x_0}^{x} f(s, \Theta - rs)\,ds + \varphi(\Theta).$$

Il importe d'observer qu'on ne diminuera pas la généralité de cette valeur de ζ, en réduisant à zéro la première limite de l'intégration relative à s, c'est-à-dire la quantité x_0.

En résumé, toute valeur de z, propre à vérifier l'équation (3), prendra la forme

(42) $$z = \int f(x, \Theta - rx)\,dx,$$

ou la forme équivalente

(43) $$z = \int_{x_0}^{x} f(s, \Theta - rs)\,ds + \varphi(\Theta),$$

quand on supposera x et y liés entre eux par l'équation (35), ou ce qui revient au même, par la suivante

(44) $$\Theta = y + rx.$$

Donc alors cette valeur de z ne différera pas de celle que fournit une équation de la forme

(45) $$z = \int_{x_0}^{x} f(s, y + rx - rs)\,ds + \varphi(y + rx).$$

Cette conclusion devant subsister, quelles que soient les valeurs de x et de Θ, par conséquent, quelles que soient les valeurs de x et de y, l'équation (45) sera évidemment l'intégrale générale de l'équation (3).

Si, dans les calculs qui précèdent, on échangeait l'une contre l'autre les variables x et y, on reconnaîtrait, 1.° que, dans le cas où ces variables sont liées entre elles par l'équation (44), l'une quelconque des valeurs de z tirées de l'équation (3) se présente sous la forme

(46) $$z = -\frac{1}{r}\int f\left(\frac{\Theta - y}{r}, y\right) dy,$$

ou sous la forme équivalente

(47) $$z = -\frac{1}{r}\int_{y_0}^{y} f\left(\frac{\Theta - s}{r}, s\right) ds + \varphi(\Theta);$$

2.° que l'intégrale générale de l'équation (3) peut s'écrire comme il suit

(48) $$z = -\frac{1}{r}\int_{y_0}^{y} f\left(x + \frac{y}{r} - \frac{s}{r}\right) ds + \varphi(y + rx).$$

Ajoutons qu'ordinairement la fonction φ changera de valeur dans le passage de l'équation (45) à l'équation (48).

La méthode que nous avons employée pour intégrer l'équation (3) s'appliquerait encore très-facilement à l'intégration de l'équation linéaire

(49) $$(D_x - rD_y)^n z = f(x, y).$$

Admettons en effet que l'inconnue z doive vérifier l'équation (49). Si l'on nomme toujours ζ la fonction de x à laquelle z se réduit, quand les variables x et y sont liées entre elles par la formule (44); on trouvera, comme ci-dessus, en supposant $y = \Theta - rx$,

(32) $$\zeta = z,$$

(37) $$D_x\zeta = (D_x - rD_y)z.$$

Cela posé, concevons que, dans les polynomes

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 2r\frac{d^2z}{dx\,dy} + r^2\frac{d^2z}{dy^2} = (D_x - rD_y)^2 z$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} - 3r\frac{d^3z}{dx^2dy} + 3r^2\frac{d^3z}{dx\,dy^2} - r^3\frac{d^3z}{dy^3} = (D_x - rD_y)^3 z,$$

etc...,

qui représentent généralement des fonctions de x et de y, on continue de regarder y comme équivalent à $\circleddash - rx$. On tirera évidemment de l'équation (37), différenciée $n-1$ fois par rapport à x,

(50) $$D_x^n\zeta = (D_x - rD_y)^n z,$$

puis l'on conclura de cette dernière, combinée avec l'équation (49),

(51) $$D_x^n\zeta = f(x, \circleddash - rx).$$

Or l'intégrale générale de l'équation (51) sera

(52) $$\zeta = \int\int\ldots\int f(x, \circleddash - rx)\,dx^n,$$

ou, ce qui revient au même,

(53) $$\zeta = \frac{x^{n-1}\int f(x,\circleddash - rx)\,dx - \frac{n-1}{1}x^{n-2}\int xf(x,\circleddash - rx)\,dx + \ldots \pm \int x^{n-1}f(x,\circleddash - rx)\,dx}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

et, si l'on met en évidence les constantes arbitraires introduites par l'intégration, elle prendra la forme

(54) $$\zeta = \circleddash_1 x^{n-1} + \circleddash_2 x^{n-2} + \ldots + \circleddash_{n-1}x + \circleddash_n + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(s, \circleddash - rs)\,ds.$$

Ces constantes pouvant d'ailleurs être des fonctions quelconques de $\odot$, la valeur précédente de ζ pourra s'écrire comme il suit

(55)
$$\zeta = x^{n-1}\varphi_1(\odot)+x^{n-2}\varphi_2(\odot)+\ldots+x\varphi_{n-1}(\odot)+\varphi_n(\odot)+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f(s,\odot-rs)\,ds.$$

En résumé, toute valeur de z, propre à vérifier l'équation (49), prendra la forme

(56)
$$z=\int\int\ldots\int f(x,\odot-rx)\,dx^n,$$

ou la forme équivalente

(57)
$$z= x^{n-1}\varphi_1(\odot)+x^{n-2}\varphi_2(\odot)+\ldots+x\varphi_{n-1}(\odot)+\varphi_n(\odot)+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^{n-1}f(s,\odot-rs)}{1.2.3\ldots(n-1)}\,ds,$$

quand on supposera x et y liés entre eux par l'équation (44). Donc alors cette valeur de z ne différera pas de celle que fournit l'équation

(58)
$$z=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-s)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(s,y+rx-rs)\,ds$$
$$+x^{n-1}\varphi_1(y+rx)+x^{n-2}\varphi_2(y+rx)+\ldots+x\varphi_{n-1}(y+rx)+\varphi_n(y+rx).$$

Cette conclusion devant subsister quelles que soient les valeurs de x et de $\odot$, par conséquent, quelles que soient les valeurs de x et de y, l'équation (58) sera évidemment l'intégrale générale de l'équation (49).

Considérons enfin l'équation (4). Si l'on désigne par $\Delta x = h$, $\Delta y = k$, les différences finies des variables indépendantes x, y, et par $\mathcal{F}(x,y)$ la valeur générale de la variable principale z, cette équation pourra s'écrire comme il suit

(59)
$$\mathcal{F}(x+h,y)-r\mathcal{F}(x,y+k)-(1-r)\mathcal{F}(x,y)=f(x,y),$$

et l'on en conclura successivement

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{F}(x+h,y) = r\mathcal{F}(x,y+k) + (1-r)\mathcal{F}(x,y) + f(x,y)\\ &\mathcal{F}(x+2h,y) = r\mathcal{F}(x+h,y+k) + (1-r)\mathcal{F}(x+h,y) + f(x+h,y)\\ &\qquad = r^2\mathcal{F}(x,y+2k) + 2r(1-r)\mathcal{F}(x,y+k) + (1-r)^2\mathcal{F}(x,y)\\ &\qquad\qquad + rf(x,y+k) + (1-r)f(x,y)\\ &\qquad\qquad\qquad + f(x+h,y)\,,\\ &\text{etc....} \end{aligned}\right.$$

Soit maintenant n un nombre entier quelconque. Pour obtenir la valeur générale de $\mathcal{F}(x+nh,y)$ exprimée à l'aide des quantités

$$\mathcal{F}(x,y+nk)\,,\quad \mathcal{F}[x,y+(n-1)k]\,,\ \ldots\ \mathcal{F}(x,y+k)\,,\quad \mathcal{F}(x,y)\,,$$

on commencera par observer qu'on a identiquement

$$(61)\qquad \mathcal{F}(x+nh,y) = (1+\Delta_x)^n\mathcal{F}(x,y) = (1+\Delta_x)^n z.$$

De plus, le rapport

$$\frac{(1+\Delta_x)^n-(1+r\Delta_y)^n}{\Delta_x-r\Delta_y} = \frac{(1+\Delta_x)^n-(1+r\Delta_y)^n}{1+\Delta_x-(1+r\Delta_y)}$$

$$= (1+\Delta_x)^{n-1} + (1+\Delta_x)^{n-2}(1+r\Delta_y) + \ldots + (1+\Delta_x)(1+r\Delta_y)^{n-2} + (1+r\Delta_y)^{n-1}$$

étant une fonction entière de Δ_x et Δ_y, on tirera de l'équation (4)

$$(62)\qquad [(1+\Delta_x)^n-(1+r\Delta_y)^n]z =$$

$$[(1+\Delta_x)^{n-1}+(1+\Delta_x)^{n-2}(1+r\Delta_y)+\ldots+(1+\Delta_x)(1+r\Delta_y)^{n-2}+(1+r\Delta_y)^{n-1}]f(x,y),$$

et par suite

$$(63)\qquad \mathcal{F}(x+nh,y) = (1+\Delta_x)^n z = (1+r\Delta_y)^n\mathcal{F}(x,y)$$

$$+[(1+\Delta_x)^{n-1}+(1+\Delta_x)^{n-2}(1+r\Delta_y)+\ldots+(1+\Delta_x)(1+r\Delta_y)^{n-2}+(1+r\Delta_y)^{n-1}]f(x,y),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(64)\qquad \mathcal{F}(x+nh,y) = (1+r\Delta_y)^n\mathcal{F}(x,y)$$

$$+f[x+(n-1)h,y]+(1+r\Delta_y)f[x+(n-2)h,y]+\ldots+(1+r\Delta_y)^{n-2}f(x+h,y)+(1+r\Delta_y)^{n-1}f(x,y).$$

Comme d'ailleurs on aura évidemment, pour une valeur entière de m, et pour une valeur quelconque de $f(x,y)$,

(65) $$(1+r\Delta_y)^m f(x,y) = [r(1+\Delta_y)+1-r]^m f(x,y)$$

$$= \left\{ r^m(1+\Delta_y)^m + \frac{m}{1} r^{m-1}(1-r)(1+\Delta_y)^{m-1} + \ldots + \frac{m}{1} r(1-r)^{m-1}(1+\Delta_y) + (1-r)^m \right\} f(x,y)$$

$$= r^m f(x,y+mk) + \frac{m}{1} r^{m-1}(1-r) f[x,y+(m-1)k] + \ldots + \frac{m}{1} r(1-r)^{m-1} f(x,y+k) + (1-r)^m f(x,y);$$

il est clair que la formule (64) donnera

(66) $$\mathcal{F}(x+nh,y) =$$

$$r^n \mathcal{F}(x,y+nk) + \frac{n}{1} r^{n-1}(1-r)\mathcal{F}[x,y+(n-1)k] + \ldots\ldots + (1-r)^n \mathcal{F}(x,y)$$

$$+ r^{n-1} f[x,y+(n-1)k] + \frac{n-1}{1} r^{n-2}(1-r) f[x,y+(n-2)k] + \ldots + (1-r)^{n-1} f(x,y)$$

$$+ r^{n-2} f[x+h,y+(n-2)k] + \frac{n-2}{1} r^{n-3}(1-r) f[x+h,y+(n-3)k] + \ldots + (1-r)^{n-2} f(x+h,y)$$

$$+ \text{etc.}\ldots,$$

$$+ r f[x+(n-2)h,y+k] + (1-r) f[x+(n-2)h,y]$$

$$+ f[x+(n-1)h,y].$$

Cela posé, si l'on désigne par x_0 une valeur particulière de la variable x, et par

$$\varphi(y) = \mathcal{F}(x_0,y)$$

la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x,y)$, on trouvera

(67) $$\mathcal{F}(x_0+nh,y) =$$

$$r^n \varphi(y+nk) + \frac{n}{1} r^{n-1}(1-r)\varphi[y+(n-1)k] + \ldots\ldots + (1-r)^n \varphi(y)$$

$$+ r^{n-1} f[x_0,y+(n-1)k] + \frac{n-1}{1} r^{n-2}(1-r) f[x_0,y+(n-2)k] + \ldots + (1-r)^{n-1} f(x_0,y)$$

$$+ r^{n-2} f[x_0+h,y+(n-2)k] + \frac{n-2}{1} r^{n-3}(1-r) f[x_0+h,y+(n-3)k] + \ldots + (1-r)^{n-2} f(x_0+h,y)$$

$$+ \text{etc.}\ldots,$$

$$+ r f[x_0+(n-2)h,y+k] + (1-r) f[x_0+(n-2)h,y]$$

$$+ f[x_0+(n-1)h,y].$$

Cette dernière équation coïncide avec la formule

$$(68)\qquad \mathcal{F}(x_0+nh,y)=(1+r\Delta_y)^n\varphi(y)$$
$$+f[x_0+(n-1)h,y]+(1+r\Delta_y)f[x_0+(n-2)h,y]+\ldots+(1+r\Delta_y)^{n-1}f(x_0,y),$$

que l'on déduit de l'équation (64) en posant $x=x_0$.

La formule (67) ou (68) suffit pour déterminer la valeur de l'inconnue $z=\mathcal{F}(x,y)$ correspondante à $x=x_0+nh$, quand on considère comme donnée la valeur $\varphi(y)$ de z, correspondante à $x=x_0$.

Dans le cas particulier où l'on a $f(x,y)=0$, la formule (4) se réduit à

$$(69)\qquad \Delta_x z=r\Delta_y z,$$

et l'on tire de l'équation (68), en posant $x_0=0$, $x=nh$,

$$(70)\qquad z=\mathcal{F}(x,y)=(1+r\Delta_y)^{\frac{x}{h}}\varphi(y).$$

Si l'on transforme la valeur précédente de z, à l'aide des notations et des principes ci-dessus établis [pages 162 et suiv.], on trouvera

$$(71)\qquad z=\left[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)\right]^{\frac{x}{h}}\varphi(y),$$

la lettre caractéristique β étant relative à la variable y. En d'autres termes on aura

$$(72)\qquad z=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)\right]^{\frac{x}{h}}e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}}\varphi(\mu)\,d\beta\,d\mu.$$

Or il est facile de s'assurer que la valeur de z, donnée par la formule (71) ou (72), vérifie l'équation (69), non-seulement, quelle que soit la fonction arbitraire $\varphi(y)$, dans le cas où la variable x devient un multiple de h, mais aussi quelle que soit la valeur attribuée à cette dernière variable. On peut même, pour plus de généralité, substituer à $\varphi(y)$ une fonction $\varpi(x,y)$ des deux variables x, y, qui, étant périodique relativement à la variable x, et propre à vérifier la condition

$$(73)\qquad \Delta_x\varpi(x,y)=0,$$

renfermerait d'une manière quelconque la variable y. Alors, au lieu de la formule (71), on obtient la suivante

$$(74)\qquad z=\left[1+r\left(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1\right)\right]^{\frac{x}{h}}\varpi(x,y).$$

Ajoutons que les valeurs de z, déterminées par les formules (72) et (74), peuvent l'une et l'autre se déduire de la valeur plus générale

$$(75)\qquad z=S\left\{P[1+r(p-1)]^{\frac{x}{h}}p^{\frac{y}{k}}\right\},$$

dans laquelle le signe S indique une somme composée de termes finis ou infiniment petits, semblables au produit

$$(76)\qquad P[1+r(p-1)]^{\frac{x}{h}}p^{\frac{y}{k}},$$

la lettre p une quantité réelle ou une expression imaginaire qui varie d'un terme à l'autre, et la lettre P une fonction des trois variables p, x, y, qui soit périodique relativement aux deux dernières, c'est-à-dire, propre à vérifier les deux conditions

$$(77)\qquad \Delta_x P=0,\qquad \Delta_y P=0.$$

La valeur de z, donnée par la formule (75), vérifie évidemment l'équation (69), et il est naturel de penser qu'elle offre l'intégrale générale de cette même équation. Mais il serait peut être difficile de le démontrer rigoureusement.

Revenons à la formule (68). Si l'on y pose $\varphi(y)=0$, $x_0=0$ et $nh=x$, elle donnera

$$(78)\quad z=\mathcal{F}(x,y)=f[(n-1)h,y]+(1+r\Delta_y)f[(n-2)h,y]+\ldots+(1+r\Delta_y)^{n-1}f(0,y),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(79)\quad z=f[(n-1)h,y]+[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]f[(n-2)h,y]+\ldots+[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{n-1}f(0,y)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f[(n-1)h,\mu]+\ldots+[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{n-1}f(0,\mu)\right\}e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}}\frac{d\beta\, d\mu}{2\pi}.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par la notation $\overset{x}{\underset{0}{\Sigma}}f(x)$ l'intégrale aux différences finies de $f(x)$, prise à partir de $x=0$, on trouvera

$$(80)\quad f[(n-1)h,\mu]+[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]f[(n-2)h,\mu]+\ldots+[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{n-1}f(0,\mu)$$

$$=[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{n-1}\left\{f(0,\mu)+\frac{f(h,\mu)}{1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)}+\ldots+\frac{f[(n-1)h,\mu]}{[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{n-1}}\right\}$$

$$=[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{\frac{x}{h}-1}\sum_{0}^{x}[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{-\frac{x}{h}}f(x,\mu).$$

En conséquence, la formule (79) pourra être réduite à

$$(81)\quad z=[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{\frac{x}{h}-1}\sum_{0}^{x}[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{-\frac{x}{h}}f(x,y)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{\frac{x}{h}-1}\sum_{0}^{x}[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{-\frac{x}{h}}f(x,\mu).e^{\beta(y-\mu)\sqrt{-1}}d\beta\,d\mu:$$

Or il est facile de s'assurer que la valeur précédente de z vérifie l'équation (4), non-seulement dans le cas où la variable x est un multiple de h, mais encore, quel que soit x. Si l'on désigne par u cette même valeur de z, et par $u+v$ l'intégrale générale de l'équation (4), on aura tout à la fois

$$(82)\quad \begin{cases} \Delta_x u - r\Delta_y u = f(x,y), \\ \Delta_x(u+v) - r\Delta_y(u+v) = f(x,y), \end{cases}$$

et par suite

$$(83)\quad \Delta_x v - r\Delta_y v = 0.$$

Donc, pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (4), il suffira d'ajouter au second membre de la formule (81) la valeur la plus générale de v propre à vérifier la formule (83), c'est-à-dire, l'intégrale générale de l'équation (69).

Il est bon d'observer que, si à la valeur de z, fournie par l'équation (81), on ajoute le second membre de la formule (74), la somme sera une nouvelle valeur de z, propre à vérifier l'équation (4), et pourra s'écrire comme il suit

$$(84)\quad z=[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{\frac{x}{h}-1}\left\{\Sigma[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{-\frac{x}{h}}f(x,y)+\varpi(x,y)\right\},$$

l'intégrale indiquée par le signe Σ étant indéfinie, et $\varpi(x,y)$ étant une fonction

arbitraire, distincte de celle que comprend la formule (74), mais toujours assujettie à la condition (73). Ajoutons que la fonction arbitraire et périodique $\varpi(x,y)$ peut être censée comprise dans l'intégrale indéfinie, ce qui permet de réduire l'équation (84) à la forme

$$(85)\qquad z=[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{\frac{x}{k}-1}\Sigma[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{-\frac{x}{k}}f(x,y).$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$f(x,y)=e^{by}\mathrm{F}(x),$$

on peut satisfaire à l'équation (4) par une valeur de z de la forme

$$z=e^{by}\varphi(x),$$

pourvu que l'on suppose

$$\Delta_x\varphi(x)-r(e^{kb}-1).\varphi(x)=\mathrm{F}(x),$$

ou, ce qui revient au même

$$\varphi(x)=[1+r(e^{kb}-1)]^{\frac{x}{k}-1}\Sigma[1+r(e^{kb}-1)]^{-\frac{x}{k}}\mathrm{F}(x).$$

Par conséquent on vérifie l'équation

$$(86)\qquad \Delta_x z-r\Delta_y z=e^{by}\mathrm{F}(x)$$

en prenant

$$(87)\qquad z=e^{by}[1+r(e^{kb}-1)]^{\frac{x}{k}-1}\Sigma[1+r(e^{kb}-1)]^{-\frac{x}{k}}\mathrm{F}(x).$$

Or cette dernière valeur de z est effectivement l'une de celles que l'on déduit de l'équation (85) en y posant

$$f(x,y)=e^{by}\mathrm{F}(x).$$

Afin de montrer une application des principes que nous venons d'établir, concevons qu'il s'agisse de trouver l'intégrale de l'équation

$$(88)\qquad \Delta_x z-r\Delta_y z=e^{ax+by}$$

pour une valeur de x multiple de h, et en supposant nulle la valeur de z qui correspond à $x=0$. Dans ce cas, on tirera de l'équation (81)

$$(89)\qquad z=[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{\frac{x}{k}-1}\sum_0^x[1+r(e^{k\beta\sqrt{-1}}-1)]^{-\frac{x}{k}}e^{ax}e^{by}$$

$$=[1+r(e^{kb}-1)]^{\frac{x}{k}-1}\sum_0^x[1+r(e^{kb}-1)]^{-\frac{x}{k}}e^{ax}e^{by};$$

et comme on a d'ailleurs

(90) $$\sum_0^x e^{ax} = \frac{e^{ax}-1}{e^{ah}-1},$$

$$\sum_0^x [1+r(e^{kb}-1)]^{-\frac{x}{h}} e^{ax} = \frac{[1+r(e^{kb}-1)]^{-\frac{x}{h}} e^{ax}-1}{[1+r(e^{kb}-1)]^{-1} e^{ah}-1};$$

on trouvera définitivement

(91) $$z = \frac{e^{ax}-[1+r(e^{kb}-1)]^{\frac{x}{h}}}{e^{ah}-[1+r(e^{kb}-1)]}\, e^{ky}.$$

Il est, au reste, facile de s'assurer, 1.° que la valeur précédente de z vérifie l'équation (88), lors même que x cesse d'être un multiple de h, 2.° qu'elle s'évanouit avec x.

Il est important de remarquer qu'en vertu des principes établis à la page 2 du premier volume, les notations

(92) $$(1+r)^{\frac{x}{h}}, \quad (1+r)^{-\frac{x}{h}}, \quad [1+r(e^{kb}-1)]^{\frac{x}{h}}, \quad \text{etc...},$$

et autres semblables, comprises dans les formules de cet article et de l'article précédent, doivent être abandonnées, lorsque, la variable x cessant d'être un multiple de h, les quantités

(93) $$1+r, \quad 1+r(e^{kb}-1), \quad \text{etc...},$$

deviennent négatives. Mais, pour étendre aux cas de cette espèce les formules que nous avons obtenues, il suffira d'y remplacer les expressions (92) par les produits

(94) $$(-1-r)^{\frac{x}{h}} e^{\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}, \quad (-1-r)^{-\frac{x}{h}} e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}, \quad [-1-r(e^{kb}-1)]^{\frac{x}{h}} e^{\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}$$

toutes les fois que les quantités $1+r$, $1+r(e^{kb}-1)$, etc..., deviendront inférieures à zéro. Ainsi, par exemple, si dans l'équation (2) on prend $r=-2$, comme on en conclura

$$1+r=-1, \quad (-1-r)^{\frac{x}{h}} = 1^{\frac{x}{h}} = 1,$$

on devra, dans la formule (24) qui représente l'intégrale de cette équation, substituer aux exponentielles

$$(1+r)^{\frac{x}{h}-1}, \qquad (1+r)^{-\frac{x}{h}}$$

les deux expressions imaginaires

$$e^{\pi\left(\frac{x}{h}-1\right)\sqrt{-1}}, \qquad e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}.$$

Donc l'intégrale générale de l'équation

(95) $$\Delta y+2y=f(x)$$

sera

(96) $$y=e^{\pi\left(\frac{x}{h}-1\right)\sqrt{-1}}\Sigma e^{-\pi\frac{x}{h}\sqrt{-1}}f(x).$$

Si l'on suppose en particulier $f(x)=e^{ax}$, l'équation (95) se trouvera réduite à

(97) $$\Delta y+2y=e^{ax},$$

et son intégrale générale deviendra

(98) $$y=e^{\pi\left(\frac{x}{h}-1\right)\sqrt{-1}}\Sigma e^{\left(a-\frac{\pi}{h}\sqrt{-1}\right)x}=-e^{\frac{\pi x}{h}\sqrt{-1}}\Sigma e^{\left(a-\frac{\pi}{h}\sqrt{-1}\right)x}$$

$$=-e^{\frac{\pi x}{h}\sqrt{-1}}\left\{\frac{e^{\left(a-\frac{\pi}{h}\sqrt{-1}\right)x}}{e^{ah-\pi\sqrt{-1}}-1}+\varpi(x)\right\}.$$

Donc, si l'on fait pour abréger

(99) $$-e^{\frac{\pi x}{h}\sqrt{-1}}\varpi(x)=\psi(x),$$

on aura

(100) $$y=\frac{e^{ax}}{e^{ah}+1}+\psi(x).$$

Dans l'équation (100), la fonction $\psi(x)$, déterminée par la formule (99), est une fonction périodique quelconque assujettie à changer de signe, en conservant, au signe près, la même valeur, quand on fait croître la variable x de la quantité h. Il est facile de s'assurer que, sous cette condition, la valeur précédente de y, vérifie effectivement l'équation (97).



SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS

QUI REPRÉSENTENT

LES INTÉGRALES GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

Nous avons fait voir précédemment [pages 25 et suiv.] comment on pouvait intégrer des équations différentielles linéaires à coefficients constants et quelquefois même à coefficients variables, lorsque l'inconnue et ses dérivées successives, d'un ordre inférieur à celui de l'équation, étaient assujetties à prendre des valeurs données pour une certaine valeur de la variable indépendante. Ainsi, par exemple, considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x),$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(2) \qquad F(D) y = f(x),$$

en faisant pour abréger

$$(3) \qquad F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n,$$

Si l'on veut que l'inconnue y et ses dérivées d'un ordre inférieur à n, savoir

$$(4) \qquad y, \quad y', \quad y'', \ldots y^{(n-1)},$$

se réduisent, pour une valeur particulière de x, aux quantités $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{n-1}$, en sorte qu'on ait, pour $x = x_0$,

$$(5) \qquad y = \eta_0, \quad y' = \eta_1, \ldots y^{(n-1)} = \eta_{n-1},$$

il suffira de poser [voyez la page 31]

$$(6) \qquad y = \mathcal{E} \left\{ \frac{F(r) - F(\eta)}{r - \eta} e^{r(x - x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{r(x-z)} f(z)\, dz \right\} \frac{1}{((F(r)))},$$

pourvu que, dans le développement du rapport

(7) $$\frac{F(r)-F(n)}{r-n}$$

suivant les puissances entières de n, on transforme en indices les exposants de ces puissances. De même, étant donnée l'équation

(8) $$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a_1}{Ax+B} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(Ax+B)^{n-1}} \frac{dy}{dx} + \frac{a_n}{(Ax+B)^n} y = f(x),$$

si l'on fait pour abréger

(9) $$F(r) = a_0 A^n r(r-1)\ldots(r-n+1) + a_1 A^{n-1} r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + a_{n-1} Ar + a_n,$$

et si l'on assujettit l'inconnue y à vérifier, pour $x = x_0$, les conditions (5), on aura [voyez la page 36]

(10) $$y = \mathcal{E} \left\{ \frac{F(r)-F(n)}{r-n} \left(\frac{Ax+B}{Az+B}\right)^r + A \int_{x_0}^{x} \left(\frac{Ax+B}{Az+B}\right)^r (Az+B)^{n-1} f(z)\, dz \right\} \frac{1}{((F(r)))},$$

pourvu qu'après avoir développé la fraction (7) en une série de termes proportionnels aux différents produits

(11) $$n^0 = 1, \qquad n, \qquad n(n-1), \ \ldots\ldots \ n(n-1)\ldots(n-n+2),$$

on remplace ces mêmes produits par les quantités

(12) $$n_0, \qquad n_1\left(x_0 + \frac{B}{A}\right), \qquad n_2\left(x_0 + \frac{B}{A}\right)^2, \ \ldots \ n_{n-1}\left(x_0 + \frac{B}{A}\right)^{n-1}.$$

Si l'on suppose, pour plus de simplicité,

$$A = 1, \qquad B = 0,$$

les formules (8), (9) et (10) deviendront respectivement

(13) $$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a_1}{x} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} \frac{dy}{dx} + \frac{a_n}{x^n} y = f(x),$$

(14) $$F(r) = a_0 r(r-1)\ldots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + a_{n-1} r + a_n,$$

$$(15)\qquad y=\mathcal{E}\left\{\frac{F(r)-F(\eta)}{r-\eta}\left(\frac{x}{x_0}\right)^r+\int_{x_0}^{x}\left(\frac{x}{z}\right)^r z^{n-1}f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((F(r)))},$$

et les quantités (12) se réduiront à

$$(16)\qquad \eta_0,\quad \eta_1 x_0,\quad \eta_2 x_0^2,\ \ldots\ldots\ \eta_{n-1}x_0^{n-1}.$$

Observons d'ailleurs qu'on déduira sans peine l'équation (10) de la formule (6), si l'on a préalablement substitué, dans l'équation (8), une nouvelle variable indépendante

$$(17)\qquad t=\mathrm{l}(Ax+B)$$

à la variable x.

Les valeurs de y, fournies par les équations (6), (10) et (15), peuvent être présentées sous différentes formes qu'il est bon de connaître; et d'abord, comme on a identiquement

$$(18)\qquad \frac{F(r)-F(\eta)}{r-\eta}=\int_0^1 F'[r+\lambda(\eta-r)]\,d\lambda,$$

il est clair que la formule (6) pourra être réduite à

$$(19)\qquad y=\mathcal{E}\left\{e^{r(x-x_0)}\int_0^1 F'[r(1-\lambda)+\lambda\eta]\,d\lambda+\int_{x_0}^{x}e^{r(x-z)}f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((F(r)))}.$$

Si, dans cette dernière équation, on développe la fonction $F'[r(1-\lambda)+\lambda\eta]$ suivant les puissances ascendantes de η, et si l'on remplace les exposants de ces puissances par des indices, on trouvera

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} y=\eta_0\,\mathcal{E}\,&\frac{e^{r(x-x_0)}\int_0^1 F'[r(1-\lambda)]\,d\lambda}{((F(r)))}+\eta_1\,\mathcal{E}\frac{e^{r(x-x_0)}\int_0^1 \frac{\lambda}{1}F''[r(1-\lambda)]\,d\lambda}{((F(r)))}+\ldots\\ \ldots+\eta_{n-1}\,\mathcal{E}\,&\frac{e^{r(x-x_0)}\int_0^1 \frac{\lambda^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}[r(1-\lambda)]\,d\lambda}{((F(r)))}+\mathcal{E}\frac{\int_{x_0}^{x}e^{r(x-x_0)}f(z)\,dz}{((F(r)))}.\end{aligned}\right.$$

Concevons maintenant que l'on désigne par $\mathrm{f}(x)$ une fonction entière ou non entière, mais assujettie aux conditions

$$(21)\qquad \mathrm{f}(x_0)=\eta_0,\qquad \mathrm{f}'(x_0)=\eta_1,\ \ldots\ \mathrm{f}^{(n-1)}(x_0)=\eta_{n-1}.$$

On aura évidemment, dans l'équation (6),

$$(22)\qquad \frac{F(r)-F(\eta)}{r-\eta}=\frac{F(r)-F(D)}{r-D}f(\xi)=\int_0^1 F'[r(1-\lambda)+\lambda D]\,d\lambda.f(\xi),$$

la caractéristique D étant relative à la variable ξ, et cette variable devant être réduite à x_0, après que l'on aura effectué les différenciations. On pourra donc remplacer l'équation (6) par l'une des suivantes

$$(23)\quad y=\mathcal{E}\left\{e^{r(x-x_0)}\frac{F(r)-F(D)}{r-D}f(\xi)+\int_{x_0}^{x}e^{r(x-z)}f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((F(r)))}.$$

$$(24)\quad y=\mathcal{E}\left\{e^{r(x-x_0)}\int_0^1 F'[r(1-\lambda)+\lambda D]\,d\lambda.f(\xi)+\int_{x_0}^{x}e^{r(x-z)}f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((F(r)))}.$$

Comme on a d'ailleurs identiquement

$$(25)\qquad f(\xi)=(D-r)[e^{r\xi}\int e^{-r\xi}f(\xi)\,d\xi],$$

quelle que soit l'origine de l'intégrale renfermée dans l'équation (25); on pourra encore à l'équation (6) substituer la formule

$$(26)\quad y=\mathcal{E}\left\{e^{r(x-x_0)}[F(D)-F(r)][e^{r\xi}\int e^{-r\xi}f(\xi)\,d\xi]+\int_{x_0}^{x}e^{r(x-z)}f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((F(r)))}.$$

Dans ces diverses formules, on doit toujours réduire la variable ξ à x_0, après les différenciations indiquées par la lettre D.

Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ s'évanouit, on tire de la formule (23)

$$(27)\qquad y=\mathcal{E}\,\frac{F(r)-F(D)}{r-D}f(\xi)\frac{e^{r(x-x_0)}}{((F(r)))},$$

Lorsque, dans cette dernière, on suppose les racines de l'équation

$$(28)\qquad F(r)=0$$

inégales entre elles, on trouve

$$(29)\qquad y=S(Re^{rx}),$$

le signe S indiquant une somme de termes semblables au produit Re^{rx}, les di-

verses valeurs de r étant les racines de l'équation (28), et le coefficient R étant déterminé par la formule

$$R = \frac{e^{-rx_0}}{F'(r)} \frac{F(r)-F(D)}{r-D} f(\xi), \tag{30}$$

que l'on peut écrire comme il suit

$$R = \frac{e^{-rx_0}}{F'(r)} [F(D) - F(r)][e^{r\xi} \int e^{-r\xi} f(\xi)\, d\xi]. \tag{31}$$

Les équations (30) et (31) ont été données par M. Brisson dans un Mémoire présenté à l'Académie des sciences le 27 août dernier. La méthode par laquelle il les a démontrées est digne de remarque; et comme elle diffère beaucoup de celle qui nous a conduits à la formule (6), je vais l'indiquer en peu de mots.

Soient

$$r_1, \quad r_2, \ldots\ldots r_n$$

les racines supposées inégales de l'équation (28). L'équation (1) ou (2) pourra s'écrire ainsi qu'il suit

$$a_0(D-r_1)(D-r_2)\ldots(D-r_n)y = f(x); \tag{32}$$

et son intégrale générale sera, comme l'on sait, de la forme

$$y = R_1 e^{r_1 x} + R_2 e^{r_2 x} + \ldots + R_n e^{r_n x}. \tag{33}$$

Comme on aura d'ailleurs identiquement

$$(D-r_1)e^{r_1 x} = 0, \qquad (D-r_2)e^{r_2 x} = 0, \qquad (D-r_n)e^{r_n x} = 0,$$

il est clair que les exponentielles

$$e^{r_2 x}, \quad e^{r_3 x}, \ldots\ldots e^{r_n x}$$

disparaîtront toutes dans le développement de la fonction

$$(D-r_2)(D-r_3)\ldots(D-r_n)y,$$

et que l'on trouvera simplement

$$(D-r_2)(D-r_3)\ldots(D-r_n)y = R_1(D-r_2)(D-r_3)\ldots(D-r_n)e^{r_1x},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(34)\quad (D-r_2)(D-r_3)\ldots(D-r_n)y = R_1(r_1-r_2)(r_1-r_3)\ldots(r_1-r_n).e^{r_1x}.$$

De plus, comme on aura, pour $x = x_0$,

$$Dy = D\mathrm{f}(x), \qquad D^2y = D^2\mathrm{f}(x), \ \ldots\ D^{n-1}y = D^{n-1}\mathrm{f}(x),$$

et par suite

$$(D-r_2)(D-r_3)\ldots(D-r_n)y = (D-r_2)(D-r_3)\ldots(D-r_n)\mathrm{f}(x),$$

on tirera évidemment de l'équation (34)

$$(35)\quad (D-r_2)(D-r_3)\ldots(D-r_n)\mathrm{f}(\xi) = R_1(r_1-r_2)(r_1-r_3)\ldots(r_1-r_n)e^{r_1x_0},$$

ξ devant être réduit à x_0 après les différenciations. Si maintenant on a égard aux formules

$$a_0(D-r_2)(D-r_3)\ldots(D-r_n) = \frac{\mathrm{F}(D)}{D-r_1} = \frac{\mathrm{F}(D)-\mathrm{F}(r_1)}{D-r_1},$$

$$a_0(r-r_2)(r-r_3)\ldots(r-r_n) = \frac{\mathrm{F}(r)}{r-r_1} = \frac{\mathrm{F}(r)-\mathrm{F}(r_1)}{r-r_1},$$

dont la seconde donne, pour $r = r_1$,

$$a_0(r_1-r_2)(r_1-r_3)\ldots(r_1-r_n) = \mathrm{F}'(r_1),$$

on conclura de l'équation (35)

$$(36)\qquad R_1 = \frac{e^{-r_1x_0}}{\mathrm{F}'(r_1)}\,\frac{\mathrm{F}(D)-\mathrm{F}(r_1)}{D-r_1}\,\mathrm{f}(\xi).$$

On obtiendra de même les valeurs de R_2, R_3, ... R_n qui seront toutes comprises dans la formule (30) ou (31).

Passons maintenant à la formule (15), et concevons que le développement de l'expression (7) en une série de termes proportionnels aux quantités

$$1, \quad n, \quad n(n-1), \quad n(n-1)(n-2), \quad \text{etc...},$$

produise l'équation

$$\frac{F(r)-F(n)}{r-n} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}n + \mathfrak{R}n(n-1) + \mathfrak{S}n(n-1)(n-2) + \text{etc....}$$

Désignons toujours par $f(x)$ une fonction propre à vérifier les conditions (21), et supposons que cette fonction soit entière, mais d'un degré supérieur ou au moins égal à $n-1$. Le polynome, qui devra être substitué à l'expression (7) dans l'équation (15), pourra être présenté sous la forme

$$(37) \qquad \mathfrak{P}f(x_0) + \mathfrak{Q}x_0 f'(x_0) + \mathfrak{R}x_0^2 f''(x_0) + \text{etc....}$$

D'ailleurs, si l'on désigne par m et l deux nombres entiers inégaux, on trouvera, en supposant $s=0$ et $\Delta s = 1$,

$$(38) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^m[s(s-1)(s-2)\ldots(s-l+1)] = 0, \\ \Delta^m[s(s-1)(s-2)\ldots(s-m+1)] = 1.2.3\ldots m. \end{array} \right.$$

On aura donc par suite

$$(39) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}f(x_0) + \mathfrak{Q}x_0 f'(x_0) + \mathfrak{R}x_0^2 f''(x_0) + \text{etc...} = \\ \left[f(x_0) + \frac{x_0\Delta}{1} f'(x_0) + \frac{x_0^2\Delta^2}{1.2} f''(x_0) + \ldots\right][\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}s + \mathfrak{R}s(s-1) + \ldots] \\ = f[x_0(1+\Delta)]\,\frac{F(r)-F(s)}{r-s}. \end{array} \right.$$

Il en résulte que, dans la formule (15), l'expression (7) pourra être remplacée par celle que fournit la notation

$$(40) \qquad f[x_0(1+\Delta)]\,\frac{F(r)-F(s)}{r-s},$$

lorsqu'après avoir effectué les opérations indiquées par la caractéristique Δ et relatives

à la variable s, on réduit cette variable à zéro et sa différence finie à l'unité. Donc, en intégrant l'équation (13) de manière que les conditions (5) soient remplies, on trouvera

$$(41)\qquad y=\mathcal{E}\left\{\left(\frac{x}{x_0}\right)^r \mathrm{f}[x_0(1+\Delta)]\,\frac{F(r)-F(s)}{r-s}+\int_{x_0}^{x}\left(\frac{x}{z}\right)^r z^{n-1}f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((F(r)))}.$$

En opérant de la même manière, on tirerait de la formule (10)

$$(42)\qquad y=$$

$$\mathcal{E}\,\frac{\left(\frac{Ax+B}{Ax_0+B}\right)^r \mathrm{f}\left[x_0+\left(x_0+\frac{B}{A}\right)\Delta\right]\frac{F(r)-F(s)}{r-s}+A\int_{x_0}^{x}\left(\frac{Ax+B}{Az+B}\right)^r(Az+B)^{n-1}f(z)dz}{((F(r)))}.$$

Afin de montrer une application des formules que nous venons d'établir, supposons que, la lettre n désignant un nombre entier quelconque, on veuille intégrer l'équation différentielle

$$(43)\qquad \frac{d^n y}{dx^n}+\left(\frac{a}{x}\right)^n y=0,$$

de manière que, pour $x=1$, les fonctions

$$y,\qquad y',\qquad y'',\ \ldots\ y^{(n-1)}$$

reçoivent des valeurs respectivement égales à celles de la fonction x^m et de ses dérivées successives, c'est-à-dire, des valeurs représentées par les quantités

$$(44)\qquad 1,\quad m,\quad m(m-1),\ \ldots\ldots\ m(m-1)\ \ldots\ldots\ (m-n-2).$$

Dans ce cas, on trouvera

$$F(r)=r(r-1)\ldots(r-n+1)+a^n,\qquad x_0=1,\qquad \mathrm{f}(x)=x^m,$$

$$\mathrm{f}[x_0(1+\Delta)]\,\frac{F(r)-F(s)}{r-s}=(1+\Delta)^m\,\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)-s(s-1)\ldots(s-n+1)}{r-s}$$

$$=\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)-(s+m)(s+m-1)\ldots(s+m-n+1)}{r-s-m},$$

puis l'on en conclura, en prenant $s = 0$,

$$\mathrm{f}[x_0(1+\Delta)]\frac{\mathrm{F}(r)-\mathrm{F}(s)}{r-s} = \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)-m(m-1)\ldots(m-n+1)}{r-m}.$$

Par conséquent la formule (41) donnera

$$(45)\qquad y = \mathcal{E}\,\frac{\dfrac{r(r-1)\ldots(r-n+1)-m(m-1)\ldots(m-n+1)}{r-m}x^r + x^r\displaystyle\int_1^x z^{n-r-1}f(z)\,dz}{((r(r-1)\ldots(r-n+1)+a^n))}.$$

Si, pour fixer les idées, on pose $a = 1$, $n = 2$, $m = 4$, l'équation (43) se trouvera réduite à

$$(46)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{x^2} = f(x);$$

et cette équation, intégrée de manière que l'on ait, pour $x = 1$,

$$(47)\qquad y = 1, \qquad y' = 4,$$

donnera

$$(48)\quad y = \mathcal{E}\,x^r\,\frac{\dfrac{r(r-1)-4.3}{r-4}+\displaystyle\int_1^x z^{1-r}f(z)\,dz}{((r^2-r+1))} = \mathcal{E}\,x^r\,\frac{r+3+\displaystyle\int_1^x z^{1-r}f(z)\,dz}{((r^2-r+1))},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(49)\quad y = x^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{3^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{l}(x)}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{3}\sin\frac{3^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{l}(x)}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_1^x z^{\frac{1}{2}}\sin\frac{3^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{l}\left(\frac{x}{z}\right)}{2}f(z)\,dz\right\}.$$

Si la fonction entière $\mathrm{f}(x)$, qui vérifie par hypothèse les conditions (21), est du degré $n-1$, elle sera nécessairement déterminée par la formule

$$(50)\qquad \mathrm{f}(x) = n_0 + n_1\frac{x-x_0}{1}+n_2\frac{(x-x_0)^2}{1.2}+\ldots+n_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

De plus, comme on aura

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(0)+\frac{x}{1}\mathrm{f}'(0)+\frac{x^2}{1.2}\mathrm{f}''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\mathrm{f}^{(n-1)}(0),$$

et

$$(1+\Delta)^m \frac{F(r)-F(s)}{r-s} = \frac{F(r)-F(s+m)}{r-s-m},$$

il est clair qu'en supposant, après les opérations indiquées par la caractéristique Δ, $s=0$, on trouvera

(51) $$f_0[x_0(1+\Delta)]\frac{F(r)-F(s)}{r-s} =$$

$$f(0)\frac{F(r)-F(0)}{r} + \frac{x_0}{1}f'(0)\frac{F(r)-F(1)}{r-1} + \ldots + \frac{x_0^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)\frac{F(r)-F(n-1)}{r-n+1}.$$

On tirera d'ailleurs de la formule (50)

(52) $$\left\{\begin{array}{l} f(0) = \eta_0 - \eta_1\frac{x_0}{1} + \eta_2\frac{x_0^2}{1.2} - \ldots \pm \eta_{n-1}\frac{x_0^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}, \\ f'(0) = \eta_1 - \eta_2\frac{x_0}{1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mp \eta_{n-1}\frac{x_0^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}, \\ \text{etc...}, \\ f^{(n-1)}(0) = \eta_{n-1}. \end{array}\right.$$

Les équations (51) et (52) fournissent le moyen de développer facilement le second membre de la formule (41).

Nous remarquerons, en terminant cet article, qu'on pourrait encore transformer les valeurs de y fournies par les équations (25), (24), (26), (41), (42), en se servant d'une notation précédemment adoptée [pages 162 et suiv.]. En effet, si l'on désigne par

$$\varphi(\alpha)f(\varpi)$$

l'intégrale double

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(\varpi-\lambda)\sqrt{-1}}\varphi(\alpha)f(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda,$$

on reconnaîtra, par exemple, que les équations (25), (24) coïncident avec les formules

(53) $$y = \mathcal{E}\left\{e^{r(x-x_0)}\frac{F(r)-F(\alpha\sqrt{-1})}{r-\alpha\sqrt{-1}}f(\xi) + \int_{x_0}^{x} e^{r(x-z)}f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((F(r)))},$$

(54) $$y = \mathcal{E}\frac{e^{r(x-x_0)}\int_0^1 F'[r(1-\lambda)+\lambda\alpha\sqrt{-1}]\,d\lambda.f(\xi) + \int_{x_0}^{x} e^{r(x-z)}f(z)\,dz}{((F(r)))},$$

la caractéristique α étant relative à la variable ξ; et l'équation (41) avec la formule

$$(55)\quad y = \mathcal{E}\left\{\left(\frac{x}{x_0}\right)^r f\left(x_0 e^{\alpha\sqrt{-1}}\right)\frac{F(r)-F(\bar{s})}{r-s} + \int_{x_0}^{x}\left(\frac{x}{z}\right)^r z^{n-1} f(z)\,dz\right\}\frac{1}{((F(r)))}\,,$$

la caractéristique α étant relative à la variable s. Observons en outre que, si l'on nomme $\varphi(x)$ la valeur de y déterminée par la formule (53) ou (54), la fonction $\varphi(x)$ aura la double propriété de vérifier l'équation différentielle, linéaire et de l'ordre n,

$$(56)\qquad F(D)\,\varphi(x) = 0\,,$$

ou, ce qui revient au même, l'équation

$$(57)\qquad F(\alpha\sqrt{-1})\,\varphi(\overline{x}) = 0\,;$$

et de satisfaire aux conditions

$$(58)\qquad \varphi(x_0) = f(x_0);\quad \varphi'(x_0) = f'(x_0),\quad \varphi''(x_0) = f''(x_0),\ \ldots\ \varphi^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0)\,.$$

Lorsque la fonction $F(r)$ cesse d'être entière pour devenir transcendante, il arrive assez souvent que la fonction $y = \varphi(x)$, déterminée par la formule (53) ou (54), satisfait aux conditions (58), quel que soit le nombre n. Alors il semble naturel de penser que les deux fonctions $\varphi(x)$, $f(x)$, dont les valeurs se confondent, ainsi que les valeurs de leurs dérivées successives, quand on pose $x = x_0$, ne diffèrent pas l'une de l'autre, et restent toujours égales du moins entre certaines limites. Toutefois cette égalité n'est point évidente, attendu que des fonctions très-distinctes, par exemple,

$$(59)\qquad e^{-(x-x_0)^2}\qquad \text{et}\qquad e^{-(x-x_0)^2} + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$$

peuvent se réduire, ainsi que leurs dérivées des divers ordres, à des quantités données, pour une certaine valeur x_0 attribuée à la variable x. Nous montrerons dans un autre article les facilités que présente le calcul des résidus, pour l'établissement ou la discussion des formules auxquelles on se trouverait conduit par les considérations que nous venons d'indiquer, et en particulier des formules que M. Brisson a obtenues par ce moyen dans son dernier Mémoire.

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES.

Soient

(1) $$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \text{etc.}...$$

les différents termes d'une série réelle ou imaginaire ; et

(2) $$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question sera ce qu'on appelle la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. D'après ces principes, pour que la série (1) soit convergente, il est nécessaire, et il suffit que les valeurs des sommes

$$s_n, \quad s_{n+1}, \quad s_{n+2}, \ldots$$

correspondantes à de très-grandes valeurs de n, diffèrent très-peu les unes des autres, en d'autres termes, il est nécessaire, et il suffit que la différence

(3) $$s_{n+m} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+m-1}$$

devienne infiniment petite, quand on attribue au nombre n une valeur infiniment grande, quel que soit d'ailleurs le nombre entier représenté par m. Cela posé, soient

(4) $$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \text{etc.}...$$

les modules des différents termes de la série (1), en sorte qu'on ait généralement

(5) $$u_n = r_n(\cos p_n + \sqrt{-1}\sin p_n)$$

p_n désignant un arc réel. Il est clair que, si la série (4) est convergente, les séries réelles

$$(6)\qquad \begin{cases} r_0\cos p_0, & r_1\cos p_1, & r_2\cos p_2, & r_3\cos p_3, & \text{etc...}, \\ r_0\sin p_0, & r_1\sin p_1, & r_2\sin p_2, & r_3\sin p_3, & \text{etc...}, \end{cases}$$

le seront à plus forte raison, d'où l'on est en droit de conclure que la série (1), ou

$$(7)\quad r_0(\cos p_0+\sqrt{-1}\sin p_0),\quad r_1(\cos p_1+\sqrt{-1}\sin p_1),\quad r_2(\cos p_2+\sqrt{-1}\sin p_2),\quad \text{etc.},$$

sera elle-même convergente. Ajoutons 1.° que les séries (4) et (7) seront évidemment divergentes, si le module r_n obtient des valeurs très-considérables pour des valeurs infiniment grandes de l'indice n; 2.° qu'en vertu d'un théorême établi dans l'Analyse algébrique [page 143] la série (4) sera convergente, si la limite vers laquelle convergent, tandis que n croît indéfiniment, les plus grandes valeurs de $(r_n)^{\frac{1}{n}}$, est inférieure à l'unité. Il ne pourra donc y avoir incertitude sur la convergence des séries (4) et (7) que dans le cas où, la quantité r_n décroissant indéfiniment avec $\frac{1}{n}$, la limite des plus grandes valeurs de $(r_n)^{\frac{1}{n}}$ deviendrait précisément égale à l'unité. Or, dans ce même cas, on pourra souvent décider si la série (4) est convergente ou divergente, en recourant à l'une des propositions que nous allons énoncer.

1.er Théorême. *Soit* $f(x)$ *une fonction qui demeure constamment positive pour des valeurs positives de la variable* x; *et admettons* 1.° *que la fonction* $f(x)$ *décroisse indéfiniment avec* $\frac{1}{x}$; 2.° *que le rapport*

$$(8)\qquad \frac{f(x+\theta)}{f(x)}$$

reste, pour des valeurs infiniment grandes de x, *et pour des valeurs de* θ *qui ne surpassent pas l'unité, compris entre deux limites* A, B, *finies, mais différentes de zéro. La série*

$$(9)\qquad f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad \text{etc...},$$

sera convergente, si l'intégrale

$$(10)\qquad \int_n^{n+m} f(x)\,dx$$

s'évanouit pour des valeurs infiniment grandes du nombre entier n, *quel que soit d'ailleurs le nombre entier* m; *et divergente dans le cas contraire.*

Démonstration. Désignons par s_n la somme des n premiers termes de la série (9), en sorte qu'on ait

$$(11)\qquad s_n = f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1).$$

Pour savoir si cette série est convergente ou divergente, il suffira d'examiner si la somme

$$(12)\qquad s_{n+m} - s_n = f(n) + f(n+1) + \ldots + f(n+m-1)$$

s'évanouit ou non, quand on attribue à n des valeurs infinies, quel que soit d'ailleurs le nombre entier m. D'ailleurs on aura évidemment

$$(13)\qquad \int_n^{n+m} f(x)\,dx = \int_n^{n+1} f(x)\,dx + \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{n+m-1}^{n+m} f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 [f(x+n) + f(x+n+1) + \ldots + f(x+n+m-1)]\,dx$$

d'où l'on conclura, en représentant par θ un nombre compris entre les limites $0, 1$,

$$(14)\qquad \int_n^{n+m} f(x)\,dx = f(n+\theta) + f(n+1+\theta) + \ldots + f(n+m-1+\theta)$$

Or, en vertu de l'hypothèse admise, les rapports

$$(15)\qquad \frac{f(n+\theta)}{f(n)}, \quad \frac{f(n+1+\theta)}{f(n+1)}, \ldots \frac{f(n+m-1+\theta)}{f(n+m-1)},$$

étant tous compris, pour de très-grandes valeurs de n, entre les limites A et B, on pourra en dire autant de la fraction

$$(16)\qquad \frac{f(n+\theta)+f(n+1+\theta)+\ldots+f(n+m-1+\theta)}{f(n)+f(n+1)+\ldots+f(n+m-1)} = \frac{\int_n^{n+m} f(x)\,dx}{s_{n+m}-s_n}.$$

Donc la différence

$$s_{n+m} - s_n$$

sera renfermée, pour de très-grandes valeurs de n, entre les deux produits

$$(17)\qquad \frac{1}{A}\int_n^{n+m} f(x)\,dx, \qquad (18)\qquad \frac{1}{B}\int_n^{n+m} f(x)\,dx.$$

Donc, si l'intégrale (10) s'évanouit, quand on attribue à n des valeurs infinies, quel que soit d'ailleurs le nombre entier m, on pourra en dire autant de la quantité $s_{n+m} - s_n$, et la série (9) sera convergente. Mais si l'intégrale (10) diffère sensiblement de zéro, pour des valeurs très-considérables de n, et pour des valeurs finies ou infinies de m, alors la quantité $s_{n+m} - s_n$ ne sera pas nécessairement nulle pour $n = \infty$, et la série (9) sera divergente. Dans ce dernier cas, la somme s_n cessera de converger, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite finie s. Cette somme deviendra donc infinie en même temps que le nombre n. Par la même raison, la somme s_{n+m} et la différence $s_{n+m} - s_n$ deviendront infinies avec le nombre m, si, après avoir attribué à n une valeur très-considérable, mais déterminée, on fait croître le nombre m au-delà de toute limite.

Corollaire. Lorsque le rapport

$$\frac{f(x+\theta)}{f(x)}$$

demeure constamment renfermé entre les deux quantités

$$(19) \qquad 1, \quad \frac{f(x+1)}{f(x)},$$

et que la seconde de ces deux quantités croît sans cesse pour des valeurs très-considérables et croissantes de la variable x; on peut évidemment supposer

$$A = \frac{f(n+1)}{f(n)}, \qquad B = 1;$$

et par suite la somme

$$s_{n+m} - s_n$$

se trouve, pour des valeurs considérables de n, comprise entre les deux limites

$$(20) \quad \frac{f(n)}{f(n+1)} \int_n^{n+m} f(x)\,dx, \qquad (21) \quad \int_n^{n+m} f(x)\,dx.$$

Exemple. Supposons, pour fixer les idées,

$$(22) \qquad f(x) = \frac{1}{(1+x)^{\mu}},$$

μ désignant une quantité positive. La série (9) deviendra

(23) $$1, \quad \frac{1}{2^\mu}, \quad \frac{1}{3^\mu}, \quad \frac{1}{4^\mu}, \quad \text{etc...};$$

et l'intégrale

(24) $$\int_n^{n+m} f(x)\,dx = \int_n^{n+m} (1+x)^{-\mu}\,dx = \frac{(n+m+1)^{1-\mu}-(n+1)^{1-\mu}}{1-\mu},$$

s'évanouira ou ne s'évanouira pas, pour des valeurs infinies de n, suivant que le nombre μ sera supérieur ou inférieur à l'unité. Donc la série (23) sera convergente si l'on a $\mu > 1$, et divergente si l'on a $\mu < 1$. Dans l'un et l'autre cas, la différence

(25) $$s_{n+m} - s_n = \frac{1}{(n+1)^\mu} + \frac{1}{(n+2)^\mu} + \dots + \frac{1}{(n+m)^\mu}$$

sera le produit de l'intégrale (24) pour un facteur compris entre les limites

(26) $$1, \quad \frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{(n+1)^\mu}{(n+2)^\mu} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-\mu}.$$

Dans le cas particulier où le nombre μ se réduit à l'unité, la série (23) devient

(27) $$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \text{etc...},$$

et l'intégrale (24) doit être remplacée par la suivante

(28) $$\int_n^{n+m} \frac{dx}{1+x} = \mathrm{l}(n+m+1) - \mathrm{l}(n+1) = \mathrm{l}\left(1+\frac{m}{n+1}\right);$$

Or l'expression

$$\mathrm{l}\left(1+\frac{m}{n+1}\right),$$

qui devient sensiblement nulle avec $\frac{1}{n}$, quand on attribue au nombre m une valeur finie, cesse de s'évanouir, quand m devient comparable à n, par exemple, quand on suppose $m=n$, $m=2n$, ... Donc la série (27) est divergente. Ajoutons que, pour cette même série, la différence

(29) $$s_{n+m} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m}$$

sera le produit de l'intégrale

$$\int_{n}^{n+m} \frac{dx}{1+x} = l\left(1 + \frac{m}{n+1}\right), \tag{30}$$

par un facteur compris entre les limites

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}, \tag{31}$$

2.e Théorème. *Soit* $f(x)$ *une fonction qui demeure constamment positive pour des valeurs positives de la variable* x, *et qui, pour de très-grandes valeurs de cette variable, décroisse sans cesse avec* $\frac{1}{x}$. *La série* (9) *sera convergente si l'intégrale* (10) *s'évanouit, pour des valeurs infinies de* n, *quel que soit* m; *et divergente dans le cas contraire.*

Démonstration. Dans l'hypothèse admise, l'intégrale (10), qui forme le premier membre de l'équation (14), sera pour de très-grandes valeurs de n, inférieure au polynome

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(n+m-1) = s_{n+m} - s_n,$$

et supérieure à

$$f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(n+m) = s_{n+m+1} - s_{n+1},$$

En d'autres termes, l'intégrale

$$\int_{n}^{n+m} f(x)\,dx, \tag{10}$$

sera, pour de très-grandes valeurs de n, comprise entre les deux différences

$$s_{n+m} - s_n, \quad s_{n+m+1} - s_{n+1}; \tag{32}$$

et, comme cette proposition restera vraie, tandis que n et m varieront, l'on doit en conclure que la différence

$$s_{n+m} - s_n$$

sera comprise entre les deux intégrales

$$\int_{n-1}^{n+m-1} f(x)\,dx, \quad \int_{n}^{n+m} f(x)\,dx, \tag{33}$$

c'est-à-dire, inférieure à la première, et supérieure à la seconde. Cela posé, concevons d'abord que l'intégrale (10) s'évanouisse pour $n=\infty$, quel que soit m. La première des intégrales (33), et par suite la différence $s_{n+m}-s_n$, s'évanouiront pareillement. Donc alors la série (9) sera convergente. Au contraire, si l'intégrale (10) diffère sensiblement de zéro, pour des valeurs très-considérables de n, et pour des valeurs finies ou infinies de m, la différence $s_{n+m}-s_n$ ne sera pas nécessairement nulle pour $n=\infty$, et la série (9) sera divergente.

Exemples. Si l'on applique le théorème qui précède à la fonction $\frac{1}{(1+x)^\mu}$, on s'assurera de nouveau que la série (22) est convergente pour $\mu>1$, et divergente pour $\mu=$ ou <1. De plus, on reconnaîtra que la différence

(25) $$s_{n+m}-s_n=\frac{1}{(n+1)^\mu}+\frac{1}{(n+2)^\mu}+\dots+\frac{1}{(n+m)^\mu}$$

est comprise entre les deux limites

(34) $$\frac{(n+m)^{1-\mu}-n^{1-\mu}}{1-\mu},\qquad \frac{(n+m+1)^{1-\mu}-(n+1)^{1-\mu}}{1-\mu},$$

et la différence

(29) $$s_{n+m}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+m}$$

entre les limites

(35) $$\mathrm{l}\left(1+\frac{m}{n}\right),\qquad \mathrm{l}\left(1+\frac{m}{n+1}\right).$$

Supposons encore

(36) $$f(x)=\frac{\mathrm{l}(1+x)}{1+x}.$$

La série (9) deviendra

(37) $$0,\quad \frac{\mathrm{l}(2)}{2},\quad \frac{\mathrm{l}(3)}{3},\quad \frac{\mathrm{l}(4)}{4},\quad \text{etc.}\dots;$$

et, comme l'intégrale

(38) $$\int_n^{n+m}\frac{\mathrm{l}(1+x)}{1+x}\,dx=\frac{1}{2}[\mathrm{l}(n+m+1)]^2-\frac{1}{2}[\mathrm{l}(n+1)]^2$$
$$=\frac{1}{2}[\mathrm{l}(n+m+1)+\mathrm{l}(n+1)].\mathrm{l}\left(1+\frac{m}{n+1}\right)$$

conservera une valeur finie pour une valeur infinie de n, si l'on prend $m=n$, ou $m=2n$, etc..., on peut affirmer que la série (37) sera divergente. De plus, la somme

$$s_{n+m}-s_n=\frac{1(n+1)}{n+1}+\frac{1(n+2)}{n+2}+\ldots+\frac{1(n+m)}{n+m} \tag{39}$$

sera comprise entre les deux limites

$$\frac{1(n+m)+1(n)}{2}\,1\left(1+\frac{m}{n}\right),\qquad \frac{1(n+m+1)+1(n+1)}{2}\,1\left(1+\frac{m}{n+1}\right), \tag{40}$$

c'est-à-dire, inférieure à la première et supérieure à la seconde.

Les théorêmes 1 et 2 continueraient évidemment de subsister si, dans la série (9), quelques-uns des premiers termes étaient réduits à zéro, ou remplacés par de nouvelles quantités. Concevons, par exemple, que l'on considère la série

$$0,\quad \frac{1}{2\,1(2)},\quad \frac{1}{3\,1(3)},\quad \frac{1}{4\,1(4)},\quad \text{etc...}, \tag{41}$$

à laquelle se réduit la série (9), lorsqu'après avoir supposé

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)\,1(1+x)}, \tag{42}$$

on remplace le premier terme $f(0)=\frac{1}{0}=\infty$, par zéro. Comme l'intégrale

$$\int_n^{n+m}\frac{dx}{(1+x)\,1(1+x)}=1\left\{\frac{1(n+m+1)}{1(n+1)}\right\} \tag{43}$$

conservera l'une des valeurs finies

$$1(2),\quad 1(3),\quad 1(4),\quad \text{etc...},$$

lorsqu'en attribuant au nombre n des valeurs très-considérables, on déterminera le nombre m par l'une des équations

$$m=n(n+1),\quad m=n(n+1)^2,\quad m=n(n+1)^3,\quad \text{etc...},$$

on pourra conclure du théorême 1 ou 2 que la série (41) est divergente. De plus on reconnaîtra que la somme

$$(44)\qquad s_{n+m}-s_n=\frac{1}{(n+1)\,\mathrm{l}(n+1)}+\frac{1}{(n+2)\,\mathrm{l}(n+2)}+\dots+\frac{1}{(n+m)\,\mathrm{l}(n+m)}$$

est renfermée entre les deux limites

$$(45)\qquad \mathrm{l}\left\{\frac{\mathrm{l}(n+m)}{\mathrm{l}(n)}\right\},\qquad \mathrm{l}\left\{\frac{\mathrm{l}(n+m+1)}{\mathrm{l}(n+1)}\right\},$$

c'est-à-dire supérieure à la première et inférieure à la seconde.

Considérons enfin la série

$$(46)\qquad 0,\quad \frac{1}{2[\mathrm{l}(2)]^{\mu}},\quad \frac{1}{3[\mathrm{l}(3)]^{\mu}},\quad \frac{1}{4[\mathrm{l}(4)]^{\mu}},\quad \text{etc.}\ldots,$$

dans laquelle μ désigne une quantité réelle : on reconnaîtra sans peine, à l'aide du 2.e théorême, 1.° que cette série est convergente ou divergente ; suivant que l'on suppose $\mu>1$, ou $\mu<1$; 2.° que, pour cette même série, la différence

$$s_{n+m}-s_n$$

est comprise entre les deux limites

$$(47)\qquad \frac{[\mathrm{l}(n+m)]^{1-\mu}-[\mathrm{l}(n)]^{1-\mu}}{1-\mu},\qquad \frac{[\mathrm{l}(n+m+1)]^{1-\mu}-[\mathrm{l}(n+1)]^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Il est facile de s'assurer que la différence

$$s_{n+m}-s_m$$

croît indéfiniment avec m, suivant la remarque générale précédemment faite, quand on remplace la série (9) par la série (23), en supposant $\mu<1$, ou par l'une des séries (27), (37), (41). En effet, d'après les calculs que l'on vient d'effectuer, les valeurs de cette différence correspondantes aux quatre séries dont il s'agit, sont respectivement supérieures aux quatre expressions

$$\frac{(n+m+1)^{1-\mu}-(n+1)^{1-\mu}}{1-\mu},\ \mathrm{l}\left(1+\frac{m}{n+1}\right),\ \frac{\mathrm{l}(n+m+1)+\mathrm{l}(n+1)}{2}\,\mathrm{l}\left(1+\frac{m}{n+1}\right),\ \mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{l}(n+m+1)}{\mathrm{l}(n+1)}\right).$$

Or, si, dans ces expressions, on attribue au nombre n une valeur très-considérable,

Exemples. Si l'on applique le 3.e théorême aux deux séries

$$(53) \qquad 0, \quad \frac{l(2)}{2^{\mu}}, \quad \frac{l(3)}{3^{\mu}}, \quad \frac{l(4)}{4^{\mu}}, \quad \text{etc...},$$

$$(54) \qquad 0, \quad \frac{1}{2^{\mu}l(2)}, \quad \frac{1}{3^{\mu}l(3)}, \quad \frac{1}{4^{\mu}l(4)}, \quad \text{etc...},$$

on reconnaîtra que ces deux séries sont l'une et l'autre convergentes, lorsqu'on a $\mu > 1$, l'une et l'autre divergentes, lorsqu'on a $\mu < 1$.

SUR LA VALEUR DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx,$$

a, b, c DÉSIGNANT DES CONSTANTES RÉELLES OU IMAGINAIRES.

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz = 2\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\,dz,$$

que l'on réduit, en posant $z = x^{\frac{1}{2}}$, à la forme

(1) $$\int_{0}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

est équivalente, comme l'on sait, à la racine carrée du nombre π, en sorte qu'on a

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on prend maintenant

(3) $$z = a^{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{b}{2a}\right),$$

a, b désignant deux constantes réelles dont la première soit positive, on tirera de l'équation (2)

(4) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}\right)}\,dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}};$$

et par suite

(5) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-c+\frac{b^2}{4a}}.$$

$$(17)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x \pm \frac{\lambda+\mu\sqrt{-1}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si, dans l'équation (17), on remplace le rapport constant

$$\pm \frac{\lambda+\mu\sqrt{-1}}{a^{\frac{1}{2}}}$$

par la lettre b, on reproduira la formule (4); puis, en multipliant les deux membres par l'exponentielle

$$e^{-c+\frac{b^2}{4a}},$$

on retrouvera l'équation

$$(5)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-c+\frac{b^2}{4a}},$$

dans laquelle a, b, c pourront être des constantes imaginaires, dont la première seulement devra offrir une partie réelle positive.

Si la partie réelle de la constante a devenait négative, l'intégrale comprise dans le premier membre de l'équation (5) aurait généralement une valeur infinie ou indéterminée.

Si, dans l'équation (4), on pose, pour plus de commodité,

$$(18)\qquad a = \rho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau), \qquad b = 2\rho_1(\cos\tau_1 + \sqrt{-1}\sin\tau_1), \qquad c = \rho_2(\cos\tau_2 + \sqrt{-1}\sin\tau_2),$$

ρ, ρ_1, ρ_2 désignant les modules des constantes a, b, c, et τ un arc renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, on en tirera

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\rho x^2\cos\tau + 2\rho_1 x\cos\tau_1 + \rho_2\cos\tau_2)} e^{-(\rho x^2\sin\tau + 2\rho_1 x\sin\tau_1 + \rho_2\sin\tau_2)\sqrt{-1}} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\rho_2\cos\tau_2 + \frac{\rho_1^2\cos(2\tau_1-\tau)}{\rho}} e^{\left(-\rho_2\sin\tau_2 + \frac{\rho_1^2\sin(2\tau_1-\tau)}{\rho} - \frac{\tau}{2}\right)\sqrt{-1}}, \end{aligned}\right.$$

et par suite

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\rho x^2 \cos\tau + 2\rho_1 x \cos\tau_1 + \rho_2 \cos\tau_2)} \cos(\rho x^2 \sin\tau + 2\rho_1 x \sin\tau_1 + \rho_2 \sin\tau_2)\, dx \\ &= \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho_1^2 \cos(\tau - 2\tau_1)}{\rho} - \rho_2 \cos\tau_2} \cos\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\rho_1^2 \sin(\tau - 2\tau_1)}{\rho} + \rho_2 \sin\tau_2\right), \end{aligned} \right.$$

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\rho x^2 \cos\tau + 2\rho_1 x \cos\tau_1 + \rho_2 \cos\tau)} \sin(\rho x^2 \sin\tau + 2\rho_1 x \sin\tau_1 + \rho_2 \sin\tau_2)\, dx \\ &= \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho_1^2 \cos(\tau - 2\tau_1)}{\rho} - \rho_2 \cos\tau_2} \sin\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\rho_1^2 \sin(\tau - 2\tau_1)}{\rho} + \rho_2 \sin\tau_2\right). \end{aligned} \right.$$

Si l'on posait au contraire

$$(22)\qquad a = A + D\sqrt{-1}, \qquad b = B + E\sqrt{-1}, \qquad c = C + F\sqrt{-1},$$

A désignant une quantité positive, et B, C, D, E, F des quantités positives ou négatives; on trouverait

$$(23)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(Ax^2+Bx+C)} e^{-(Dx^2+Ex+F)\sqrt{-1}} dx =$$

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(A^2+D^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-C + \frac{A(B^2-E^2)+2BED}{4(A^2+D^2)}} e^{-\left\{F + \frac{(B^2-E^2)D-2ABE}{4(A^2+D^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{D}{A}\right\}\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$(24)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(Ax^2+Bx+C)} \cos(Dx^2 + Ex + F).\, dx =$$

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(A^2+D^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-C + \frac{A(B^2-E^2)+2BED}{4(A^2+D^2)}} \cos\left\{F + \frac{(B^2-E^2)D-2ABE}{4(A^2+D^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{D}{A}\right\},$$

$$(25)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(Ax^2+Bx+C)} \sin(Dx^2 + Ex + F).\, dx =$$

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(A^2+D^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-C + \frac{A(B^2-E^2)+2BED}{4(A^2+D^2)}} \sin\left\{F + \frac{(B^2-E^2)D-2ABE}{4(A^2+D^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{D}{A}\right\}.$$

Les équations (20), (21), (24) et (25) comprennent, comme cas particuliers, les formules connues

$$(26)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho x^2 \cos\tau} \cos(\rho x^2 \sin\tau)\,.\,dx = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\tau}{2}\,, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho x^2 \cos\tau} \sin(\rho x^2 \sin\tau)\,.\,dx = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\tau}{2}\,; \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos sx\,.\,dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{s^2}{4a}}\,, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \sin sx\,.\,dx = 0\,, \end{cases}$$

dont les dernières subsistent pour des valeurs quelconques des constantes a et s, pourvu que la partie réelle de la constante a reste positive.

Lorsque, dans la formule (5), on prend successivement

$$b = 2s, \qquad b = -2s\sqrt{-1},$$

et que l'on suppose en outre $a = 1$, $c = 0$, on en conclut

$$(28)\quad e^{s^2} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{2sx} dx,$$

et

$$(29)\quad e^{-s^2} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{2sx\sqrt{-1}} dx.$$

Les deux équations précédentes subsistent, non-seulement pour des valeurs réelles, mais encore pour des valeurs imaginaires de la constante s, et peuvent être employées utilement dans la solution de plusieurs problèmes.

Lorsqu'on pose, dans la première des formules (27), $a = \frac{\theta}{2}$, et que l'on réduit chaque membre à la moitié de sa valeur, on en conclut

$$(30)\quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta x^2} \cos sx\, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{s^2}{\theta}}}{\theta^{\frac{1}{2}}}\,;$$

θ pouvant être une quantité positive, ou une expression imaginaire dont la partie réelle soit positive. De plus, comme, en vertu de la formule (30),

$$e^{-\frac{1}{2}\theta x^2} \quad \text{et} \quad \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\theta}}}{\theta^{\frac{1}{2}}}$$

sont évidemment deux fonctions réciproques de première espèce, on tirera de l'équation (71) de la page (153)

$$(31) \qquad \alpha^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}+e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha^2}+e^{-\frac{4}{2}\theta\alpha^2}+\ldots\right\}=\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}+e^{-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\theta}}+e^{-\frac{4}{2}\frac{\beta^2}{\theta}}+\ldots\right\},$$

α, β désignant deux nombres choisis de manière que l'on ait

$$(32) \qquad \alpha\beta = 2\pi.$$

En d'autres termes, on aura

$$(33) \qquad a^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}+e^{-\theta a^2}+e^{-4\theta a^2}+e^{-9\theta a^2}+\ldots\right\}=\left(\frac{b}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}+e^{-\frac{b^2}{\theta}}+e^{-4\frac{b^2}{\theta}}+e^{-9\frac{b^2}{\theta}}+\ldots\right\},$$

a, b désignant deux nombres assujettis à la condition

$$(34) \qquad ab = \pi.$$

Si, dans l'équation (33), on réduit la constante θ à l'unité, on retrouvera la formule

$$(35) \qquad a^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+e^{-9a^2}+\ldots\right\}=b^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+e^{-9b^2}+\ldots\right\}$$

déjà obtenue précédemment [page 156]. Si l'on fait, au contraire,

$$(36) \qquad \theta = \cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau,$$

τ désignant un arc réel, compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$; l'équation (33) pourra être réduite à

$$(37)\quad \begin{cases} a^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\tau}{4}+\sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{4}\right)\left[\frac{1}{2}+e^{-a^2(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)}+e^{-4a^2(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)}+\ldots\right]= \\ b^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\tau}{4}-\sqrt{-1}\sin\frac{\tau}{4}\right)\left[\frac{1}{2}+e^{-b^2(\cos\tau-\sqrt{-1}\sin\tau)}+e^{-4b^2(\cos\tau-\sqrt{-1}\sin\tau)}+\ldots\right], \end{cases}$$

et l'on en conclura

$$(38)\quad \begin{cases} a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{\tau}{4}+e^{-a^2\cos\tau}\cos\left(\frac{\tau}{4}-a^2\sin\tau\right)+e^{-4a^2\cos\tau}\cos\left(\frac{\tau}{4}-4a^2\sin\tau\right)+\ldots\right]= \\ b^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{\tau}{4}+e^{-b^2\cos\tau}\cos\left(\frac{\tau}{4}-b^2\sin\tau\right)+e^{-4b^2\cos\tau}\cos\left(\frac{\tau}{4}-4b^2\sin\tau\right)+\ldots\right], \end{cases}$$

$$(39)\quad \begin{cases} a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\tau}{4}+e^{-a^2\cos\tau}\sin\left(\frac{\tau}{4}-a^2\sin\tau\right)+e^{-4a^2\cos\tau}\sin\left(\frac{\tau}{4}-4a^2\sin\tau\right)+\ldots\right]= \\ -b^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\tau}{4}+e^{-b^2\cos\tau}\sin\left(\frac{\tau}{4}-b^2\sin\tau\right)+e^{-4b^2\cos\tau}\sin\left(\frac{\tau}{4}-4b^2\sin\tau\right)+\ldots\right]. \end{cases}$$

Si maintenant on pose

$$a=b=\sqrt{\pi},$$

l'équation (38) deviendra identique, mais l'équation (39) donnera

$$(40)\quad \frac{1}{2}\sin\frac{\tau}{4}+e^{-\pi\cos\tau}\sin\left(\frac{\tau}{4}-\pi\sin\tau\right)+e^{-4\pi\cos\tau}\sin\left(\frac{\tau}{4}-4\pi\sin\tau\right)+\ldots=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(41)\qquad \operatorname{tang}\frac{\tau}{4}=\frac{e^{-\pi\cos\tau}\sin(\pi\sin\tau)+e^{-4\pi\cos\tau}\sin(4\pi\sin\tau)+\text{etc.}\ldots}{\frac{1}{2}+e^{-\pi\cos\tau}\cos(\pi\sin\tau)+e^{-4\pi\cos\tau}\cos(4\pi\sin\tau)+\text{etc.}\ldots}.$$

Prenons, pour fixer les idées, $\tau=\frac{\pi}{6}$. Alors on aura

$$\sin\tau=\frac{1}{2},\qquad \cos\tau=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et l'on tirera de la formule (41)

$$(42)\qquad \operatorname{tang}\frac{\pi}{24} = \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} + e^{-9\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} + e^{-25\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} + \ldots}{\frac{1}{2} + e^{-4\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} + e^{-16\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} + e^{-36\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} + \ldots}.$$

Concevons à présent que l'on pose

$$\operatorname{tang}\frac{\tau}{2} = x.$$

On trouvera

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \cos\frac{\tau}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\sin\tau = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad 1-\cos\tau = \frac{2x^2}{1+x^2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\tau}{4} = \frac{1-\cos\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}} = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{x};$$

puis, en désignant par n un nombre entier quelconque,

$$e^{-n^2\pi\cos\tau}\cos(n^2\pi\sin\tau) = e^{-n^2\pi}\,\frac{e^{n^2\pi(1-\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)} + e^{n^2\pi(1-\cos\tau-\sqrt{-1}\sin\pi)}}{2}$$

$$= e^{-n^2\pi}\,\frac{e^{2n^2\pi x\sqrt{-1}(1+x\sqrt{-1})^{-1}} + e^{-2n^2\pi x\sqrt{-1}(1-x\sqrt{-1})^{-1}}}{2},$$

$$e^{-n^2\pi\cos\tau}\sin(n^2\pi\sin\tau) = e^{-n^2\pi}\,\frac{e^{n^2\pi(1-\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)} - e^{n^2\pi(1-\cos\tau-\sqrt{-1}\sin\tau)}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= e^{-n^2\pi}\,\frac{e^{2n^2\pi x\sqrt{-1}(1+x\sqrt{-1})^{-1}} - e^{-2n^2\pi x\sqrt{-1}(1-x\sqrt{-1})^{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, la formule (41) donnera

$$(43)\qquad \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{x} = \frac{A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + \text{etc.}\ldots}{A_0 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6 + \text{etc.}\ldots},$$

les constantes A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, etc... étant déterminées par les équations

$$(44)\quad\left\{\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2} + e^{-\pi} + e^{-4\pi} + e^{-9\pi} + e^{-16\pi} + \text{etc...},\\
A_1 &= 2\pi\left(e^{-\pi} + 4e^{-4\pi} + 9e^{-9\pi} + 16e^{-16\pi} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right),\\
A_2 &= 2\pi\left(e^{-\pi} + 4e^{-4\pi} + 9e^{-9\pi} + 16e^{-16\pi} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right),\\
&\quad - \frac{4\pi^2}{1.2}\left(e^{-\pi} + 4^2e^{-4\pi} + 9^2e^{-9\pi} + 16^2e^{-16\pi} + \ldots\ldots\right),\\
A_3 &= -2\pi\left(e^{-\pi} + 4e^{-4\pi} + 9e^{-9\pi} + 16e^{-16\pi} + \ldots\ldots\ldots\right),\\
&\quad + 4\pi^2\left(e^{-\pi} + 4^2e^{-4\pi} + 9^2e^{-9\pi} + 16^2e^{-16\pi} + \ldots\ldots\right),\\
&\quad - \frac{8\pi^3}{1.2.3}\left(e^{-\pi} + 4^3e^{-4\pi} + 9^3e^{-9\pi} + 16^3e^{-16\pi} + \ldots\right),\\
&\text{etc.........};
\end{aligned}\right.$$

de telle sorte qu'on aura généralement, pour $n > 0$,

$$(45)\qquad A_n = \pm\left(S_n - \frac{n-1}{1}S_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}S_{n-2} - \ldots \mp \frac{n-1}{1}S_2 \pm S_1\right),$$

la valeur de S_n étant

$$(46)\qquad S_n = \frac{(2\pi)^n}{1.2.3\ldots n}\left(e^{-\pi} + 4^ne^{-4\pi} + 9^ne^{-9\pi} + 16^ne^{-16\pi} + \ldots\right),$$

et le double signe $\pm$ devant être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que le nombre entier n sera ou ne sera pas de l'une des formes $4m$, $4m+1$. Si, dans l'équation (45), on attribue au nombre n, 1.° les valeurs impaires

$$1,\quad 3,\quad 5, \ldots\ 2m+1,$$

2.° les valeurs paires

$$2,\quad 4,\quad 6, \ldots\ 2m,$$

on en tirera successivement

$$(47)\quad \begin{cases} A_1 = S_1, \\ A_3 = -S_3 + 2S_2 - S_1, \\ A_5 = S_5 - 4S_4 + 6S_3 - 4S_2 + S_1, \\ \text{etc.}\ldots\ldots \\ A_{2m+1} = (-1)^m \left[S_{2m+1} - \frac{2m}{1} S_{2m} + \frac{2m(2m-1)}{1.2} S_{2m-1} - \ldots + S_1 \right], \end{cases}$$

$$(48)\quad \begin{cases} A_2 = -S_2 + S_1, \\ A_4 = S_4 - 3S_3 + 3S_2 - S_1, \\ A_6 = -S_6 + 5S_5 - 10S_4 + 10S_3 - 5S_2 + S_1, \\ \text{etc.}\ldots\ldots \\ A_{2m} = (-1)^m \left[S_{2m} - \frac{2m-1}{1} S_{2m-1} + \frac{(2m-1)(2m-2)}{1.2} S_{2m-2} - \ldots - S_1 \right]. \end{cases}$$

De plus, comme on a, en vertu de la formule du binome, et en supposant $x^2 < 1$,

$$(49)\qquad \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} = \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{1}{4} x^3 + \frac{1.3}{4.6} x^5 - \frac{1.3.5}{4.6.8} x^7 + \ldots \right\},$$

il est clair que l'équation (43) pourra être présentée sous la forme

$$(50)\qquad A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \text{etc.}\ldots =$$
$$\frac{1}{2} \left\{ x - \frac{1}{4} x^3 + \frac{1.3}{4.6} x^5 + \frac{1.3.5}{4.6.8} x^7 + \ldots \right\} \left\{ A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots \right\}.$$

Lorsque, dans cette dernière, on développe le second membre suivant les puissances ascendantes de x, le développement doit coïncider, quel que soit x, avec le polynome renfermé dans le premier membre; d'où l'on conclut

$$(51)\quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} A_0, \\ A_3 = \frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{2.4} A_0, \\ A_5 = \frac{1}{2} A_4 - \frac{1}{2.4} A_2 + \frac{1.3}{2.4.6} A_0, \\ \text{etc.}\ldots\ldots \\ A_{2m+1} = \frac{1}{2} A_{2m} - \frac{1}{2.4} A_{2m-2} + \frac{1.3}{2.4.6} A_{2m-4} - \ldots \pm \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots(2m+2)} A_0. \end{cases}$$

Enfin, si l'on reporte dans les formules (51) les valeurs de A_1, A_2, A_3, A_4, ... tirées des équations (44), ou, ce qui revient au même, des équations (47) et (48), on trouvera

$$(52) \qquad \frac{1}{4\pi} = \frac{e^{-\pi}+4e^{-4\pi}+9e^{-9\pi}+16e^{-16\pi}+\ldots}{\frac{1}{2}+e^{-\pi}+e^{-4\pi}+e^{-9\pi}+e^{-16\pi}+\ldots},$$

et l'on obtiendra des relations dignes de remarque entre les sommes désignées par S_1, S_2, S_3, etc.... On aura, par exemple,

$$(53) \qquad S_3 = \frac{5}{2}\left(S_2 - \frac{1}{2}S_1\right),$$

ou, en d'autres termes,

$$(54) \qquad \left\{ \begin{aligned} & e^{-\pi}+4^3e^{-4\pi}+9^3e^{-9\pi}+16^3e^{-16\pi}+\ldots \\ & = \frac{15}{4\pi}\left(e^{-\pi}+4^2e^{-4\pi}+9^2e^{-9\pi}+16^2e^{-16\pi}+\ldots\right) \\ & - \frac{15}{8\pi^2}\left(e^{-\pi}+4e^{-4\pi}+9e^{-9\pi}+16e^{-16\pi}+\ldots\ldots\right). \end{aligned} \right.$$

SUR QUELQUES PROPOSITIONS FONDAMENTALES

DU CALCUL DES RÉSIDUS.

Soit $f(z)$ une fonction qui s'évanouisse, lorsqu'on attribue à la variable z des valeurs infinies, réelles ou imaginaires, et supposons que le produit

$$z f(z) \tag{1}$$

se réduise alors à une constante déterminée $\mathcal{F}$. D'après ce qu'on a dit dans le premier volume des Exercices, page 110, le résidu intégral de la fonction $f(z)$ sera précisément égal à $\mathcal{F}$, en sorte qu'on aura

$$\mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{F}. \tag{2}$$

Comme cette dernière formule peut servir à résoudre un grand nombre de problêmes, il importe de bien fixer le sens de la proposition qu'elle renferme. Tel est l'objet dont nous allons d'abord nous occuper.

J'observerai en premier lieu que, dans le cas où l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0 \tag{3}$$

a une infinité de racines, l'expression *résidu intégral* désigne la limite vers laquelle la somme des résidus partiels de la fonction $f(z)$ converge de plus en plus, à mesure que l'on fait entrer dans cette somme un plus grand nombre de termes. Or la valeur de cette limite peut dépendre de l'ordre dans lequel on range les résidus partiels pour les ajouter les uns aux autres. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on suppose

$$f(z) = \frac{\pi \cos \pi z}{z \sin \pi z}.$$

Alors l'équation (3), réduite à

$$z \sin \pi z = 0, \tag{4}$$

aura 1.° deux racines nulles, correspondantes à un résidu pareillement nul, 2.° des racines positives comprises dans la série

(5) $$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \text{etc...},$$

et auxquelles correspondront les résidus partiels

(6) $$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \text{etc...};$$

3.° des racines négatives comprises dans la série

(7) $$-1, \quad -2, \quad -3, \quad -4, \quad \text{etc...},$$

et auxquelles correspondront les résidus partiels

(8) $$-1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \text{etc....}$$

Or, si dans l'addition des résidus partiels, on suit l'ordre de grandeur des valeurs numériques des racines, en ajoutant toujours simultanément les résidus qui correspondent à des racines égales, mais affectées de signes contraires, la somme obtenue sera constamment nulle, et l'on pourra en dire autant de la limite vers laquelle convergera cette somme, à mesure que l'on y fera entrer un plus grand nombre de termes. Donc, si l'on considère la notation

(9) $$\mathcal{E}\left(\left(\frac{\pi\cos\pi z}{z\sin\pi z}\right)\right)$$

comme destinée à représenter la limite de laquelle le résidu

(10) $${}_{-n}^{\;n}\mathcal{E}_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\pi\cos\pi z}{z\sin\pi z}\right)\right)$$

s'approche indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, on aura

(11) $$\mathcal{E}\left(\left(\frac{\pi\cos\pi z}{z\sin\pi z}\right)\right)=0.$$

Mais si, dans l'addition des résidus partiels, on n'a point égard à l'ordre de grandeur des valeurs numériques des racines; si, pour fixer les idées, on ajoute aux n premiers

termes de la série (8) les $n+m$ premiers termes de la série (6), m et n étant deux nombres entiers quelconques, on obtiendra la somme

$$(12)\qquad \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+m},$$

qui, se trouvant toujours comprise entre les deux quantités

$$(13)\qquad l\left(1+\frac{m}{n}\right),\qquad l\left(1+\frac{m}{n+1}\right),$$

[voyez la page 227], pourra converger vers une limite finie et positive, ou même vers une limite infinie, tandis que les nombres m et n croîtront indéfiniment. On arriverait à des conclusions du même genre, si l'on ajoutait aux n premiers termes de la série (6) les $n+m$ premiers termes de la série (8). Seulement alors la somme obtenue, et la limite vers laquelle cette somme convergerait, deviendraient négatives. Ainsi, dans le cas que nous considérons, le résidu intégral

$$\mathcal{E}((f(z)))=\mathcal{E}\left(\left(\frac{\pi\cos\pi z}{z\sin\pi z}\right)\right)$$

aura une valeur générale indéterminée, qui pourra être finie ou infinie, positive ou négative; et la formule (11) ne fournira qu'une valeur particulière de ce même résidu.

Revenons au cas où $f(z)$ désigne une fonction quelconque. Alors l'équation (3) pourra offrir non-seulement des racines réelles, mais encore des racines imaginaires. De plus toute valeur imaginaire de z pourra être présentée sous la forme

$$(14)\qquad z=re^{p\sqrt{-1}},$$

r désignant une quantité positive appelée *module*, et p une variable réelle, comprise entre les deux limites $-\pi$, $+\pi$. Enfin l'on pourra concevoir que les variables réelles r et p représentent deux coordonnées polaires, savoir le rayon vecteur d'un point mobile, ce rayon étant compté à partir d'une origine fixe, et l'angle que fait le même rayon vecteur avec un axe fixe passant par l'origine. Cela posé, imaginons que, dans le plan des coordonnées r et p, on trace une courbe fermée ou un contour fermé, dont la forme varie sans cesse et de manière que ses différents points s'éloignent indéfiniment de l'origine. Supposons d'ailleurs qu'on ajoute les uns aux autres les résidus partiels de la fonction $f(z)$ correspondants à des valeurs de r et de p qui indiquent des points situés dans l'intérieur de la courbe. Le nombre des termes dont se composera la somme ainsi obtenue croîtra sans cesse, et la limite vers laquelle convergera

cette somme pourra dépendre de la nature de la courbe dont nous avons parlé. Donc le résidu intégral de la fonction $f(z)$, qui n'est autre que cette limite, aura le plus souvent une valeur générale indéterminée. Mais il n'en sera plus de même si la courbe est réduite à la circonférence d'un cercle dont le centre coïncide avec l'origine, et dont le rayon R croisse de plus en plus. Alors la somme des résidus de $f(z)$ correspondants à des points situés dans l'intérieur du cercle, c'est-à-dire, la somme des résidus correspondants aux racines dont le module sera inférieur à R, se trouvera représentée par la notation

$$(15) \qquad {}_{(0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z)));$$

[voyez le 1.er volume des Exercices, page 207], et pourra converger vers une limite déterminée, tandis que le rayon R deviendra de plus en plus grand. Cette dernière limite sera une valeur particulière du résidu intégral

$$\mathcal{E}((f(z))),$$

que nous appellerons *valeur principale*, et qu'il ne faut pas confondre avec la valeur générale ci-dessus mentionnée. Dans l'exemple que nous avons déjà traité, le résidu intégral

$$\mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{E}\left(\left(\frac{\pi \cos \pi z}{z \sin \pi z}\right)\right)$$

a pour valeur générale une quantité indéterminée, mais sa valeur principale se réduit à zéro.

Les observations que nous venons de faire s'étendent au cas même où, la fonction $f(z)$ se présentant sous la forme d'une fraction, il s'agirait d'évaluer le résidu intégral relatif aux racines de $\frac{1}{f(z)} = 0$, qui rendraient le dénominateur de la fraction nul, ou le numérateur infini. Supposons, pour fixer les idées,

$$f(z) = \frac{\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)}.$$

Alors les *valeurs principales* des deux expressions

$$\mathcal{E}\frac{((\mathrm{f}(z)))}{\mathrm{F}(z)}, \qquad \mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)}{((\mathrm{F}(z)))}$$

ne seront autres que les limites vers lesquelles convergeront les résidus

$$\underset{(0)}{\overset{(R)}{\mathcal{E}}}{}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{((\mathrm{f}(z)))}{\mathrm{F}(z)}, \qquad \underset{(0)}{\overset{(R)}{\mathcal{E}}}{}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{\mathrm{f}(z)}{((\mathrm{F}(z)))},$$

tandis que le module R deviendra de plus en plus grand.

Il est maintenant facile de s'assurer que, dans la formule (2), le résidu intégral

$$\mathcal{E}((f(z)))$$

doit toujours être réduit à sa valeur principale. Effectivement, pour y parvenir, il suffit d'observer que cette formule peut être déduite de l'équation (64) de la page 212 du 1.er volume à l'aide des considérations suivantes.

Supposons que la fonction $f(z)$ ne demeure pas infinie pour $z=0$. Alors, en remplaçant t par z, $f(t)$ par $f(z)$, et r_0 par zéro, dans l'équation (64) de la page 212 du premier volume, on trouvera

$$(16) \qquad \underset{(0)}{\overset{(R)}{\mathcal{E}}}{}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z))) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re^{p\sqrt{-1}} f(Re^{p\sqrt{-1}})\,dp.$$

J'ajoute que la formule (16) s'étend au cas même où la fonction $f(z)$ devient infinie avec $\frac{1}{z}$, pourvu que, dans ce cas, on considère le résidu de $f(z)$ relatif à $z=0$ comme renfermé dans la somme désignée par la notation

$$\underset{(0)}{\overset{(R)}{\mathcal{E}}}{}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z))).$$

En effet, soit m le nombre des racines nulles de l'équation (3), et faisons, pour abréger,

$$z^m f(z) = \mathrm{f}(z).$$

Les premiers termes du développement de $f(z)$ suivant les puissances ascendantes de z composeront le polynome

$$\frac{\mathrm{f}(0)}{z^m} + \frac{1}{z^{m-1}}\frac{\mathrm{f}'(0)}{1} + \frac{1}{z^{m-2}}\frac{\mathrm{f}''(0)}{1.2} + \dots + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(0)}{1.2.3\dots(m-1)},$$

et la différence

$$\varpi(z) = f(z) - \left\{ \frac{f(0)}{z^m} + \frac{1}{z^{m-1}} \frac{f'(0)}{1} + \ldots + \frac{1}{z} \frac{f^{(m-1)}(0)}{1.2.3\ldots(m-1)} \right\}$$

sera une nouvelle fonction de z qui ne deviendra plus infinie avec $\frac{1}{z}$. On aura donc, en vertu de la formule (16),

$$\overset{(R)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((\varpi(z))) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R e^{p\sqrt{-1}} \varpi(R e^{p\sqrt{-1}})\, dp.$$

Or, si l'on substitue dans l'équation précédente la valeur de $\varpi(z)$, en observant que l'on a, pour $n > 1$,

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z^n}\right)\right) = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R e^{p\sqrt{-1}}}{R^n e^{np\sqrt{-1}}} = R^{-n+1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(n-1)p\sqrt{-1}}\, dp = 0,$$

et pour $n = 1$,

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z^n}\right)\right) = \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R e^{p\sqrt{-1}}}{R^n e^{np\sqrt{-1}}}\, dp = \int_{-\pi}^{\pi} dp = 2\pi,$$

on obtiendra la formule

$$\overset{(R)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z))) - \frac{f^{(m-1)}(0)}{1.2.3\ldots(m-1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R e^{p\sqrt{-1}} f(R e^{p\sqrt{-1}})\, dp - \frac{f^{(m-1)}(0)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

qui pourra être évidemment réduite à la formule (16).

Cela posé, désignons par $\mathcal{F}$ une constante déterminée, et admettons qu'en attribuant au module r des valeurs de plus en plus grandes, on puisse choisir ces valeurs de manière que la différence

(17) $$\Delta = z f(z) - \mathcal{F} = r e^{p\sqrt{-1}} f(r e^{p\sqrt{-1}}) - \mathcal{F}$$

s'approche indéfiniment de zéro, quel que soit p. En désignant par R une des valeurs dont il s'agit, et par δ la valeur correspondante de l'intégrale

(18) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta\, dp,$$

on conclura de l'équation (16)

(19) $$\overset{(R)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z))) = \mathcal{F} + \delta;$$

puis, en prenant $R = \infty$, et supposant le résidu intégral

$$\mathcal{E}((f(z)))$$

réduit à sa valeur principale, on trouvera définitivement

$$\mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{F} \tag{2}$$

La démonstration précédente de la formule (2) subsisterait encore, si les valeurs de la différence

$$\Delta = z f(z) - \mathcal{F},$$

correspondantes à de très-grandes valeurs de z, étaient sensiblement nulles pour des valeurs de p sensiblement distinctes de certaines quantités p_0, p_1, p_2, ... et demeuraient finies pour des valeurs de p très-rapprochées de p_0, p_1, p_2, ... En effet, les parties de l'intégrale (18), correspondantes à ces dernières valeurs de p, seraient de la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{p_0-\varepsilon_1}^{p_0+\varepsilon_2} \Delta\, dp = \frac{1}{2\pi}\int_{p_0-\varepsilon_1}^{p_0+\varepsilon_2} (\Delta_1 + \Delta_2\sqrt{-1})\, dp \tag{20}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{p_0-\varepsilon_1}^{p_0+\varepsilon_2} \Delta_1\, dp + \sqrt{-1}\int_{p_0-\varepsilon_1}^{p_0+\varepsilon_2} \Delta_2\, dp\right\},$$

ε_1, ε_2 désignant des nombres très-petits, et Δ_1, Δ_2 des quantités finies. Or, chacune des intégrales réelles

$$\int_{p_0-\varepsilon_1}^{p_0+\varepsilon_2} \Delta_1\, dp, \qquad \int_{p_0-\varepsilon_1}^{p_0+\varepsilon_2} \Delta_2\, dp,$$

étant égale au produit de la somme $\varepsilon_2 + \varepsilon_1$ par une moyenne entre les diverses valeurs de Δ_1 ou de Δ_2, resterait fort petite dans l'hypothèse admise; et l'on pourrait en dire autant non-seulement de l'expression (20), mais encore de l'intégrale (18), dans laquelle toutes les parties relatives à des valeurs sensibles de Δ seraient sensiblement nulles. Ainsi, pour que notre démonstration subsiste, il suffit que des valeurs de Δ, correspondantes à de très-grands modules de z, demeurent généralement ou très-petites, ou finies, quel que soit l'angle p, et ne puissent cesser d'être très-petites, en devenant finies, que pour certaines valeurs particulières du même angle. Il y a plus; il suffit que cette condition puisse être remplie, pour des modules de z convenablement choisis, mais supérieurs à toute limite assignable, par exemple, pour des modules

respectivement égaux aux différents termes d'une série donnée et toujours croissante. Il pourrait d'ailleurs arriver que d'autres valeurs de Δ, qui correspondraient à des modules de z très-considérales, mais pris hors de la série donnée, fussent infinies; et c'est ce qui arrivera d'ordinaire, lorsque l'équation (3) aura une infinité de racines.

Pour faire mieux saisir ces principes, appliquons-les à un cas particulier, et supposons

$$(21)\qquad f(z)=\frac{\left(e^{\frac{1}{2}z}+e^{-\frac{1}{2}z}\right)^2}{z(e^z+e^{-z})}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{e^z+e^{-z}}\right).$$

Comme on trouvera dans ce cas

$$(22)\qquad zf(z)=1+\frac{2}{e^z+e^{-z}},$$

il est clair que le produit $zf(z)$ différera très-peu de l'unité, pour de très-grandes valeurs attribuées au module r de la variable

$$z=re^{p\sqrt{-1}}=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p),$$

tant que l'on n'aura pas sensiblement

$$(23)\qquad \cos p=0,$$

c'est-à-dire,

$$(24)\qquad p=+\frac{\pi}{2},\quad \text{ou}\quad p=-\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, dans le cas présent, on tirera de la formule (22) $\mathcal{J}=1$,

$$(25)\qquad \Delta=zf(z)-1=\frac{2}{e^z+e^{-z}}=\frac{2}{e^{r\cos p+r\sin p\sqrt{-1}}+e^{-r\cos p-r\sin p\sqrt{-1}}}.$$

D'ailleurs, en prenant $p=\pm\frac{\pi}{2}$, on trouvera $z=\pm r\sqrt{-1}$,

$$(26)\qquad \Delta=\frac{1}{\cos r}.$$

Or, cette dernière valeur de Δ deviendra infinie, si l'on pose

$$(27)\qquad r=\frac{(2n+1)\pi}{2},$$

n étant un nombre entier aussi grand que l'on voudra; mais elle restera finie, et se réduira simplement à l'unité, si l'on pose

(28) $$r = n\pi,$$

c'est-à-dire, si l'on prend pour r un terme de la série

(29) $$0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi, \quad \text{etc....}$$

Il y a plus : si le nombre entier n devient infiniment grand, la valeur de Δ correspondante à $r = n\pi$, restera toujours finie, lorsqu'elle cessera d'être infiniment petite, ou, ce qui revient au même, lorsque l'angle p différera très-peu de l'une des quantités $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$. Pour le démontrer, nommons $\mathcal{R}$ le module de la différence Δ et $\mathcal{P}$ un arc réel choisi de manière à vérifier l'équation

(30) $$\mathcal{R}(\cos\mathcal{P} + \sqrt{-1}\sin\mathcal{P}) = \Delta = \frac{2}{e^{r\cos p + r\sin p\sqrt{-1}} + e^{-r\cos p - r\sin p\sqrt{-1}}}.$$

On tirera de cette équation

(31) $$\mathcal{R}^2 = \frac{4}{e^{2r\cos p} + 2\cos(2r\sin p) + e^{-2r\cos p}}.$$

Si maintenant on cherche les *maxima* et *minima* de l'expression

(32) $$e^{2r\cos p} + 2\cos(2r\sin p) + e^{-2r\cos p},$$

en considérant p comme seule variable, on reconnaîtra qu'ils sont donnés par la formule

$$2\cos p \cdot \sin(2r\sin p) + (e^{2r\cos p} - e^{-2r\cos p})\sin p = 0,$$

à laquelle on ne peut satisfaire qu'en supposant

(33) $$\cos p = 0, \qquad \text{ou} \qquad (34) \quad \sin p = 0,$$

puisqu'on en tirerait dans toute autre hypothèse

$$\frac{e^{2r\cos p} - e^{-2r\cos p}}{4r\cos p} = -\frac{\sin(2r\sin p)}{2r\sin p} < 1,$$

et par suite

$$1+\frac{(2r\cos p)^2}{1.2.3}+\frac{(2r\cos p)^4}{1.2.3.4.5}+\text{etc}\ldots<1,$$

ce qui serait absurde. Il est aisé d'en conclure que l'expression (32) admettra un seul *maximum* correspondant à $\sin p=0$, savoir,

(35) $$e^{2r}+2+e^{-2r}=(e^r+e^{-r})^2,$$

et un seul *minimum* correspondant à $\cos p=0$, savoir,

(36) $$1+2\cos 2r+1=4\cos^2 r.$$

Donc la quantité $\mathfrak{R}^2$ sera comprise entre les limites

(37) $$\left(\frac{2}{e^r+e^{-r}}\right)^2, \qquad \frac{1}{\cos^2 r},$$

et le module $\mathfrak{R}$ de la différence Δ ne surpassera jamais la valeur numérique du rapport

(38) $$\frac{1}{\cos r}.$$

Ce rapport devient infini, comme on devait s'y attendre, quand on suppose

$$r=\frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Mais, si l'on prend $r=n\pi$, la valeur numérique du même rapport, ou la limite supérieure du module $\mathfrak{R}$, se réduira simplement à l'unité. Donc alors, dans la différence Δ, la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ seront renfermés entre les limites -1, $+1$, et cette différence aura toujours une valeur finie, quand elle cessera d'être infiniment petite, ce qu'il s'agissait de démontrer.

On aura donc, en vertu de la formule (2),

(39) $$\mathcal{E}\frac{\left(e^{\frac{1}{2}z}+e^{-\frac{1}{2}z}\right)^2}{((z(e^z+e^{-z})))}=1,$$

pourvu que l'on réduise le résidu

$$\mathcal{E}\frac{\left(e^{\frac{1}{2}z}+e^{-\frac{1}{2}z}\right)^2}{((z(e^z+e^{-z})))}$$

à sa valeur principale. La formule (39), étant développée, fournit l'équation connue

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}\ldots=\frac{\pi}{4}. \tag{40}$$

De tout ce qu'on vient de dire, il résulte qu'on peut énoncer le théorème suivant.

1.er Théorème. *Si, en attribuant au module* r *de la variable*

$$z=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)$$

des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que le produit

$$zf(z) \tag{1}$$

devienne sensiblement égal à une constante déterminée $\mathcal{F}$, *quel que soit d'ailleurs l'angle* p, *ou du moins de manière que la différence*

$$zf(z)-\mathcal{F}$$

reste toujours finie ou infiniment petite, et ne cesse d'être infiniment petite, en demeurant finie, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières de l'angle p; *on aura*

$$\mathcal{E}((f(z)))=\mathcal{F}, \tag{2}$$

pourvu que, dans le premier membre de l'équation (2), *on réduise le résidu intégral*

$$\mathcal{E}((f(z)))$$

à sa valeur principale.

Corollaire 1.er Lorsque les conditions énoncées dans le théorème précédent sont remplies, la valeur principale du résidu intégral

$$\mathcal{E}((f(z)))$$

est complètement déterminée par la formule (2). En d'autres termes, l'expression

$$\underset{(0)}{\overset{(R)}{\mathcal{E}}}{}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z)))$$

s'approche indéfiniment d'une limite fixe, tandis que le nombre $\mathfrak{R}$ devient de plus en plus grand, et cette limite fixe est précisément la constante $\mathcal{G}$. Donc, si l'on nomme

(41) $$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \ldots r_n, \ldots$$

les divers modules des racines de l'équation (3), rangés par ordre de grandeur, et u_n la somme des résidus partiels, relatifs aux racines qui offrent le module r_n, la série

(42) $$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots u_n, \ldots$$

sera convergente, et l'on aura

(43) $$u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc}\ldots = \mathcal{G}.$$

Si, au lieu de prolonger la série (42) à l'infini, on l'arrêtait après un certain terme, la somme des termes conservés ne serait pas rigoureusement égale à $\mathcal{G}$, mais la différence entre cette somme et la somme de la série serait représentée par l'intégrale (18). Nous montrerons, dans un autre article, comment on peut calculer par approximation l'intégrale dont il s'agit, et par conséquent le reste de la série (42).

Corollaire 2. Si le nombre des valeurs de p, dans le voisinage desquelles la différence

$$\Delta = z f(z) - \mathcal{G}$$

cesse d'être infiniment petite en demeurant finie, croissait indéfiniment avec le module r de la variable z, alors, pour que l'on pût compter sur l'exactitude de l'équation (7), il deviendrait nécessaire que la somme des intégrales semblables à l'intégrale (20), s'aprochât indéfiniment, pour des valeurs croissantes de r, de la limite zéro.

Exemples. Appliquons maintenant le théorème 1 à quelques exemples; et posons successivement

(44) $$f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{e^{2z}-2+e^{-2z}},$$ (45) $$f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{e^{2z}+2+e^{-2z}}.$$

On aura, dans l'un et l'autre cas, $\mathcal{G} = 1$. De plus, les valeurs de Δ, qui correspondent aux valeurs précédentes de $f(z)$, savoir,

(46) $\Delta = \frac{2}{(e^z - e^{-z})^2}$, et (47) $\Delta = -\frac{2}{(e^z + e^{-z})^2}$

resteront toujours finies ou infiniment petites, la première, pour toutes les valeurs de r comprises dans la série

(48) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, etc...,

et la seconde pour toutes les valeurs de r comprises dans la série (29), et ne cesseront d'être infiniment petites, en demeurant finies, que pour des valeurs de p très-voisines de $+\frac{\pi}{2}$ ou de $-\frac{\pi}{2}$. Cela posé, on tirera de la formule (2)

(49) $\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z}\,\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{e^{2z}-2+e^{-2z}}\right)\right)=1$, (50) $\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z}\,\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{e^{2z}+2+e^{-2z}}\right)\right)=1$,

puis, en développant les équations (49) et (50), on retrouvera les formules connues

(51) $$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc...}=\frac{\pi^2}{6},$$

(52) $$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\text{etc...}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Lorsque la série (42) est divergente, l'équation (2) ne saurait subsister, et par conséquent l'on peut être assuré que les conditions énoncées dans le théorème 1 ne sont pas remplies. Ainsi, par exemple, si l'on suppose

(53) $$f(z)=\frac{z^{2m+1}}{e^{z^2}-e^{-z^2}},$$

m désignant un nombre entier quelconque, la série (42) deviendra

(54) 0, $-\frac{\pi^m}{2}$, $+\frac{(2\pi)^m}{2}$, $-\frac{(3\pi)^m}{2}$, $+$ etc...,

et sera divergente. Donc alors il sera impossible d'assigner au module de z une valeur telle que la différence Δ reste finie ou infiniment petite, quel que soit p. Cette conclusion est d'autant plus remarquable qu'on a, dans le cas présent, $\mathcal{G}=0$, et que l'expression

$$\Delta = z f(z) = \frac{z^{2m+2}}{e^{z^2} - e^{-z^2}} = \frac{r^{2m+2}[\cos(2m+2)p + \sqrt{-1}\sin(2m+2)p]}{e^{r^2(\cos 2p+\sqrt{-1}\sin 2p)} - e^{-r^2(\cos 2p+\sqrt{-1}\sin 2p)}}$$

s'évanouit en général pour des valeurs infinies du module r de la variable z. Mais, si l'on attribue à l'angle p l'une des valeurs $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, la même expression réduite à

$$\pm \frac{r^{2m+2}}{\sin^2 r}\sqrt{-1}$$

deviendra infinie, quelle que soit la valeur infiniment grande attribuée au module r, ce qui s'accorde avec la conclusion à laquelle nous étions parvenus.

Lorsque, dans la formule (2), on suppose la constante $\mathcal{G}$ réduite à zéro, on obtient, au lieu du 1.er théorème, celui que nous allons énoncer.

2.° Théorème. *Si, en attribuant au module* r *de la variable*

$$z = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$$

des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que le produit

$$(1) \qquad z f(z)$$

devienne sensiblement égal à zéro, quel que soit d'ailleurs l'angle p, *ou du moins de manière que ce produit reste toujours fini ou infiniment petit, et ne cesse d'être infiniment petit, en demeurant fini, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières de* p; *on aura*

$$(55) \qquad \mathcal{E}((f(z))) = 0,$$

pourvu que, dans le second membre de l'équation (55), *on réduise le résidu intégral*

$$\mathcal{E}((f(z)))$$

à sa valeur principale.

Exemples. Posons successivement

$$(56) \qquad f(z) = \frac{1}{z^2}\,\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}, \qquad (57) \qquad f(z) = \frac{\cot z}{z^2},$$

Alors, si l'on attribue au module de z une valeur infiniment grande prise dans la série (48), le produit $zf(z)$ deviendra infiniment petit, quel que soit l'angle p. Par suite la formule (55) entraînera les deux équations

(58) $$\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z^2}\,\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}\right)\right)=0.$$ (59) $$\left(\left(\frac{\cot z}{z^2}\right)\right)=0,$$

qui coïncident l'une et l'autre avec la formule (51). Il est d'ailleurs facile de s'assurer que ces deux équations s'accordent entre elles, attendu que, pour passer de la première à la seconde, il suffit de remplacer z par $z\sqrt{-1}$.

Prenons encore

(60) $$f(z)=\frac{1}{(e^{az}-e^{-az})\cos bz},$$

a et b désignant deux quantités positives. L'équation (3) sera vérifiée non-seulement par la valeur $z=0$, mais encore par les valeurs de z comprises dans les deux séries

(61) $$\pm\frac{\pi}{a}\sqrt{-1},\quad \pm\frac{2\pi}{a}\sqrt{-1},\quad \pm\frac{3\pi}{a}\sqrt{-1},\quad \text{etc.}...,$$

(62) $$\pm\frac{\pi}{2b},\quad \pm\frac{3\pi}{2b},\quad \pm\frac{5\pi}{2b},\quad \text{etc.}...$$

Or, si l'on attribue au module de z une valeur infiniment grande, tellement choisie que la différence entre cette valeur et le terme le plus voisin de chacune des suites

(63) $$\frac{\pi}{a},\quad \frac{2\pi}{a},\quad \frac{3\pi}{a},\quad \text{etc.}...,$$

(64) $$\frac{\pi}{2b},\quad \frac{3\pi}{2b},\quad \frac{5\pi}{2b},\quad \text{etc.}...,$$

soit une quantité finie, le produit $zf(z)$ deviendra infiniment petit, quel que soit l'angle p. On aura donc, en vertu de la formule (55),

(65) $$\mathcal{E}\,\frac{1}{(((e^{az}-e^{-az})\cos bz))}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}+e^{-\frac{\pi b}{a}}}+\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}+e^{-\frac{2\pi b}{a}}}-\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{a}}+e^{-\frac{3\pi b}{a}}}+\ldots\right\} \\ &=\frac{1}{b}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}-e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}-e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\frac{1}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}-e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}+\ldots\ldots\ldots\right\}. \end{aligned}\right.$$

Pareillement, si l'on désigne par $f(z)$ et $F(z)$ deux fonctions entières de z, on trouvera successivement

$$(67)\qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{F(z)}\,\frac{1}{(e^{az}-e^{-az})\cos bz}\right)\right)=0,$$

$$(68)\qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{F(z)}\,\frac{1}{(e^{az}-e^{-az})\sin bz}\right)\right)=0,$$

$$(69)\qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{F(z)}\,\frac{1}{(e^{az}+e^{-az})\cos bz}\right)\right)=0.$$

Si l'on suppose, pour plus de commodité, que $\frac{f(z)}{F(z)}$ soit une fonction paire de z, et que les racines de l'équation

$$(70)\qquad F(z)=0$$

soient inégales entre elles ; en désignant par z_1, z_2, ... ces mêmes racines, on tirera de la formule (67)

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{4}\,\frac{f(0)}{F(0)}-\frac{f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{-1}\right)}{F\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{-1}\right)}\,\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}+e^{-\frac{\pi b}{a}}}+\frac{f\left(\frac{2\pi}{a}\sqrt{-1}\right)}{F\left(\frac{2\pi}{a}\sqrt{-1}\right)}\,\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}+e^{-\frac{2\pi b}{a}}}-\ldots\right\} \\ &=\frac{1}{b}\left\{\frac{f\left(\frac{\pi}{2b}\right)}{F\left(\frac{\pi}{2b}\right)}\,\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}-e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\frac{f\left(\frac{3\pi}{2b}\right)}{F\left(\frac{3\pi}{2b}\right)}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}-e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right\} \\ &-\frac{1}{2}\left\{\frac{f(z_1)}{F'(z_1)}\,\frac{1}{\left(e^{az_1}-e^{-az_1}\right)\cos bz_1}+\frac{f(z_2)}{F'(z_2)}\,\frac{1}{\left(e^{az_2}-e^{-az_2}\right)\cos bz_2}+\ldots\ldots\right\} \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose, au contraire, que $\frac{f(z)}{F(z)}$ soit une fonction impaire de z, choisie de manière à s'évanouir pour $z=0$, on tirera de la formule (68)

$$(72)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{a}\left\{\frac{\sqrt{-1}\,\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{-1}\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{-1}\right)}\,\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{\sqrt{-1}\,\mathrm{f}\left(\frac{2\pi}{a}\sqrt{-1}\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{2\pi}{a}\sqrt{-1}\right)}\,\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\ldots\ldots\ldots\right\}\\
&=\frac{1}{b}\left\{\frac{\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{b}\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{b}\right)}\,\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{\mathrm{f}\left(\frac{2\pi}{b}\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{2\pi}{b}\right)}\,\frac{1}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\ldots\ldots\ldots\right\}\\
&-\frac{\mathrm{f}'(0)}{4ab\mathrm{F}(0)}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{f}(z_1)}{\mathrm{F}'(z_1)}\,\frac{1}{\left(e^{az_1}-e^{-az_1}\right)\sin bz_1}+\frac{\mathrm{f}(z_2)}{\mathrm{F}'(z_2)}\,\frac{1}{\left(e^{az_2}-e^{-az_2}\right)\sin bz_2}+\ldots\right\}
\end{aligned}\right.$$

Concevons en particulier que l'on pose dans l'équation (71)

$$\frac{\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)}=\frac{1}{z^2+c^2},$$

et dans l'équation (72)

$$\frac{\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)}=\frac{z}{z^2+c^2}.$$

Alors on trouvera

$$(73)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{4c^2}-\frac{1}{c^2-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\,\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}+e^{-\frac{\pi b}{a}}}+\frac{1}{c^2-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}\,\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}+e^{-\frac{2\pi b}{a}}}-\ldots\ldots\ldots\right\}\\
&=\frac{1}{b}\left\{\frac{1}{c^2+\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2}\,\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}-e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\frac{1}{c^2+\left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}-e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\ldots\ldots\ldots\right\}\\
&+\frac{1}{2c}\,\frac{1}{\left(e^{bc}+e^{-bc}\right)\sin ac},
\end{aligned}\right.$$

et

$$(74)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2c^2-\pi^2}\,\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{2}{a^2c^2-4\pi^2}\,\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{3}{a^2c^2-9\pi^2}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{a}}-e^{-\frac{3\pi b}{a}}}+\ldots\\
&+\frac{1}{b^2c^2+\pi^2}\,\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{2}{b^2c^2+4\pi^2}\,\frac{1}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\frac{3}{b^2c^2+9\pi^2}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}-\ldots\\
&=\frac{1}{4\pi abc^2}-\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\left(e^{bc}-e^{-bc}\right)\sin ac}.
\end{aligned}\right.$$

Si, après avoir multiplié par c^2 les deux membres de l'équation (73), on prend $c=\infty$, on retrouvera la formule (66). Ajoutons que, si, après avoir multiplié par la constante a, les deux membres de chacune des formules (73) et (74), on réduit cette constante à zéro, on obtiendra les équations

$$(75)\quad \frac{1}{c^2+\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{c^2+\left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{c^2+\left(\frac{5\pi}{2b}\right)^2}-\ldots=\frac{\pi}{4c^2}-\frac{\pi}{2c^2(e^{bc}+e^{-bc})},$$

$$(76)\quad \frac{1}{c^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}-\frac{1}{c^2+\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2}+\frac{1}{c^2+\left(\frac{3\pi}{b}\right)^2}-\ldots=\frac{b}{2c^2}-\frac{b}{c(e^{bc}-e^{-bc})},$$

qui étaient déjà connues, et peuvent s'écrire ainsi qu'il suit

$$(77)\quad \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z(c^2+z^2)\cos bz}\right)\right)=0,$$

$$(78)\quad \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{(c^2+z^2)\sin bz}\right)\right)=0.$$

Lorsqu'on pose, dans l'équation (67),

$$\frac{\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)}=z^{2m},$$

et dans l'équation (68) ou (69),

$$\frac{\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)}=z^{2m+1},$$

m désignant un nombre entier quelconque, on obtient les formules

$$(79)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^{m+1}}{a^{2m+1}}\left\{\dfrac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}+e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\dfrac{2^{2m}}{e^{\frac{2\pi b}{a}}+e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\dfrac{3^{2m}}{e^{\frac{3\pi b}{a}}+e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots\ldots\ldots\right\} \\ =\dfrac{2}{(2b)^{2m+1}}\left\{\dfrac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}-e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\dfrac{3^{2m}}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}-e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\dfrac{5^{2m}}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}-e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}-\ldots\ldots\ldots\right\}, \end{array}\right.$$

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^{m+1}}{a^{2m+2}}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{2^{2m+1}}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{3^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi b}{a}}-e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\dots\dots\right\} \\ &=\frac{1}{b^{2m+2}}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{2^{2m+1}}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\frac{3^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}-\dots\dots\right\} \end{aligned}\right.$$

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^{m}}{a^{2m+2}}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{2a}}+e^{-\frac{\pi b}{2a}}}-\frac{3^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi b}{2a}}+e^{-\frac{3\pi b}{2a}}}+\frac{5^{2m+1}}{e^{\frac{5\pi b}{2a}}+e^{-\frac{5\pi b}{2a}}}-\dots\dots\right\} \\ &=\frac{1}{b^{2m+2}}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}+e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\frac{3^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}+e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\frac{5^{2m+1}}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}+e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}-\dots\dots\right\}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on posait, au contraire, dans l'équation (67),

$$\frac{f(z)}{F(z)}=\frac{1}{z^{2m}},$$

et dans l'équation (68) ou (69)

$$\frac{f(z)}{F(z)}=\frac{1}{z^{2m+1}},$$

on trouverait

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} &(-1)^{m+1}a^{2m-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}+e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}}{e^{\frac{2\pi b}{a}}+e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}}{e^{\frac{3\pi b}{a}}+e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\dots\dots\right\} \\ &=2^{2m}b^{2m-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}-e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}-e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2m}}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}-e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}-\dots\dots\right\} \\ &-\frac{1}{2}\pi^{2m}\,\mathcal{E}\,\frac{1}{(e^{az}-e^{-az})\cos bz}\,\frac{1}{((z^{2m}))}. \end{aligned}\right.$$

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned}
&(-1)^m a^{2m}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi b}{a}}-e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots\ldots\right\}\\
&=b^{2m}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}-\ldots\ldots\right\}\\
&-\frac{1}{2}\pi^{2m+1}\mathcal{E}\frac{1}{(e^{az}-e^{-az})\sin bz}\frac{1}{((z^{2m+1}))}.
\end{aligned}\right.$$

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned}
&(-1)^{m+1} a^{2m}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{2a}}+e^{-\frac{\pi b}{2a}}}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi b}{2a}}+e^{-\frac{3\pi b}{2a}}}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{5\pi b}{2a}}+e^{-\frac{5\pi b}{2a}}}-\ldots\ldots\right\}\\
&=b^{2m}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}+e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}+e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}+e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}-\ldots\ldots\right\}\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}\mathcal{E}\frac{1}{(e^{az}+e^{-az})\cos bz}\frac{1}{((z^{2m+1}))}.
\end{aligned}\right.$$

Il est bon d'observer que les équations (79), (80) deviennent inexactes dans le cas où l'on suppose $m=0$, et doivent alors être remplacées par la formule (66) et la suivante

$$(85)\quad \left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{2}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{3}{e^{\frac{3\pi b}{a}}-e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots\right\}\\
&=\frac{1}{b^2}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{2}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\frac{3}{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}-\ldots\right\}-\frac{1}{4\pi ab}.
\end{aligned}\right.$$

Lorsque, dans les formules (82), (83), (84), on pose successivement $m=0$, $m=1$, $m=2$, etc..., on en tire 1.° la formule (66), 2.° celles qui suivent:

(86)
$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{24}\frac{b}{a}+\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{1}{3}\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{a}}-e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots=\\ \frac{\pi}{24}\frac{a}{b}+\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\frac{1}{3}\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}-\ldots,\end{array}\right.$$

(87)
$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{2a}}+e^{-\frac{\pi b}{2a}}}-\frac{1}{3}\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{2a}}+e^{-\frac{3\pi b}{2a}}}+\frac{1}{5}\frac{1}{e^{\frac{5\pi b}{2a}}+e^{-\frac{5\pi b}{2a}}}-\ldots=\frac{\pi}{8}\\ -\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}+e^{-\frac{\pi a}{2b}}}+\frac{1}{3}\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}+e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}-\frac{1}{5}\frac{1}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}+e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}+\ldots,\end{array}\right.$$

(88)
$$\left\{\begin{array}{l}a\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}+e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{1}{4}\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}+e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{1}{9}\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{a}}+e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots\right\}=\\ 4b\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}-e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\frac{1}{9}\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}-e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\frac{1}{25}\frac{1}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}-e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}-\ldots\right\}\\ +\frac{\pi^2}{24}\frac{a^2-3b^2}{a},\end{array}\right.$$

(89)
$$\left\{\begin{array}{l}-a^2\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{1}{8}\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{1}{27}\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{a}}-e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots\right\}\\ =b^2\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{1}{8}\frac{1}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\frac{1}{27}\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}-\ldots\right\}\\ -\frac{\pi^3}{1440}\frac{7(a^4+b^4)-10a^2b^2}{ab},\end{array}\right.$$

$$(90)\quad\left\{\begin{aligned}
&a^2\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{2a}}+e^{-\frac{\pi b}{2a}}}-\frac{1}{27}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{2a}}+e^{-\frac{3\pi b}{2a}}}+\frac{1}{125}\,\frac{1}{e^{\frac{5\pi b}{2a}}+e^{-\frac{5\pi b}{2a}}}-\ldots\right\}\\
&=b^2\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{2a}}+e^{-\frac{\pi b}{2a}}}-\frac{1}{27}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{2a}}+e^{-\frac{3\pi b}{2b}}}+\frac{1}{125}\,\frac{1}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}+e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}-\ldots\right\}\\
&+\frac{\pi^3}{64}(a^2-b^2),
\end{aligned}\right.$$

etc.....

Lorsque, dans ces dernières formules, on pose $b=0$, on retrouve les équations connues

$$(91)\quad\left\{\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\text{etc...}=\frac{\pi^2}{12},\\
&1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\text{etc...}=\frac{7\pi^4}{720},\\
&\text{etc.....},
\end{aligned}\right.$$

$$(92)\quad\left\{\begin{aligned}
&1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc...}=\frac{\pi}{4},\\
&1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\text{etc...}=\frac{\pi^3}{32},\\
&\text{etc.....}
\end{aligned}\right.$$

Si l'on prend, au contraire $b=a$. les formules (85), (87), (89) donneront

$$(93)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}+\frac{3}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}-\text{etc.......}=\frac{1}{8\pi},\\
&\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{1}{2^3}\,\frac{1}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}+\frac{1}{3^3}\,\frac{1}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}-\ldots=\frac{\pi^3}{720},\\
&\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{1}{2^7}\,\frac{1}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}+\frac{1}{3^7}\,\frac{1}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}-\ldots=\frac{13\pi^7}{907200},\\
&\text{etc.....},
\end{aligned}\right.$$

et

$$(94)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}-\dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{e^{\frac{3\pi}{2}}+e^{-\frac{3\pi}{2}}}+\dfrac{1}{5}\,\dfrac{1}{e^{\frac{5\pi}{2}}+e^{-\frac{5\pi}{2}}}-\ldots=\dfrac{\pi}{16}\,,\\[2ex] \dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}-\dfrac{1}{3^5}\,\dfrac{1}{e^{\frac{3\pi}{2}}+e^{-\frac{3\pi}{2}}}+\dfrac{1}{5^5}\,\dfrac{1}{e^{\frac{5\pi}{2}}+e^{-\frac{5\pi}{2}}}-\ldots=\dfrac{\pi^5}{96}\,,\\[2ex] \text{etc.....}\end{cases}$$

En général, si l'on pose $a=b=1$, on tirera de la formule (83), en y remplaçant m par $2m-1$, et de la formule (84), en y remplaçant m par $2m$,

$$(95)\quad \frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4m-1}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{4m-1}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}-\ldots=\frac{1}{4}\,\pi^{4m-1}\,\mathcal{E}\,\frac{\left(\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{4m-1}\right)\right)}{(e^{z}-e^{-z})\sin z}\,,$$

$$(96)\quad \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{4m+1}}{e^{\frac{3\pi}{2}}-e^{-\frac{3\pi}{2}}}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{4m+1}}{e^{\frac{5\pi}{2}}+e^{-\frac{5\pi}{2}}}-\ldots=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4m+1}\mathcal{E}\,\frac{\left(\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{4m+1}\right)\right)}{(e^{z}+e^{-z})\cos z}\,.$$

Les seconds membres des deux équations qui précèdent peuvent être facilement exprimés par le moyen des nombres de Bernoulli, comme nous le montrerons dans un autre article. Ces équations comprennent d'ailleurs comme cas particuliers les formules (93) et (94). Si l'on y change m en $-m$, elles donneront

$$(97)\quad \frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{2^{4m+1}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}+\frac{3^{4m+1}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}-\ldots\ldots=0\,,$$

$$(98)\quad \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{3^{4m-1}}{e^{\frac{3\pi}{2}}+e^{-\frac{3\pi}{2}}}+\frac{5^{4m-1}}{e^{\frac{5\pi}{2}}+e^{-\frac{5\pi}{2}}}-\ldots=0\,,$$

pourvu que le nombre entier m ne se réduise pas à zéro. Les formules (97) et (98) pourraient encore se déduire des équations (80) et (81).

Si l'on pose dans la formule (68)

$$\frac{\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)}=z f(z^4)\,,\qquad a=b=\pi\,,$$

et dans la formule (69)

$$\frac{\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)} = \frac{1}{z} f(z^4), \qquad a = b = \frac{\pi}{2},$$

$f(z^4)$ désignant une fonction rationnelle de z^4, on tirera de ces formules

$$(99)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}} f(1) - \frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}} f(2^4) + \frac{3}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} f(3^4) - \ldots \\ &= \frac{\pi}{4} \mathcal{E} \frac{z^2}{(e^{\pi z}-e^{-\pi z})\sin \pi z} \left(\left(\frac{f(z^4)}{z}\right)\right), \end{aligned} \right.$$

$$(100)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}} f(1) - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{e^{\frac{3\pi}{2}}+e^{-\frac{3\pi}{2}}} f(3^4) + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{e^{\frac{5\pi}{2}}+e^{-\frac{5\pi}{2}}} f(5^4) - \ldots \\ &= \frac{\pi}{8} \mathcal{E} \frac{1}{\left(e^{\frac{\pi z}{2}}+e^{-\frac{\pi z}{2}}\right)\cos \frac{\pi z}{2}} \left(\left(\frac{f(z^4)}{z}\right)\right). \end{aligned} \right.$$

Prenons, pour fixer les idées,

$$f(z^4) = \frac{1}{z^4+s^4},$$

s désignant une quantité réelle ou une expression imaginaire. Alors les formules (99) et (100) donneront

$$(101)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}} \frac{1}{1+s^4} - \frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}} \frac{1}{2^4+s^4} + \frac{3}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} \frac{1}{3^4+s^4} - \ldots \\ &= \frac{1}{8\pi s^4}\left(1 - \frac{4\pi^2 s^2}{e^{\pi s\sqrt{2}} - 2\cos(\pi s\sqrt{2}) + e^{-\pi s\sqrt{2}}}\right), \end{aligned} \right.$$

$$(102)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{1+s^4} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{e^{\frac{3\pi}{2}}+e^{-\frac{3\pi}{2}}} \frac{1}{3^4+s^4} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{e^{\frac{5\pi}{2}}+e^{-\frac{5\pi}{2}}} \frac{1}{5^4+s^4} - \ldots\ldots \\ &= \frac{\pi}{16 s^4}\left(1 - \frac{4}{e^{\frac{\pi s}{\sqrt{2}}} + 2\cos\left(\frac{\pi s}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{\pi s}{\sqrt{2}}}}\right). \end{aligned} \right.$$

Jusqu'ici nous avons supposé que les constantes, désignées par a et b dans les

formules (67), (68), (69), etc., étaient des quantités positives. Mais il serait facile de prouver, à l'aide du théorème 2, que ces formules peuvent être étendues à des valeurs négatives ou imaginaires des mêmes constantes. Cette observation fournit encore divers résultats dignes de remarque. Si, pour fixer les idées, on pose, dans la formule (68),

$$a = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}, \quad b = \cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{2}, \quad \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{1}{z^{2m+1}},$$

m désignant un nombre entier, et θ un arc réel, on trouvera

$$(103)\qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{z^{2m+1}}\,\frac{1}{\sin\left[\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right)z\right].\sin\left[\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right)z\right]}\right)\right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(104)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{e^{\pi\sin\theta}\sin(\pi\cos\theta - m\theta) + e^{-\pi\sin\theta}\sin(\pi\cos\theta + m\theta)}{e^{2\pi\sin\theta} - \cos(2\pi\cos\theta) + e^{-2\pi\sin\theta}}\\
&-\frac{1}{2^{2m+1}}\,\frac{e^{2\pi\sin\theta}\sin(2\pi\cos\theta - m\theta) + e^{-2\pi\sin\theta}\sin(2\pi\cos\theta + m\theta)}{e^{4\pi\sin\theta} - 2\cos(4\pi\cos\theta) + e^{-4\pi\sin\theta}}\\
&+\frac{1}{3^{2m+1}}\,\frac{e^{3\pi\sin\theta}\sin(3\pi\cos\theta - m\theta) + e^{-3\pi\sin\theta}\sin(3\pi\cos\theta + m\theta)}{e^{6\pi\sin\theta} - 2\cos(6\pi\cos\theta) + e^{-6\pi\sin\theta}}\\
&-\text{etc.}\ldots\\
&= \frac{\pi^{2m+1}}{8}\,\mathcal{E}\,\frac{1}{\sin\left[\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right)z\right].\sin\left[\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right)z\right]}\,\frac{1}{((z^{2m+1}))}.
\end{aligned}\right.$$

La formule (104) subsiste dans le cas même où l'on y remplace m par $-m$. Seulement le second membre s'évanouit alors, dès que le nombre m devient supérieur à l'unité.

Lorsque, dans la formule (104), on prend $\theta = \frac{\pi}{2}$, on est ramené à l'équation (95). Si l'on prenait, au contraire, $\theta = \frac{\pi}{3}$, cette formule donnerait

$$(105)\left\{\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}-\frac{1}{3^{2m+1}}\frac{1}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\ldots\ldots\right\}\cos\frac{m\pi}{3}\\&-\left\{\frac{1}{2^{2m+1}}\frac{1}{e^{\pi\sqrt{3}}-e^{-\pi\sqrt{3}}}-\frac{1}{4^{2m+1}}\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{3}}-e^{-2\pi\sqrt{3}}}+\ldots\right\}\sin\frac{m\pi}{3}\\&=\frac{\pi^{2m+1}}{8}\mathcal{E}\frac{4}{e^{z}-2\cos.z\sqrt{3}+e^{-z}}\frac{1}{((z^{2m+1}))};\end{aligned}\right.$$

puis on en conclurait, 1.° en remplaçant m par -1,

$$(106)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}-\frac{3}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\frac{5}{e^{\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}}-\ldots\ldots\\&=\frac{1}{4\pi}-\left(\frac{1}{e^{\pi\sqrt{3}}-e^{-\pi\sqrt{3}}}-\frac{2}{e^{2\pi\sqrt{3}}-e^{-2\pi\sqrt{3}}}+\frac{3}{e^{3\pi\sqrt{3}}-e^{-3\pi\sqrt{3}}}-\ldots\right)2\sqrt{3};\end{aligned}\right.$$

2.° en remplaçant m par $-m$, et supposant le nombre m supérieur à l'unité,

$$(107)\left\{\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}-\frac{3^{2m-1}}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}\cos\frac{m\pi}{3}\\&+\left\{\frac{2^{2m-1}}{e^{\pi\sqrt{3}}-e^{-\pi\sqrt{3}}}-\frac{4^{2m-1}}{e^{2\pi\sqrt{3}}-e^{-2\pi\sqrt{3}}}+\frac{6^{2m-1}}{e^{3\pi\sqrt{3}}-e^{-3\pi\sqrt{3}}}-\ldots\right\}\sin\frac{m\pi}{3}=0.\end{aligned}\right.$$

Ajoutons que, si l'on remplace m par $3m$, on tirera des formules (105) et (107)

$$(108)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}-\frac{1}{3^{6m+1}}\frac{1}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\text{etc.}\ldots\ldots\\&=\frac{(-1)^{m}\pi^{6m+1}}{2}\mathcal{E}\frac{\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{6m+1}}{e^{z}-2\cos.z\sqrt{3}+e^{-z}},\end{aligned}\right.$$

et

$$(109)\quad \frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}-\frac{3^{6m-1}}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\frac{5^{6m-1}}{e^{\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}}-\text{etc.}=0,$$

On conclura, en particulier, de la formule (108), en prenant $m=0$,

$$(110)\quad \frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{e^{\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}}-\text{etc.}=\frac{\pi}{48}.$$

Parmi les diverses formules que nous venons d'établir, les unes fournissent immédiatement les sommes de certaines séries. Telles sont les formules (93), (94), (95) et suivantes. D'autres servent seulement à transformer les sommes des séries que renferment leurs premiers membres. Or, ces transformations seront souvent fort utiles pour le calcul numérique des sommes dont il s'agit. Ainsi, en particulier, concevons que l'on propose d'évaluer la somme

$$\frac{1}{x-\frac{1}{x}}-\frac{2}{x^2-\frac{1}{x^2}}+\frac{3}{x^3-\frac{1}{x^3}}-\frac{4}{x^4-\frac{1}{x^4}}+\ldots$$

pour une valeur de x très-peu différente de l'unité, par exemple, pour $x=1{,}0001$. Comme, dans la série

$$\frac{1}{1{,}0001-\frac{1}{1{,}0001}},\quad -\frac{2}{(1{,}0001)^2-\left(\frac{1}{1{,}0001}\right)^2},\quad \frac{3}{(1{,}0001)^3-\left(\frac{1}{1{,}0001}\right)^3},\quad \text{etc.}\ldots,$$

le terme dont le rang est indiqué par le nombre 140000, savoir

$$\frac{140000}{(1{,}0001)^{140000}-\left(\frac{1}{1{,}0001}\right)^{140000}},$$

surpasse un dixième, il est clair que, pour obtenir à un dixième près et par un calcul direct la somme demandée, il faudra évaluer environ cent quarante mille termes. Par conséquent le calcul direct de la somme demandée sera impraticable. Mais il est aisé de transformer cette somme à l'aide de la formule (85). En effet, si l'on pose dans cette formule

$$e^{\frac{\pi b}{a}}=x=1{,}0001,$$

et si l'on fait d'ailleurs, pour abréger,

$$X=\frac{\pi^2}{1x}=\frac{9,8696043}{1(1,0001)}=98700,977\ldots,$$

on en conclura

$$(111)\quad \frac{1}{x-\frac{1}{x}}-\frac{2}{x^2-\frac{1}{x^2}}+\frac{3}{x^3-\frac{1}{x^3}}-\ldots=\frac{1}{1x}\left\{\frac{1}{4}-\frac{X}{e^{X}-e^{-X}}+\frac{2X}{e^{2X}-e^{-2X}}-\ldots\right\}$$

Or, dans le second membre de l'équation (111), on pourra négliger sans erreur sensible les termes qui renferment X, et dont le premier, savoir,

$$\frac{-X}{e^{X}-e^{-X}}$$

a une valeur numérique plus petite que l'expression

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{42860}.$$

On aura donc, avec une approximation extrêmement considérable,

$$\frac{1}{x-\frac{1}{x}}-\frac{2}{x^2-\frac{1}{x^2}}+\frac{3}{x^3-\frac{1}{x_3}}-\ldots=\frac{1}{41x}=2500,124997\ldots.$$

Les applications que nous venons de faire de la formule (55) suffisent pour en montrer l'importance. On pourrait, au reste, multiplier indéfiniment ces applications. Parmi les équations remarquables auxquelles on parviendrait de cette manière, nous citerons encore les trois formules

$$(112)\qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{(e^{\pi z}+e^{-\pi z})\cos\pi z}{(e^{\pi z}-e^{-\pi z})\sin\pi z}\; z f(z^4)\right)\right)=0,$$

$$(113)\qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{(\cos 2\pi z-\cos 2\pi\alpha)(e^{2\pi z}+e^{-2\pi z}-2\cos 2\pi\alpha)}\;\frac{f(z^4)}{z}\right)\right)=0,$$

$$(114)\qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{\left(e^{\frac{\pi s}{z}}-e^{-\frac{\pi s}{z}}\right)\sin\pi z}\;\frac{1}{z\left(z^2+\frac{s^2}{z^2}\right)}\right)\right)=0,$$

dans lesquelles α, s désignent des quantités réelles ou des expressions imaginaires, et $f(z^4)$ une fonction rationnelle de z^4, qui peut être quelconque dans la formule (113), mais qui doit s'évanouir avec $\frac{1}{z}$ dans la formule (112). Si l'on développe ces trois formules, on en tirera

$$(115)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}f(1)+\frac{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\,2f(2^4)+\frac{e^{3\pi}+e^{-3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\,3f(3^4)+\ldots\\ &=-\frac{\pi}{4}\,\mathcal{E}\,\frac{z^2(e^{\pi z}+e^{-\pi z})\cos\pi z}{(e^{\pi z}-e^{-\pi z})\sin\pi z}\left(\!\!\left(\frac{f(z^4)}{z}\right)\!\!\right), \end{aligned}\right.$$

$$(116)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha}\,\frac{f(\alpha^4)}{e^{2\pi\alpha}-2\cos 2\pi\alpha+e^{-2\pi\alpha}}+\frac{1}{\alpha+1}\,\frac{f[(\alpha+1)^4]}{e^{2\pi(\alpha+1)}-2\cos 2\pi\alpha+e^{-2\pi(\alpha+1)}}+\ldots\\ &\qquad\qquad+\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{f[(\alpha-1)^4]}{e^{2\pi(\alpha-1)}-2\cos 2\pi\alpha+e^{-2\pi(\alpha-1)}}+\ldots\\ &=\frac{\pi}{2}\sin 2\pi\alpha\,\mathcal{E}\,\frac{1}{(\cos 2\pi z-\cos 2\pi\alpha)(e^{2\pi z}+e^{-2\pi z}-2\cos 2\pi\alpha)}\left(\!\!\left(\frac{f(z^4)}{z}\right)\!\!\right), \end{aligned}\right.$$

$$(117)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{1+s^2}\,\frac{1}{e^{\pi s}-e^{-\pi s}}-\frac{1}{4+\frac{s^2}{4}}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{e^{\frac{\pi s}{2}}-e^{-\frac{\pi s}{2}}}+\frac{1}{9+\frac{s^2}{9}}\,\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{e^{\frac{\pi s}{3}}-e^{-\frac{\pi s}{3}}}-\ldots\\ &=\frac{\pi}{2s}\,\frac{2-\left(e^{\pi\sqrt{2s}}+e^{-\pi\sqrt{2s}}\right)\cos(\pi\sqrt{2s})}{4-4\left(e^{\pi\sqrt{2s}}+e^{-\pi\sqrt{2s}}\right)\cos(\pi\sqrt{2s})+e^{2\pi\sqrt{2s}}+2\cos(2\pi\sqrt{2s})+e^{-2\pi\sqrt{2s}}}. \end{aligned}\right.$$

Lorsqu'on pose $s=0$, la formule (117) reproduit la première des équations (91). Ajoutons que, si l'on prend

$$f(z^4)=\frac{1}{s^4+z^4},$$

les formules (115) et (116) donneront

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,\frac{1}{1+s^4}+\frac{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\,\frac{2}{2^4+s^4}+\frac{e^{3\pi}+e^{-3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\,\frac{3}{3^4+s^4}+\ldots\\ &\qquad=\frac{\pi}{4s^2}\left\{\frac{e^{\pi s\sqrt{2}}+2\cos\pi s\sqrt{2}+e^{-\pi s\sqrt{2}}}{e^{\pi s\sqrt{2}}-2\cos\pi s\sqrt{2}+e^{-\pi s\sqrt{2}}}-\frac{1}{\pi^2 s^2}\right\}, \end{aligned}\right.$$

$$(119)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{e^{2\pi\alpha}-2\cos 2\pi\alpha+e^{-2\pi\alpha}}\,\frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^4+s^4}+\frac{1}{e^{2\pi(\alpha+1)}-2\cos 2\pi\alpha+e^{-2\pi(\alpha+1)}}\,\frac{\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)}{(\alpha+1)^4+s^4}+\dots \\ &\qquad\qquad+\frac{1}{e^{2\pi(\alpha-1)}-2\cos 2\pi\alpha+e^{-2\pi(\alpha-1)}}\,\frac{\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)}{(\alpha-1)^4+s^4}+\dots \\ &=\frac{\pi\sin 2\pi\alpha}{s^4}\,\frac{1}{4(1-\cos 2\pi\alpha)^2} \\ &-\frac{\pi\sin 2\pi\alpha}{s^4}\,\frac{1}{e^{2\pi s\sqrt{2}}+2\cos 2\pi s\sqrt{2}+e^{-2\pi s\sqrt{2}}-4\cos 2\pi\alpha\left(e^{\pi s\sqrt{2}}+e^{-\pi s\sqrt{2}}\right)\cos\pi s\sqrt{2}+4\cos^2 2\pi\alpha} \end{aligned}\right.$$

Si, dans ces dernières formules, on fait évanouir s, on en tirera

$$(120)\qquad \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}+\frac{1}{2^3}\,\frac{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}+\frac{1}{3^3}\,\frac{e^{3\pi}+e^{-3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}+\dots=\frac{7\pi^3}{180},$$

$$(121)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha^5}\,\frac{1}{e^{2\pi\alpha}-2\cos 2\pi\alpha+e^{-2\pi\alpha}}+\frac{1}{(\alpha+1)^5}\,\frac{1}{e^{2\pi(\alpha+1)}-2\cos 2\pi\alpha+e^{-2\pi(\alpha+1)}}+\dots \\ &\qquad\qquad+\frac{1}{(\alpha-1)^5}\,\frac{1}{e^{2\pi(\alpha-1)}-2\cos 2\pi\alpha+e^{-2\pi(\alpha-1)}}+\dots \\ &=\frac{\pi^5}{3}\,\frac{2+\cos 2\pi\alpha}{(1-\cos 2\pi\alpha)^4}\sin 2\pi\alpha. \end{aligned}\right.$$

On peut encore déduire du théorème 1.er deux propositions qui méritent d'être mentionnées, et que nous allons faire connaître.

3.e Théorème. *Si, en attribuant au module* r *de la variable*

$$z=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)$$

des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que le produit

$$(122)\qquad z\,\frac{f(z)-f(-z)}{2}$$

devienne sensiblement égal à une constante déterminée $\mathcal{G}$, *quel que soit d'ailleurs l'angle* p, *ou du moins de manière que la différence*

$$(123)\qquad z\,\frac{f(z)-f(-z)}{2}-\mathcal{G}$$

reste toujours finie ou infiniment petite, et ne cesse d'être infiniment petite, en de-

meurant finie, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières de p; *on aura*

(124) $$\mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{I}.$$

pourvu que, dans le premier membre de l'équation (124), *on réduise le résidu intégral*

$$\mathcal{E}((f(z))),$$

à sa valeur principale.

Démonstration. Soit $z = z_1$ une racine quelconque de l'équation (3). Si l'on pose

$$z = -t, \qquad z_1 = -t_1,$$

on aura

$$\frac{dz}{dt} = -1,$$

et la formule (41) de la page 173 du premier volume donnera

(125) $$\mathcal{E}\frac{(z-z_1)f(z)}{((z-z_1))} = -\mathcal{E}\frac{(t-t_1)f(-t)}{((t-t_1))}.$$

De plus, comme le module de la variable t sera constamment égal au module de la variable z, il est clair que l'équation (125) entraînera la suivante

(126) $${}_{(0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z))) = -{}_{(0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(-t))) = -{}_{(0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(-z))).$$

Si maintenant on fait converger le module R vers la limite ∞, on trouvera, en passant aux limites, et supposant les résidus

$$\mathcal{E}((f(z))), \qquad \mathcal{E}((f(z))), \qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)-f(-z)}{2}\right)\right),$$

réduits à leurs valeurs principales,

(127) $$\mathcal{E}((f(z))) = -\mathcal{E}((f(-z))) = \frac{\mathcal{E}((f(z))) - \mathcal{E}((f(z)))}{2},$$

et par suite

(128) $$\mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)-f(-z)}{2}\right)\right).$$

Comme on aura d'ailleurs, en vertu de l'hypothèse admise et du théorème 1.er,

(129) $$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)-f(-z)}{2}\right)\right) = \mathcal{I},$$

on trouvera définitivement

$$\mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{F}$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Dans le cas particulier où la constante $\mathcal{F}$ devient nulle, on obtient, à la place du 3.e théorême, celui que nous allons énoncer.

4.e Théorème. *Si, en attribuant au module* r *de la variable*

$$z = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$$

des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que le produit (122) *devienne sensiblement égal à zéro, quel que soit d'ailleurs l'angle* p, *ou du moins de manière que ce produit reste toujours fini ou infiniment petit, et ne cesse d'être infiniment petit, en demeurant fini, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières de* p; *on aura*

$$(130) \qquad \mathcal{E}((f(z))) = 0,$$

pourvu que, dans le second membre de l'équation (130), *on réduise le résidu intégral*

$$\mathcal{E}((f(z)))$$

à sa valeur principale.

Corollaire. Lorsque la fonction $f(z)$ est paire, c'est-à-dire, lorsqu'elle ne change pas de valeur, tandis que la variable z change de signe, on a identiquement, quel que soit z,

$$f(z) = f(-z), \qquad z\,\frac{f(z)-f(-z)}{2} = 0.$$

Donc alors la valeur principale du résidu intégral

$$\mathcal{E}((f(z)))$$

s'évanouit.

Exemple. Si l'on prend

$$f(z) = \frac{\pi\cos\pi z}{z\sin\pi z},$$

on obtiendra la formule

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{\pi\cos\pi z}{z\sin\pi z}\right)\right) = 0,$$

qui subsiste effectivement dans le cas où l'on réduit le résidu qu'elle renferme à sa valeur principale, mais peut devenir inexacte dans le cas contraire, ainsi que nous l'avons montré ci-dessus.

SUR LE DÉVELOPPEMENT

DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE

EN FONCTIONS RATIONNELLES.

Soit $f(x)$ une fonction qui devienne infinie pour certaines valeurs de la variable x. On pourra, dans beaucoup de cas, développer cette fonction en une série de fractions rationnelles, par le moyen des formules (59), (60), etc., de la page 112 du premier volume. Mais, pour n'avoir pas d'erreurs à craindre dans l'application des formules de ce genre, il importe de fixer d'une manière précise le sens des notations qu'elles renferment, et les conditions sous lesquelles elles subsistent. On y parviendra sans peine à l'aide des principes exposés dans l'article précédent, et l'on établira ainsi les diverses propositions que nous allons énoncer.

1.er Théorème. *Si, en attribuant au module* r *de la variable*

$$z = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$$

des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que la fonction $f(z)$ *devienne sensiblement égale à une constante déterminée* $\mathcal{G}$, *ou du moins de manière que la différence*

$$f(z) - \mathcal{G} \tag{1}$$

reste toujours finie ou infiniment petite, et ne cesse d'être infiniment petite, en demeurant finie, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières de l'angle p; *on aura*

$$f(x) = \mathcal{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z} + \mathcal{G}. \tag{2}$$

pourvu que, dans le second membre de l'équation (2), *on réduise le résidu intégral*

$$\mathcal{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z}$$

à sa valeur principale.

Démonstration. Pour déduire cette proposition du premier théorème de l'article précédent, il suffit de substituer à la fonction $f(z)$, dans la formule (2) de la page 255, le rapport

$$\frac{f(z)}{z-x},$$

et d'observer que, dans l'hypothèse admise, le produit

$$z\frac{f(z)}{z-x}=\frac{1}{1-\frac{x}{z}}f(z)$$

deviendra généralement égal à $\mathcal{F}$, pour des valeurs infinies de z. Cela posé, la formule citée se trouvera remplacée par la suivante

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{z-x}\right)\right)=f(x)-\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}=\mathcal{F}$$

qui coïncide évidemment avec l'équation (2).

Exemple. Si l'on prend

$$f(x)=\frac{(e^x-e^{-x})^2}{e^{2x}+e^{-2x}},$$

la fonction

$$f(z)=f[r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)]$$

conservera une valeur finie, quand le module r sera un nombre infiniment grand pris dans la série

$$\frac{\pi}{2},\qquad \pi,\qquad \frac{3\pi}{2},\qquad 2\pi,\qquad \frac{5\pi}{2},\qquad 3\pi,\qquad \text{etc...};$$

et cette valeur différera très-peu de l'unité, à moins que l'angle p ne devienne sensiblement égal à $\pm\frac{\pi}{2}$. Par suite on trouvera $\mathcal{F}=1$, et l'équation (2) donnera

$$(3)\qquad \frac{(e^x-e^{-x})^2}{e^{2x}+e^{-2x}}=1+\mathcal{E}\frac{1}{x-z}\frac{(e^z-e^{-z})^2}{((e^{2z}+e^{-2z}))}$$

$$=1+\frac{\sqrt{-1}}{2}\left\{\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}-\frac{1}{x+\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\right)\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}+\left(\frac{1}{x-\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}}-\frac{1}{x+\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}}\right)\operatorname{tang}\frac{3\pi}{4}+\dots\right\}.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\quad \frac{(e^{x}-e^{-x})^2}{e^{2x}+e^{-2x}} = 1 - \frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{x^2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} - \frac{3}{x^2+\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2} + \frac{5}{x^2+\left(\frac{5\pi}{4}\right)^2} - \text{etc.}\right\}.$$

Dans le cas particulier où la constante $\mathcal{f}$ devient nulle, on obtient, à la place du théorême premier, la proposition suivante.

2.° Théorême. *Si, en attribuant au module* r *de la variable*

$$z = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$$

des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que la fonction $f(z)$ *devienne sensiblement égale à zéro, quel que soit d'ailleurs l'angle* p, *ou du moins de manière que cette fonction reste toujours finie ou infiniment petite, et ne cesse d'être infiniment petite, en demeurant finie, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières de* p; *on aura*

$$(5)\quad f(x) = \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z},$$

pourvu que, dans le second membre de l'équation (5), *on réduise le résidu intégral*

$$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}$$

à sa valeur principale.

Exemples. Si l'on prend successivement pour $f(x)$ les quatre fonctions

$$\frac{1}{\sin x},\quad \frac{1}{\cos x},\quad \frac{1}{e^{x}-e^{-x}},\quad \frac{1}{e^{x}+e^{-x}},$$

on tirera de la formule (5)

$$(6)\quad \frac{1}{\sin x} = \mathcal{E}\frac{1}{(x-z)((\sin z))} = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x+\pi}\right) + \left(\frac{1}{x-2\pi} + \frac{1}{x+2\pi}\right) - \ldots,$$

$$(7)\quad \frac{1}{\cos x} = \mathcal{E}\frac{1}{(x-z)((\cos z))} = \left(\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right) - \left(\frac{1}{x+\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{x-\frac{3\pi}{2}}\right) + \ldots\ldots,$$

$$(8)\quad \frac{1}{e^{x}-e^{-x}} = \mathcal{E}\frac{1}{(x-z)((e^{z}-e^{-z}))} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-\pi\sqrt{-1}} + \frac{1}{x+\pi\sqrt{-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2\pi\sqrt{-1}} + \frac{1}{x+2\pi\sqrt{-1}}\right) - \ldots,$$

$$(9)\quad \frac{1}{e^x+e^{-x}} = \mathcal{E}\frac{1}{(x-z)\left(\left((e^z+e^{-z})\right)\right)} = \left(\frac{1}{\pi+2x\sqrt{-1}}+\frac{1}{\pi-x\sqrt{-1}}\right)-\left(\frac{1}{3\pi+2x\sqrt{-1}}+\frac{1}{3\pi-2x\sqrt{-1}}\right)+\ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(10)\qquad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x\left\{\frac{1}{\pi^2-x^2} - \frac{1}{4\pi^2-x^2} + \frac{1}{9\pi^2-x^2} - \ldots\right\},$$

$$(11)\qquad \frac{1}{\cos x} = 4\pi\left\{\frac{1}{\pi^2-4x^2} - \frac{3}{9\pi^2-4x^2} + \frac{5}{25\pi^2-4x^2} - \ldots\ldots\right\},$$

$$(12)\qquad \frac{1}{e^x-e^{-x}} = \frac{1}{2x} - x\left\{\frac{1}{\pi^2+x^2} - \frac{1}{4\pi^2+x^2} + \frac{1}{9\pi^2+x^2} - \ldots\right\},$$

$$(13)\qquad \frac{1}{e^x+e^{-x}} = 2\pi\left\{\frac{1}{\pi^2+4x^2} - \frac{3}{9\pi^2+4x^2} + \frac{5}{25\pi^2+4x^2} - \ldots\ldots\right\}.$$

Ces diverses équations s'accordent avec celles qu'Euler a données, dans l'*Introduction à l'Analyse des infiniment petits*. Si, après avoir développé les deux membres de chacune d'elles suivant les puissances ascendantes de x, on égale entre eux les coefficients des puissances semblables, on retrouvera les formules connues

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{6}(2-1)\frac{\pi^2}{1.2},\\ &1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{7\pi^4}{720}=\frac{1}{30}(2^3-1)\frac{\pi^4}{1.2.3.4},\\ &1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{31\pi^6}{30240}=\frac{1}{42}(2^5-1)\frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6},\\ &\text{etc.....};\end{aligned}\right.$$

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4},\\ &1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots=\frac{\pi^3}{32},\\ &1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\ldots=\frac{5\pi^5}{1536},\\ &\text{etc......}\end{aligned}\right.$$

Les équations (14), dans lesquelles les fonctions $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$,... sont précisément les nombres de Bernouilli, pourraient être immédiatement déduites des formules (71) de la page 349 du premier volume.

3.° THÉORÈME. *Si, en attribuant au module* r *de la variable*

$$z = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$$

des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que les deux fonctions

$$(16) \qquad \frac{f(z)+f(-z)}{2}, \qquad (17) \qquad \frac{f(z)-f(-z)}{2z}$$

deviennent sensiblement égales, la première à une constante déterminée $\mathcal{F}$, *la seconde à une autre constante* $\mathcal{F}_1$, *ou du moins de manière que chacune des différences*

$$(18) \qquad \frac{f(z)+f(-z)}{2} - \mathcal{F}, \qquad (19) \qquad \frac{f(z)-f(-z)}{2z} - \mathcal{F}_1$$

reste toujours finie ou infiniment petite, et ne cesse d'être infiniment petite, en demeurant finie, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières de l'angle p; *on aura*

$$(20) \qquad f(x) = \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z} + \mathcal{F} + x\mathcal{F}_1,$$

pourvu que, dans le second membre de l'équation (20), *on réduise le résidu intégral*

$$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}$$

à sa valeur principale.

Démonstration. Pour déduire cette proposition du théorème 3 de l'article précédent, il suffit de substituer à la fonction $f(z)$, dans la formule (124) de la page 275, le rapport

$$\frac{f(z)}{z-x},$$

et d'observer que, dans l'hypothèse admise, le produit

$$\frac{\dfrac{f(z)}{z-x}-\dfrac{f(-z)}{-z-x}}{2}=\frac{\dfrac{f(z)+f(-z)}{2}+x\,\dfrac{f(z)-f(-z)}{2z}}{1-\dfrac{x^2}{z^2}}$$

se réduira généralement à

$$\mathcal{G}+x\mathcal{G}_1$$

pour des valeurs infinies du module de z. Cela posé, la formule citée se trouvera remplacée par la suivante

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{z-x}\right)\right)=f(x)-\mathcal{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z}=\mathcal{G}+x\mathcal{G}_1,$$

qui coïncide évidemment avec l'équation (20).

Exemples. Si l'on prend

$$f(x)=\cot\frac{1}{x},$$

on trouvera

$$\frac{f(z)+f(-z)}{2}=0,\qquad \frac{f(z)-f(-z)}{2z}=\frac{\cos\frac{1}{z}}{z\sin\frac{1}{z}},$$

et par suite

$$\mathcal{G}=0,\qquad \mathcal{G}_1=1,$$

Cela posé, la formule (20) donnera

$$(21)\qquad \cot\frac{1}{x}=x+\mathcal{E}\,\frac{\left(\left(\cot\frac{1}{z}\right)\right)}{x-z}$$

$$=x-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{\pi}}+\frac{1}{x+\frac{1}{\pi}}\right)-\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2\pi}}+\frac{1}{x+\frac{1}{2\pi}}\right)-\ldots.$$

$$=x-2x\left\{\frac{1}{\pi^2x^2-1}+\frac{1}{4\pi^2x^2-1}+\frac{1}{9\pi^2x^2-1}+\text{etc.}\ldots\ldots\right\}.$$

Soit encore

$$(22)\qquad f(x)=\frac{\sin\dfrac{ba}{x-a}}{\sin\dfrac{ca^2}{x^2-a^2}},$$

a, b, c désignant trois constantes réelles ou imaginaires; et supposons le module du rapport $\frac{b}{c}$ égal ou inférieur à $\frac{1}{2}$, afin que la fonction $f(z)$ conserve une valeur finie quand on attribue à $z-a$ une valeur très-peu différente de zéro. On aura sensiblement, pour de très-grandes valeurs du module de z,

$$\frac{f(z)+f(-z)}{2}=\frac{b}{c}, \qquad \frac{f(z)-f(-z)}{2z}=\frac{b}{ac},$$

et l'on en conclura

$$\mathcal{F}=\frac{b}{c}, \qquad \mathcal{F}_1=\frac{b}{ac}.$$

Cela posé, la formule (20) donnera

$$(23) \qquad \frac{\sin\frac{ba}{x-a}}{\sin\frac{ca^2}{x^2-a^2}}=\frac{b}{c}\left(1+\frac{x}{a}\right)+\mathcal{E}\,\frac{1}{x-z}\,\frac{\sin\frac{ba}{z-a}}{\left(\left(\sin\frac{ca^2}{z^2-a^2}\right)\right)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(24) \qquad \frac{\sin\frac{ba}{x-a}}{\sin\frac{ca^2}{x^2-a^2}}=\frac{b}{c}\left(1+\frac{x}{a}\right)$$

$$-\frac{\cos\frac{\pi b}{c}\sin\frac{b\sqrt{\pi(\pi+c)}}{c}}{\sqrt{\pi(\pi+c)}}\,\frac{cax}{ca^2+\pi(a^2-x^2)}+\frac{\cos\frac{2\pi b}{c}\sin\frac{b\sqrt{2\pi(2\pi+c)}}{c}}{\sqrt{2\pi(2\pi+c)}}\,\frac{cax}{ca^2+2\pi(a^2-x^2)}-\dots$$

$$-\frac{\cos\frac{\pi b}{c}\sin\frac{b\sqrt{\pi(\pi-c)}}{c}}{\sqrt{\pi(\pi-c)}}\,\frac{cax}{ca^2-\pi(a^2-x^2)}+\frac{\cos\frac{2\pi b}{c}\sin\frac{b\sqrt{2\pi(2\pi-c)}}{c}}{\sqrt{2\pi(2\pi-c)}}\,\frac{cax}{ca^2-2\pi(a^2-x^2)}-\dots$$

$$-\frac{\sin\frac{\pi b}{c}\cos\frac{b\sqrt{\pi(\pi+c)}}{c}}{\pi}\,\frac{ca^2}{ca^2+\pi(a^2-x^2)}+\frac{\sin\frac{2\pi b}{c}\cos\frac{b\sqrt{2\pi(2\pi+c)}}{c}}{2\pi}\,\frac{ca^2}{ca^2+2\pi(a^2-x^2)}-\dots$$

$$-\frac{\sin\frac{\pi b}{c}\cos\frac{b\sqrt{\pi(\pi-c)}}{c}}{\pi}\,\frac{ca^2}{ca^2-\pi(a^2-x^2)}+\frac{\sin\frac{2\pi b}{c}\cos\frac{b\sqrt{2\pi(2\pi-c)}}{c}}{2\pi}\,\frac{ca^2}{ca^2-2\pi(a^2-x^2)}-\dots$$

Si, pour fixer les idées, on prend $b=1$, $c=2$, on tirera de l'équation (24)

$$\frac{\sin\frac{a}{x-a}}{\sin\frac{2a^2}{x^2-a^2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right) \tag{25}$$

$$-\frac{\cos\frac{\sqrt{\pi(\pi+2)}}{2}}{\pi}\,\frac{2a^2}{2a^2+\pi(a^2-x^2)}-\frac{\cos\frac{\sqrt{\pi(\pi-2)}}{2}}{\pi}\,\frac{2a^2}{2a^2-\pi(a^2-x^2)}$$

$$-\frac{\sin\frac{\sqrt{2\pi(2\pi+2)}}{2}}{\sqrt{2\pi(2\pi+2)}}\,\frac{2ax}{2a^2+2\pi(a^2-x^2)}-\frac{\sin\frac{\sqrt{2\pi(2\pi-2)}}{2}}{\sqrt{2\pi(2\pi-2)}}\,\frac{2ax}{2a^2-2\pi(a^2-x^2)}$$

$$+\frac{\cos\frac{\sqrt{3\pi(3\pi+2)}}{2}}{3\pi}\,\frac{2a^2}{2a^2+3\pi(a^2-x^2)}+\frac{\cos\frac{\sqrt{3\pi(3\pi-2)}}{2}}{3\pi}\,\frac{2a^2}{2a^2-3\pi(a^2-x^2)}$$

$$+\frac{\sin\frac{\sqrt{4\pi(4\pi+2)}}{2}}{\sqrt{4\pi(4\pi+2)}}\,\frac{2ax}{2a^2+4\pi(a^2-x^2)}+\frac{\sin\frac{\sqrt{4\pi(4\pi-2)}}{2}}{\sqrt{4\pi(4\pi-2)}}\,\frac{2ax}{2a^2-4\pi(a^2-x^2)}$$

$$-\text{etc.....}$$

Si l'on prenait $b=1$, $c=1$, l'équation (24) se réduirait à la formule (30) de la page 139 du premier volume. Mais, comme on aurait alors $\frac{b}{c}=1>\frac{1}{2}$, on ne pourrait plus compter sur l'exactitude de l'équation (24). Nous avons effectivement reconnu par un calcul numérique que la formule (30) de la page 139 du premier volume est inexacte.

Si, après avoir développé les deux membres de l'équation (24) suivant les puissances ascendantes de x, on égale entre eux les coefficients des puissances semblables, on obtiendra de nouvelles formules, savoir,

(26)
$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\sin b}{\sin c}=\dfrac{b}{c}-\dfrac{c\sin\dfrac{\pi b}{c}\cos\dfrac{b\sqrt{\pi(\pi+c)}}{c}}{\pi(\pi+c)}+\dfrac{c\sin\dfrac{2\pi b}{c}\cos\dfrac{b\sqrt{2\pi(2\pi+c)}}{c}}{2\pi(2\pi+c)}+\ldots\\
\qquad+\dfrac{c\sin\dfrac{\pi b}{c}\cos\dfrac{b\sqrt{\pi(\pi-c)}}{c}}{\pi(\pi-c)}-\dfrac{c\sin\dfrac{2\pi b}{c}\cos\dfrac{b\sqrt{2\pi(2\pi-c)}}{c}}{2\pi(2\pi-c)}+\ldots,\\
\dfrac{b\cos b}{\sin c}=\dfrac{b}{c}-\dfrac{c\cos\dfrac{\pi b}{c}\sin\dfrac{b\sqrt{\pi(\pi+c)}}{c}}{(\pi+c)\sqrt{\pi(\pi+c)}}+\dfrac{c\cos\dfrac{2\pi b}{c}\sin\dfrac{b\sqrt{2\pi(2\pi+c)}}{c}}{(2\pi+c)\sqrt{2\pi(2\pi+c)}}+\ldots\\
\qquad+\dfrac{c\cos\dfrac{\pi b}{c}\sin\dfrac{b\sqrt{\pi(\pi-c)}}{c}}{(\pi-c)\sqrt{\pi(\pi-c)}}-\dfrac{c\cos\dfrac{2\pi b}{c}\sin\dfrac{b\sqrt{2\pi(2\pi-c)}}{c}}{(2\pi-c)\sqrt{2\pi(2\pi-c)}}+\ldots,\\
\text{etc.}\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

puis, en posant $b=x$, $c=2x$, on en conclura

(27)
$$\frac{1}{\cos x}=1-4x\left\{\frac{\cos\dfrac{\sqrt{\pi(\pi+2x)}}{2}}{\pi(\pi+2x)}-\frac{\cos\dfrac{\sqrt{3\pi(3\pi+2x)}}{2}}{3\pi(3\pi+2x)}+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$
$$+4x\left\{\frac{\cos\dfrac{\sqrt{\pi(\pi-2x)}}{2}}{\pi(\pi-2x)}-\frac{\cos\dfrac{\sqrt{3\pi(3\pi-2x)}}{2}}{3\pi(3\pi-2x)}+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\right\},$$

(28)
$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin\sqrt{\pi(\pi+x)}}{(\pi+x)\sqrt{\pi(\pi+x)}}+\frac{\sin\sqrt{2\pi(2\pi+x)}}{(2\pi+x)\sqrt{2\pi(2\pi+x)}}-\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\sin\sqrt{\pi(\pi-x)}}{(\pi-x)\sqrt{\pi(\pi-x)}}-\frac{\sin\sqrt{2\pi(2\pi-x)}}{(2\pi-x)\sqrt{2\pi(2\pi-x)}}+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on remplace, dans ces dernières x par πx, elles donneront

(29)
$$\frac{1}{\cos \pi x} = 1$$

$$+\frac{4x}{\pi}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos.\frac{\pi}{2}(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{1-2x} - \dfrac{1}{3^2}\,\dfrac{\cos.\frac{3\pi}{2}\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{2}{3}x} + \dfrac{1}{5^2}\,\dfrac{\cos.\frac{5\pi}{2}\left(1-\frac{2}{5}x\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{2}{5}x} - \ldots \\[2ex] -\dfrac{\cos.\frac{\pi}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{1+2x} + \dfrac{1}{3^2}\,\dfrac{\cos.\frac{3\pi}{2}\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{2}{3}x} - \dfrac{1}{5^2}\,\dfrac{\cos.\frac{5\pi}{2}\left(1+\frac{2}{5}x\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{2}{5}x} + \ldots \end{array}\right\}$$

(30)
$$\frac{1}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi x}$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin.\pi(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{2^2}\,\dfrac{\sin.2\pi\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{3^2}\,\dfrac{\sin.3\pi\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} + \ldots \\[2ex] -\dfrac{\sin.\pi(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{2^2}\,\dfrac{\sin.2\pi\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{3^2}\,\dfrac{\sin.3\pi\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} + \ldots \end{array}\right\}$$

Enfin, si après avoir développé les deux membres de l'équation (29) ou (30) suivant les puissances ascendantes de x, on égale entre eux les coefficients des puissances semblables, on obtiendra des formules qui pourront être réduites aux équations connues

(31)
$$\left\{\begin{array}{l} 1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\ldots=\dfrac{\pi^2}{8}=\dfrac{1}{6}\,\dfrac{2^2-1}{2}\,\dfrac{\pi^2}{1.2}, \\[2ex] 1+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{5^4}+\dfrac{1}{7^4}+\ldots=\dfrac{\pi^4}{96}=\dfrac{1}{30}\,\dfrac{2^4-1}{2}\,\dfrac{\pi^4}{1.2.3.4}, \\[2ex] 1+\dfrac{1}{3^6}+\dfrac{1}{5^6}+\dfrac{1}{7^6}+\ldots=\dfrac{\pi^6}{960}=\dfrac{1}{42}\,\dfrac{2^6-1}{2}\,\dfrac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6}, \\[2ex] \text{etc.} \end{array}\right.$$

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} & 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{6}\,\frac{2\pi^2}{1.2}, \\ & 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{30}\,\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4}, \\ & 1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{945}=\frac{1}{42}\,\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6}, \\ & \text{etc.....} \end{aligned} \right.$$

Il serait facile de vérifier numériquement, dans des cas particuliers, les formules (24), (25), (26), (27) et (28). Ainsi, par exemple, si l'on prend $x=\frac{\pi}{2}$, la formule (27) deviendra identique, et la formule (28) donnera

$$(33)\qquad \frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}=0{,}896\ldots$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{2.1}}{2}}{1.\sqrt{2.1}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{4.3}}{2}}{3.\sqrt{4.3}}+\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{6.5}}{2}}{5.\sqrt{6.5}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{8.7}}{2}}{7.\sqrt{8.7}}+\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{10.9}}{2}}{9.\sqrt{10.9}}-\text{etc.....}$$

$$-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{2.3}}{2}}{3.\sqrt{2.3}}+\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{4.5}}{2}}{5.\sqrt{4.5}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{6.7}}{2}}{7.\sqrt{6.7}}+\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{8.9}}{2}}{9.\sqrt{8.9}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{10.11}}{2}}{11.\sqrt{10.11}}+\text{etc.....}$$

$$=0{,}56263\ldots.+0{,}07176\ldots.+0{,}02672\ldots..+0{,}01384\ldots.+0{,}00845\ldots..+\text{etc.....}$$

$$+0{,}08829\ldots.+0{,}03020\ldots.+0{,}01510\ldots..+0{,}00904\ldots.+0{,}00601\ldots..+\text{etc.....}$$

Afin d'évaluer plus aisément la somme des sinus que renferme l'équation précédente, nous observerons que l'on a sensiblement, pour de très-grandes valeurs du nombre entier n,

$$(-1)^{n-1}\left\{\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{2n(2n-1)}}{2}}{(2n-1)\sqrt{2n(2n-1)}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{2n(2n+1)}}{2}}{(2n+1)\sqrt{2n(2n+1)}}\right\}=\frac{2}{4n^2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4n^2}.$$

On trouvera d'ailleurs

$$\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{2.1}}{1}}{1.\sqrt{2.1}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{2.3}}{2}}{3.\sqrt{2.3}}=0,56263\ldots+0,08829\ldots=\frac{\sqrt{2}}{4}+0,2973\ldots\ldots,$$

$$-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{4.3}}{2}}{3.\sqrt{4.3}}+\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{4.5}}{2}}{5.\sqrt{4.5}}=0,07176\ldots+0,03020\ldots=\frac{\sqrt{2}}{16}+0,0135\ldots\ldots,$$

$$\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{6.5}}{2}}{5.\sqrt{6.5}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{6.7}}{2}}{7.\sqrt{6.7}}=0,02672\ldots+0,01510\ldots=\frac{\sqrt{2}}{36}+0,0025\ldots\ldots,$$

$$-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{8.7}}{2}}{7.\sqrt{8.7}}+\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{8.9}}{2}}{9.\sqrt{8.9}}=0,01384\ldots+0,00904\ldots=\frac{\sqrt{2}}{64}+0,0007\ldots\ldots,$$

$$\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{10.9}}{2}}{9.\sqrt{10.9}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{10.11}}{2}}{11.\sqrt{10.11}}=0,00845\ldots+0,00601\ldots=\frac{\sqrt{2}}{100}+0,0003\ldots\ldots,$$

etc.…,

et par conséquent

$$\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{2.1}}{2}}{1.\sqrt{2.3}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{4.3}}{2}}{3.\sqrt{4.3}}+\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{6.5}}{2}}{5.\sqrt{6.5}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{8.9}}{2}}{7.\sqrt{8.7}}+\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{10.9}}{2}}{9.\sqrt{10.9}}-\text{etc.}\ldots$$

$$-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{2.3}}{2}}{3.\sqrt{2.3}}+\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{4.5}}{2}}{5.\sqrt{4.5}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{6.7}}{2}}{7.\sqrt{6.7}}+\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{8.9}}{2}}{9.\sqrt{8.9}}-\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{10.11}}{2}}{11.\sqrt{10.11}}+\text{etc.}\ldots$$

$$=\frac{\sqrt{\ }}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right)+0,2973..+0,0135..+0,0025..+0,0007..+0,0003..+\ldots$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{\pi^2}{6}+0,315\ldots=0,581\ldots+0,315\ldots=0,896\ldots,$$

ainsi que l'on devait s'y attendre.

Lorsqu'on attribue au rapport $\frac{c}{\pi}$, ou au produit $2x$, dans les formules (24),

(26), (29), ou bien à la variable x dans la formule (30), une valeur réelle supérieure à π, les sinus renfermés dans un ou plusieurs termes de ces formules se changent en exponentielles. Ainsi, par exemple, on tirera de la formule (30), 1.° en supposant la variable x comprise entre les limites $x=1$, $x=2$,

(34) $$\frac{1}{\sin\pi x}=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\pi^2}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{e^{\pi\sqrt{x-1}}-e^{-\pi\sqrt{x-1}}}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{2^2}\dfrac{\sin.2\pi\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{3^2}\dfrac{\sin.3\pi\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}-\ldots\\ -\dfrac{\sin.\pi(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{2^2}\dfrac{\sin.2\pi\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)}-\dfrac{1}{3^2}\dfrac{\sin.3\pi\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x}{3}\right)}+\ldots\end{array}\right\};$$

2.° en supposant la variable x comprise entre les limites $x=2$, $x=3$,

(35) $$\frac{1}{\sin\pi x}=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\pi^2}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{e^{\pi\sqrt{x-1}}-e^{-\pi\sqrt{x-1}}}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{2^2}\dfrac{e^{\pi\sqrt{2(x-2)}}-e^{-\pi\sqrt{2(x-2)}}}{2\left(\frac{x}{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{3^2}\dfrac{\sin.3\pi\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}-\ldots\\ -\dfrac{\sin.\pi(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{2^2}\dfrac{\sin.2\pi\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{3^2}\dfrac{\sin.3\pi\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}+\ldots\end{array}\right\},$$

etc.....

Dans le cas où les constantes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ s'évanouissent, le troisième théorême coïncide avec la proposition que nous allons énoncer.

4.° Théorême. *Si, en attribuant au module* r *de la variable*

$$z=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)$$

des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que les deux fonctions

(16) $\frac{f(z)+f(-z)}{2}$, (17) $\frac{f(z)-f(-z)}{2z}$

deviennent sensiblement nulles, quel que soit d'ailleurs l'angle p, *ou du moins de manière que chacune de ces fonctions reste toujours finie ou infiniment petite, et ne cesse d'être infiniment petite, en demeurant finie, que dans le voisinage de certaines valeurs particulières de* p, *on aura*

$$(36) \qquad f(x) = \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z},$$

pourvu que, dans le second membre de l'équation (36), *on réduise le résidu intégral*

$$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}$$

à sa valeur principale.

Exemple. Supposons

$$f(x) = \frac{1}{e^{ax}-2\cos bx+e^{-ax}},$$

a et b désignant deux constantes réelles ou imaginaires. Les expressions (16) et (17) deviendront infiniment petites, quand on attribuera au module de la variable z des valeurs infiniment grandes, mais sensiblement distinctes de celles que fournit l'équation

$$e^{az} - 2\cos bz + e^{-az} = 0,$$

et l'on tirera de la formule (36)

$$(37)\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{e^{ax}-2\cos bx+e^{-ax}} = \frac{1}{(a^2+b^2)x^2} \\ &-\frac{2\pi}{\sin\frac{2\pi b}{b-a\sqrt{-1}}}\,\frac{1}{2^2\pi^2-(b-a\sqrt{-1})^2x^2} - \frac{4\pi}{\sin\frac{4\pi b}{b-a\sqrt{-1}}}\,\frac{1}{4^2\pi^2-(b-a\sqrt{-1})^2x^2} \\ &-\frac{6\pi}{\sin\frac{6\pi b}{b-a\sqrt{-1}}}\,\frac{1}{6^2\pi^2-(b-a\sqrt{-1})^2x^2} - \ldots\ldots \\ &-\frac{2\pi}{\sin\frac{2\pi b}{b+a\sqrt{-1}}}\,\frac{1}{2^2\pi^2-(b+a\sqrt{-1})^2x^2} - \frac{4\pi}{\sin\frac{4\pi b}{b+a\sqrt{-1}}}\,\frac{1}{4^2\pi^2-(b+a\sqrt{-1})^2x^2} \\ &-\frac{6\pi}{\sin\frac{6\pi b}{b+a\sqrt{-1}}}\,\frac{1}{6^2\pi^2-(b+a\sqrt{-1})^2x^2} - \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si, pour plus de simplicité, on prend $b=a$, on trouvera

(38)
$$\frac{1}{e^{ax}-2\cos ax+e^{-ax}}=\frac{1}{2a^2x^2}$$
$$-\pi a^2x^2\left\{\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,\frac{1}{\pi^4+\frac{1}{4}a^4x^4}-\frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\,\frac{1}{(2\pi)^4+\frac{1}{4}a^4x^4}+\frac{3}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\,\frac{1}{(3\pi)^4+\frac{1}{4}a^4x^4}-\dots\right\}.$$

Si l'on prenait, au contraire $b=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, on en conclurait $b=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$,

(39)
$$\frac{1}{e^{ax}-2\cos\frac{ax}{\sqrt{3}}+e^{-ax}}=\frac{3}{4a^2x^2}$$
$$-2\pi\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}\,\frac{\pi^2+\frac{1}{3}a^2x^2}{\pi^4+\frac{1}{3}\pi^2a^2x^2+\frac{1}{9}a^4x^4}-\frac{3}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}\,\frac{(3\pi)^2+\frac{1}{3}a^2x^2}{(3\pi)^4+\frac{1}{3}(3\pi)^2a^2x^2+\frac{1}{9}a^4x^4}+\dots\right\}$$
$$-\frac{2\pi a^2x^2}{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{e^{\pi\sqrt{3}}-e^{-\pi\sqrt{3}}}\,\frac{1}{(2\pi)^4+\frac{1}{3}(2\pi)^2a^2x^2+\frac{1}{9}a^4x^4}-\frac{2}{e^{2\pi\sqrt{3}}-e^{-2\pi\sqrt{3}}}\,\frac{1}{(4\pi)^4+\frac{1}{3}(4\pi)^2a^2x^2+\frac{1}{9}a^4x^4}+\dots\right\}$$

L'équation (38) s'accorde avec la formule (101) de la page 288. De plus, si, après avoir développé suivant les puissances ascendantes de x les deux membres de l'équation (38) ou (39), on compare entre eux les coefficients des puissances semblables, on sera immédiatement ramené aux formules (93), (95), (105), (108) et (110) de l'article précédent.

Il est bon d'observer que l'expression (16) est toujours nulle, dans le cas où $f(x)$ désigne une fonction impaire de la variable x, c'est-à-dire une fonction qui change de signe, quand on y remplace x par $-x$. Alors, la formule (36) subsistera, si, pour des valeurs du module de z infiniment grandes et convenablement choisies, l'expression (17) reste toujours finie ou infiniment petite, ou finie seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières de l'angle p.

Exemples. Si l'on prend successivement pour $f(x)$ les deux fonctions impaires,

$$\cot x,\qquad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

on tirera de la formule (36)

(40)
$$\cot x=\mathcal{E}\,\frac{((\cot z))}{x-z},$$

$$(41)\qquad \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\mathcal{E}\,\frac{\left(\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}\right)\right)}{x-z}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(42)\qquad \cot x=\frac{1}{x}-2x\left\{\frac{1}{\pi^{2}-x^{2}}+\frac{1}{4\pi^{2}-x^{2}}+\frac{1}{9\pi^{2}-x^{2}}+\ldots\right\},$$

$$(43)\qquad \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\frac{1}{x}+2x\left\{\frac{1}{\pi^{2}+x^{2}}+\frac{1}{4\pi^{2}+x^{2}}+\frac{1}{9\pi^{2}+x^{2}}+\ldots\right\}.$$

Ces dernières équations étaient déjà connues, ainsi que plusieurs autres du même genre que l'on pourrait aisément déduire de la formule (36).

Supposons encore que l'on prenne successivement, pour $f(x)$, les deux fonctions impaires

$$\frac{1}{(e^{a^{2}x^{2}}-e^{-a^{2}x^{2}})\sin bx},\qquad \frac{1}{(e^{a^{2}x^{2}}+e^{-a^{2}x^{2}})\sin bx},$$

a, b désignant deux constantes réelles et positives. L'expression (17) deviendra nulle à très-peu près, quand on attribuera au module de z des valeurs très-considérables, mais sensiblement distinctes de celles qui vérifient l'équation

$$\frac{1}{f(z)}=0,$$

et l'on tirera de la formule (36)

$$(44)\qquad \frac{1}{(e^{a^{2}x^{2}}-e^{-a^{2}x^{2}})\sin bx}=\mathcal{E}\,\frac{1}{x-z}\,\frac{1}{(((e^{a^{2}z^{2}}-e^{-a^{2}z^{2}})\sin bz))},$$

$$(45)\qquad \frac{1}{(e^{a^{2}x^{2}}+e^{-a^{2}x^{2}})\sin bx}=\mathcal{E}\,\frac{1}{x-z}\,\frac{1}{(((e^{a^{2}z^{2}}+e^{-a^{2}z^{2}})\sin bz))},$$

ou, ce qui revient au même,

(46)
$$\frac{1}{(e^{a^2x^2}-e^{-a^2x^2})\sin bx}=\frac{b}{12a^2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2a^2b}\frac{1}{x^3}$$

$$+2bx\left\{\frac{1}{e^{\left(\frac{\pi a}{b}\right)^2}-e^{-\left(\frac{\pi a}{b}\right)^2}}\frac{1}{\pi^2-b^2x^2}-\frac{1}{e^{\left(\frac{2\pi a}{b}\right)^2}-e^{-\left(\frac{2\pi a}{b}\right)^2}}\frac{1}{4\pi^2-b^2x^2}+\ldots\ldots\right\}$$

$$-2ax\left(\begin{array}{l}\dfrac{(\pi+a^2x^2)\left\{e^{\frac{b\sqrt{2\pi}}{2a}}+e^{-\frac{b\sqrt{2\pi}}{2a}}\right\}\sin\dfrac{b\sqrt{2\pi}}{2a}+(\pi-a^2x^2)\left\{e^{\frac{b\sqrt{2\pi}}{2a}}-e^{-\frac{b\sqrt{2\pi}}{2a}}\right\}\cos\dfrac{b\sqrt{2\pi}}{2a}}{\left\{e^{\frac{b\sqrt{2\pi}}{a}}-2\cos\dfrac{b\sqrt{2\pi}}{a}+e^{-\frac{b\sqrt{2\pi}}{a}}\right\}(\pi^2+a^4x^4)\sqrt{2\pi}}\\[2ex]-\dfrac{(2\pi+a^2x^2)\left\{e^{\frac{b\sqrt{4\pi}}{2a}}+e^{-\frac{b\sqrt{4\pi}}{2a}}\right\}\sin\dfrac{b\sqrt{4\pi}}{2a}+(2\pi-a^2x^2)\left\{e^{\frac{b\sqrt{4\pi}}{2a}}-e^{-\frac{b\sqrt{4\pi}}{2a}}\right\}\cos\dfrac{b\sqrt{4\pi}}{2a}}{\left\{e^{\frac{b\sqrt{4\pi}}{a}}-2\cos\dfrac{b\sqrt{4\pi}}{a}+e^{-\frac{b\sqrt{4\pi}}{a}}\right\}(4\pi^2+a^4x^4)\sqrt{4\pi}}\\[2ex]+\text{etc.....}\end{array}\right)$$

(47)
$$\frac{1}{(e^{a^2x^2}+e^{-a^2x^2})\sin bx}=\frac{1}{2bx}$$

$$+2bx\left\{\frac{1}{e^{\left(\frac{\pi a}{b}\right)^2}+e^{-\left(\frac{\pi a}{b}\right)^2}}\frac{1}{\pi^2-b^2x^2}-\frac{1}{e^{\left(\frac{2\pi a}{b}\right)^2}+e^{-\left(\frac{2\pi a}{b}\right)^2}}\frac{1}{4\pi^2-b^2x^2}+\ldots\ldots\right\}$$

$$-4ax\left(\begin{array}{l}\dfrac{(\pi+2a^2x^2)\left\{e^{\frac{b\sqrt{\pi}}{2a}}-e^{-\frac{b\sqrt{\pi}}{2a}}\right\}\cos\dfrac{b\sqrt{\pi}}{2a}-(\pi-2a^2x^2)\left\{e^{\frac{b\sqrt{\pi}}{2a}}+e^{-\frac{b\sqrt{\pi}}{2a}}\right\}\sin\dfrac{b\sqrt{\pi}}{2a}}{\left\{e^{\frac{b\sqrt{\pi}}{a}}-2\cos\dfrac{b\sqrt{\pi}}{a}+e^{-\frac{b\sqrt{\pi}}{a}}\right\}(\pi^2+4a^4x^4)\sqrt{\pi}}\\[2ex]-\dfrac{(3\pi+2a^2x^2)\left\{e^{\frac{b\sqrt{3\pi}}{2a}}-e^{-\frac{b\sqrt{3\pi}}{2a}}\right\}\cos\dfrac{b\sqrt{3\pi}}{2a}-(3\pi-2a^2x^2)\left\{e^{\frac{b\sqrt{3\pi}}{2a}}-e^{-\frac{b\sqrt{3\pi}}{2a}}\right\}\sin\dfrac{b\sqrt{3\pi}}{2a}}{\left\{e^{\frac{b\sqrt{3\pi}}{a}}-2\cos\dfrac{b\sqrt{3\pi}}{a}+e^{-\frac{b\sqrt{3\pi}}{a}}\right\}(9\pi^2+4a^4x^4)\sqrt{3\pi}}\\[2ex]+\text{etc.....}\end{array}\right)$$

Si, pour fixer les idées, on prend $a = 1$, $b = \sqrt{\pi}$, les formules (46) et (47) donneront

(48)
$$\frac{1}{(e^{x^2}-e^{-x^2})\sin.\pi^{\frac{1}{2}}x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}\left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi x^2}\right\}$$

$$+\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,\frac{1}{\pi-x^2} - \frac{1}{e^{4\pi}-e^{-4\pi}}\,\frac{1}{4\pi-x^2} + \frac{1}{e^{9\pi}-e^{-9\pi}}\,\frac{1}{9\pi-x^2} - \ldots\ldots\ldots\right\}$$

$$-\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(\pi+x^2)\left(e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}\right)\sin\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}+(\pi-x^2)\left(e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}-e^{-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}\right)\cos\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}}{(e^{\pi\sqrt{2}}-2\cos.\pi\sqrt{2}+e^{-\pi\sqrt{2}})(\pi^2+x^4)\sqrt{2}} \\ -\dfrac{(2\pi+x^2)\left(e^{\frac{\pi\sqrt{4}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{4}}{2}}\right)\sin\dfrac{\pi\sqrt{4}}{2}+(2\pi-x^2)\left(e^{\frac{\pi\sqrt{4}}{2}}-e^{-\frac{\pi\sqrt{4}}{2}}\right)\cos\dfrac{\pi\sqrt{4}}{2}}{(e^{\pi\sqrt{4}}-2\cos.\pi\sqrt{4}+e^{-\pi\sqrt{4}})(4\pi^2+x^4)\sqrt{4}} \\ +\text{etc.}\ldots\ldots, \end{array}\right\}$$

et

(49)
$$\frac{1}{(e^{x^2}+e^{-x^2})\sin.\pi^{\frac{1}{2}}x} = \frac{1}{2x\sqrt{\pi}}$$

$$+\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\,\frac{1}{\pi-x^2} - \frac{1}{e^{4\pi}+e^{-4\pi}}\,\frac{1}{4\pi-x^2} + \frac{1}{e^{9\pi}+e^{-9\pi}}\,\frac{1}{9\pi-x^2} - \ldots\ldots\ldots\right\}$$

$$-\frac{4x}{\sqrt{\pi}}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(\pi+2x^2)\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\cos\dfrac{\pi}{2}-(\pi-2x^2)\left(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\sin\dfrac{\pi}{2}}{(e^{\pi}-2\cos\pi+e^{-\pi})(\pi^2+4x^4)\sqrt{1}} \\ -\dfrac{(3\pi+2x^2)\left(e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}-e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\right)\cos\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}-(3\pi-2x^2)\left(e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}-e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\right)\sin\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}}{(e^{\pi\sqrt{3}}-3\cos.\pi\sqrt{3}+e^{-\pi\sqrt{3}})(9\pi^2+4x^4)\sqrt{3}} \\ +\text{etc.}\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Si, dans chacune des formules qui précèdent, on développait les deux membres suivant les puissances ascendantes de x, la comparaison des coefficients des puissances semblables fournirait une infinité d'équations nouvelles. Ainsi, par exemple, on tirerait des formules (46) et (47), en supposant $b = \sqrt{\pi}$,

(50) $$\frac{1}{e^{\pi a^2}-e^{-\pi a^2}}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{e^{4\pi a^2}-e^{-4\pi a^2}}+\frac{1}{9}\,\frac{1}{e^{9\pi a^2}-e^{-9\pi a^2}}-\text{etc.....}$$

$$=\frac{7\pi^3}{1440.a^2}-\frac{\pi a^2}{24}+\frac{a}{1.\sqrt{2}}\;\frac{\left(e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{2a}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{2}}{2a}}\right)\sin\frac{\pi\sqrt{2}}{2a}+\left(e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{2a}}-e^{-\frac{\pi\sqrt{2}}{2a}}\right)\cos\frac{\pi\sqrt{2}}{2a}}{e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{a}}-2\cos\frac{\pi\sqrt{2}}{u}+e^{-\frac{\pi\sqrt{2}}{a}}}$$

$$-\frac{a}{2.\sqrt{4}}\;\frac{\left(e^{\frac{\pi\sqrt{4}}{2a}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{4}}{2a}}\right)\sin\frac{\pi\sqrt{4}}{2a}+\left(e^{\frac{\pi\sqrt{4}}{2a}}-e^{-\frac{\pi\sqrt{4}}{2a}}\right)\cos\frac{\pi\sqrt{4}}{2a}}{e^{\frac{\pi\sqrt{4}}{a}}-2\cos\frac{\pi\sqrt{4}}{a}+e^{-\frac{\pi\sqrt{4}}{a}}}$$

$$+\text{etc.....},$$

et

(51) $$\frac{1}{e^{\pi a^2}+e^{-\pi a^2}}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{e^{4\pi a^2}+e^{-4\pi a^2}}+\frac{1}{9}\,\frac{1}{e^{9\pi a^2}-e^{-9\pi a^2}}-\text{etc.....}$$

$$=\frac{\pi^2}{24}+\frac{2a}{1.\sqrt{1}}\;\frac{\left(e^{\frac{\pi\sqrt{1}}{2a}}-e^{-\frac{\pi\sqrt{1}}{2a}}\right)\cos\frac{\pi\sqrt{1}}{2a}-\left(e^{\frac{\pi\sqrt{1}}{2a}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{1}}{2a}}\right)\sin\frac{\pi\sqrt{1}}{2a}}{e^{\frac{\pi\sqrt{1}}{a}}-2\cos\frac{\pi\sqrt{1}}{2a}+e^{-\frac{\pi\sqrt{1}}{a}}}$$

$$-\frac{2a}{3.\sqrt{3}}\;\frac{\left(e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2a}}-e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2a}}\right)\cos\frac{\pi\sqrt{3}}{2a}-\left(e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2a}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2a}}\right)\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2a}}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{a}}-2\cos\frac{\pi\sqrt{3}}{a}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{a}}},$$

$$+\text{etc.....}$$

Il est important de se rappeler qu'on n'a le droit de compter sur l'exactitude des formules obtenues dans cet article et dans l'article précédent qu'autant que l'on suppose les résidus qu'elles comprennent réduits à leurs valeurs principales. Ainsi, en particulier, on doit, dans la formule (40), considérer le résidu

(52) $$\mathcal{E}\frac{((\cot z))}{x-z}$$

comme désignant la limite vers laquelle converge l'expression

$$(53) \qquad \mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ (-\pi)}^{(R)\ (\pi)} \frac{((\cot z))}{x-z}.$$

tandis que le module R devient infiniment grand. De plus, comme toutes les racines de l'équation

$$(54) \qquad \frac{1}{\cot z} = 0$$

sont réelles, il est clair que la limite dont il s'agit coïncide avec celle vers laquelle converge le résidu

$$(55) \qquad \mathop{\mathcal{E}}_{-N\ -\infty}^{+N\ \infty} \frac{((\cot z))}{x-z},$$

tandis que le nombre N croît de plus en plus. Si à ce dernier résidu on substituait le suivant

$$(56) \qquad \mathop{\mathcal{E}}_{-M\ -\infty}^{+N\ \infty} \frac{((\cot z))}{x-z},$$

alors, en faisant croître indéfiniment les nombres M et N, on obtiendrait encore pour limite l'une des valeurs qui conviennent au résidu intégral. Mais cette valeur pourrait différer de $\cot x$. Concevons, pour fixer les idées, que, n désignant un nombre entier aussi grand que l'on voudra, on suppose M compris entre les deux nombres $n\pi$, $(n+1)\pi$, et N entre les deux nombres $2n\pi$, $(2n+1)\pi$. On trouvera, dans cette hypothèse,

$$(57) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathop{\mathcal{E}}_{-M\ -\infty}^{N\ \infty} \frac{((\cot z))}{x-z} = \frac{1}{x} \\ & + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x+2\pi} + \dots + \frac{1}{x+n\pi} \\ & + \frac{}{x-\pi} + \frac{}{x-2\pi} + \dots + \frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x-(n+1)\pi} + \dots + \frac{1}{x-2n\pi}, \end{aligned} \right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(58) \qquad \mathop{\mathcal{E}}_{-M\ -\infty}^{+N\ \infty} \frac{((\cot z))}{x-z} = \frac{1}{x} - 2x \left\{ \frac{1}{\pi^2-x^2} + \frac{1}{4\pi^2-x^2} + \dots + \frac{1}{n^2\pi^2-x^2} \right\}$$
$$- \left\{ \frac{1}{(n+1)\pi-x} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{2n\pi-x} \right\}.$$

Or, si l'on observe que la somme

$$\frac{1}{(n+1)\pi-x}+\frac{1}{(n+2)\pi-x}+\ldots+\frac{1}{2n\pi-x}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{n+1-\frac{x}{\pi}}+\frac{1}{n+2-\frac{x}{\pi}}+\ldots+\frac{1}{2n-\frac{x}{\pi}}\right\},$$

toujours comprise entre les deux quantités

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{l}\left\{1+\frac{n}{n-\frac{x}{\pi}}\right\}, \qquad \frac{1}{\pi}\mathrm{l}\left\{1+\frac{n}{n+1-\frac{x}{\pi}}\right\},$$

doit se réduire avec elles, pour une valeur infinie de n, au rapport

$$\frac{\mathrm{l}(2)}{\pi},$$

on reconnaîtra immédiatement que le second membre de l'équation (58) a pour limite, non plus la fonction $\cot x$, mais la différence

(59) $$\cot x-\frac{\mathrm{l}(2)}{\pi}.$$

USAGE DU CALCUL DES RÉSIDUS

POUR LA SOMMATION OU LA TRANSFORMATION DES SÉRIES

DONT LE TERME GÉNÉRAL EST UNE FONCTION PAIRE DU NOMBRE QUI REPRÉSENTE LE RANG DE CE TERME.

Dans le bel ouvrage qui a pour titre *Introduction à l'Analyse des infiniment petits*, et dans le tome II de ses *Opuscules analytiques*, Euler est parvenu, en développant certaines fonctions exponentielles ou circulaires, à des séries dignes de remarque, desquelles on déduit aisément d'autres séries du même genre que j'ai considérées dans un Mémoire présenté à l'Institut en 1814 [voyez le tome I.er des Mémoires des Savants étrangers, pages 763 et 783], et qui depuis ont été reproduites dans divers ouvrages. Or il importe d'observer qu'à l'aide du calcul des résidus on peut, non-seulement parvenir, plus directement qu'on ne l'avait encore fait, à la sommation des séries ci-dessus mentionnées, mais encore sommer ou transformer un grand nombre d'autres séries. C'est ce que je vais montrer dans cet article.

Lorsque, dans une série, le terme général est exprimé à l'aide du nombre n, qui indique son rang, cette série est nécessairement de la forme

$$f(1), \quad f(2), \quad f(3), \ldots f(n), \quad \text{etc.}\ldots, \tag{1}$$

$f(z)$ désignant une fonction donnée de z. De plus, si la fonction $f(z)$ est paire, c'est-à-dire, si elle conserve la même valeur, tandis que la variable z change de signe, on aura identiquement

$$f(z) = f(-z), \tag{2}$$

et par conséquent la série (1) pourra être présentée sous la forme

$$\frac{f(1)+f(-1)}{2}, \quad \frac{f(2)+f(-2)}{2}, \quad \frac{f(3)+f(-3)}{2}, \quad \text{etc.}\ldots \tag{3}$$

Enfin, comme les quantités

$$(4)\qquad \begin{cases} 0, & 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots \\ & -1, \; -2, \; -3, \; -4, \ldots \end{cases}$$

comprennent toutes les racines de l'équation

$$(5)\qquad \sin\pi z = 0,$$

et que la fonction $\sin\pi z$ a pour dérivée $\pi\cos\pi z$, on trouvera, en admettant que la série (3) soit convergente,

$$(6)\qquad \left\{ \begin{array}{c} f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\ldots \\ +f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots \end{array} \right\} = \mathcal{E}\, f(z)\,\frac{\pi\cos\pi z}{((\sin\pi z))};$$

ou du moins

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{c} f(1)+f(2)+f(3)+\ldots\ldots\ldots \\ +f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} = \mathcal{E}\, \frac{f(z)}{z}\left(\left(\frac{\pi z\cos\pi z}{\sin\pi z}\right)\right).$$

Les deux équations qui précèdent peuvent servir l'une et l'autre à la sommation ou à la transformation de la série (1) ou (3). Mais la première suppose que $f(z)$ conserve une valeur finie pour $z=0$.

Si l'on désignait par $f(z)$, non plus une fonction paire, mais une fonction quelconque de z, le binome

$$(8)\qquad f(z)+f(-z)$$

serait une fonction paire de la même variable, et la somme de la série qui aurait pour terme général

$$(9)\qquad f(n)+f(-n),$$

ou bien

$$(10)\qquad \frac{f(n)+f(-n)}{2}$$

se déduirait encore de la formule (6) ou (7).

Supposons maintenant la fonction $f(z)$ telle que, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module r de la variable z, l'un des produits

(11) $$z f(z),$$ (12). $$z\frac{f(z)+f(-z)}{2}$$

reste toujours fini ou infiniment petit, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{z}{r}$. Concevons d'ailleurs que, pour satisfaire à ces conditions, il suffise d'attribuer au module r des valeurs infiniment grandes, qui diffèrent sensiblement des termes d'une certaine série. On pourra remplir encore ces conditions, après avoir multiplié le produit (11) ou (12) par le facteur

(13) $$\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z};$$

et le théorème 2 de la page 258, ou le théorème 4 de la page 276 donnera

(14) $$\mathcal{E}\left(\left(f(z)\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}\right)\right)=0.$$

En combinant l'équation (14) avec les formules (6) et (7), on obtiendra les suivantes

(15) $$\left\{\begin{array}{c} f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\ldots \\ +f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots \end{array}\right\}=-\mathcal{E}\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}((f(z))),$$

(16) $$\left\{\begin{array}{c} f(1)+f(2)+f(3)+\ldots\ldots\ldots \\ +f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}=-\mathcal{E}\frac{\pi z\cos\pi z}{\sin\pi z}\left(\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right),$$

dont la première suppose que $f(z)$ conserve une valeur finie pour $z=0$. Observons enfin que, dans les formules (15) et (16), on peut à l'expression

(17) $$\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}$$

substituer l'expression équivalente

(18) $$\frac{d\,\mathrm{l}\sin\pi z}{dz}.$$

Il s'agit à présent de constater l'utilité de ces formules pour la sommation ou la transformation des séries.

Concevons d'abord que la fonction $f(z)$ se réduise à une fraction rationnelle. Si, dans cette fraction, le degré du dénominateur surpasse le degré du numérateur, le produit (11), ou du moins le produit (12) remplira les conditions prescrites, et par conséquent la somme de la série (1) ou (3) sera déterminée par l'une des formules (15), (16). Ainsi, par exemple, si l'on prend

$$(19) \qquad f(z)=\frac{1}{z^{2m}},$$

m désignant un nombre entier quelconque, la formule (16) donnera

$$(20) \qquad 1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\ldots=-\frac{1}{2}\mathcal{E}\frac{d\,\mathrm{l}\sin\pi z}{dz}\frac{1}{((z^{2m}))};$$

puis on en conclura, en posant $\pi z=t$,

$$(21) \qquad 1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\ldots=-\frac{1}{2}\pi^{2m}\mathcal{E}\frac{d\,\mathrm{l}\sin t}{dt}\frac{1}{((t^{2m}))}.$$

Comme on aura d'ailleurs

$$(22) \qquad \mathrm{l}\sin t=\mathrm{l}(t)+\mathrm{l}\left(1-\frac{t^2}{1.2.3}+\frac{t^4}{1.2.3.4.5}-\ldots\right)=$$

$$\mathrm{l}(t)-\left(\frac{t^2}{1.2.3}-\frac{t^4}{1.2.3.4.5}+..\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{1.2.3}-\frac{t^4}{1.2.3.4.5}+..\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{t^2}{1.2.3}-\frac{t^4}{1.2.3.4.5}+..\right)^3-..$$

on tirera de la formule (21)

$$(23) \qquad 1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\ldots=$$

$$m\pi^{2m}\mathrm{S}\left\{\frac{1}{p+q+r+..}\frac{1.2.3..(p+q+r+..)}{(1.2.3..p)(1.2.3..q)(1.2.3..r)..}\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^p\left(\frac{1}{1.2.3.4.5}\right)^q\left(\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\right)^r..\right\}$$

le signe S indiquant une somme de termes semblables à celui qui est renfermé entre les parenthèses, et devant s'étendre à tous les systèmes de valeurs entières nulles ou positives de $p, q, r, \ldots$ qui vérifient la condition

$$(24) \qquad p+2q+3r+\ldots=m.$$

De même, si l'on prend

$$f(z) = \frac{1}{(4z+1)^{2m}},$$

la formule (15) donnera

$$(25) \qquad 1 + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{7^{2m}} + \ldots = -\mathcal{E} \frac{d\,\mathrm{l} \sin \pi z}{dz} \frac{1}{((\,(4z+1)^{2m}\,))},$$

puis, on en conclura, en posant $4z + 1 = \frac{2}{\pi} t$,

$$(26) \qquad 1 + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{7^{2m}} + \ldots = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \mathcal{E} \frac{d\,\mathrm{l}(1 - \sin t)}{dt} \frac{1}{((\,t^{2m}\,))}.$$

Comme on aura d'ailleurs

$$(27) \qquad \mathrm{l}(1 - \sin t) = \mathrm{l}\left(1 - \frac{t}{1} + \frac{t^3}{1.2.3} - \frac{t^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)$$

$$= -\left(\frac{t}{1} - \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1} - \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{t}{1} - \frac{t^3}{1.2.3} + \ldots\right)^3 - \ldots,$$

on tirera de la formule (26)

$$(28) \qquad 1 + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{7^{2m}} + \ldots =$$

$$m\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \mathrm{S}\left\{\frac{1}{p+q+r+\ldots} \frac{1.2.3\ldots(p+q+r+\ldots)}{(1.2.3\ldots p)(1.2.3\ldots q)(1.2.3\ldots r)\ldots} \left(\frac{1}{1}\right)^p \left(-\frac{1}{1.2.3}\right)^q \left(\frac{1}{1.2.3.4.5}\right)^r \ldots\right\}$$

le signe S indiquant une somme de termes semblables à celui qui est renfermé entre les accolades, et devant s'étendre à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de p, q, r,... qui vérifient la condition

$$(29) \qquad p + 3q + 5r + \ldots = 2m.$$

De plus, comme on a évidemment

$$(30) \quad 1 + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{7^{2m}} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \ldots\right),$$

on peut affirmer que les sommes indiquées par le signe S dans les équations (23) et (28) sont entre elles dans le rapport de $2^{2m} - 1$ à l'unité. C'est ce que l'on vérifiera aisément dans les cas particuliers. On trouvera, par exemple,

$$(31)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} = (2^2-1)\frac{1}{1.2.3}, \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{1.2.3} = (2^4-1)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^2 - \frac{1}{1.2.3.4.5}\right\}, \\ \text{etc....} \end{cases}$$

Si l'on prenait pour valeur de $f(z)$, non plus le rapport $\frac{1}{(4z+1)^{2m}}$, mais le rapport

$$\frac{1}{(4z+1)^{2m+1}},$$

alors, à la place de l'équation (28), on obtiendrait la formule

$$(32)\quad 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}} + \ldots =$$

$$\frac{2m+1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \mathrm{S}\left\{\frac{1}{p+q+r+\ldots}\,\frac{1.2.3\ldots(p+q+r+\ldots)}{(1.2.3\ldots p)(1.2.3\ldots q)(1.2.3\ldots r)\ldots}\left(\frac{1}{1}\right)^p\left(-\frac{1}{1.2.3}\right)^q\left(\frac{1}{1.2.3.4.5}\right)^r\ldots\right\},$$

le signe S devant s'étendre à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de p, q, r,... qui vérifient la condition

$$(33)\quad p + 3q + 5r + \ldots = 2m + 1.$$

Les formules (23) et (32), dont la première était déjà connue [voyez le 1.er volume, page 349], comprennent, comme cas particuliers, les équations (71) [ibidem], et les équations (15) de la page 280.

Supposons encore que l'on prenne

$$f(z) = \frac{1}{(s+z)^m},$$

s désignant une quantité réelle ou une expression imaginaire. La formule (15) donnera

$$(34)\quad \frac{1}{s^m} + \frac{1}{(s+1)^m} + \frac{1}{(s-1)^m} + \frac{1}{(s+2)^m} + \frac{1}{(s-2)^m} + \ldots = -\mathcal{E}\,\frac{d\,\mathrm{l}\sin\pi z}{dz}\,\frac{1}{(((s+z)^m))},$$

puis on en conclura, en posant $z = \frac{t}{\pi} - s$,

$$(35)\quad \frac{1}{s^m}+\frac{1}{(s+1)^m}+\frac{1}{(s-1)^m}+\frac{1}{(s+2)^m}+\frac{1}{(s-2)^m}+\ldots=-\mathcal{E}\,\frac{d\,\mathrm{l}\sin(t-\pi s)}{dt}\,\frac{1}{((t^m))}$$

$$=-\mathcal{E}\,\frac{d\,\mathrm{l}(\cos t-\cot\pi s.\sin t)}{dt}\,\frac{1}{((t^m))}.$$

Comme on aura d'ailleurs, pour des valeurs de t peu différentes de zéro,

$$(36)\quad \mathrm{l}(\cos t-\cot\pi s.\sin t)=$$

$$-\left(\frac{t}{1}\cot\pi s+\frac{t^2}{1.2}-\frac{t^3}{1.2.3}\cot\pi s-\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1}\cot\pi s+\frac{t^2}{1.2}-\frac{t^3}{1.2.3}\cot\pi s-\ldots\right)^2-\ldots,$$

on tirera de la formule (35)

$$(37)\quad \frac{1}{s^m}+\frac{1}{(s+1)^m}+\frac{1}{(s-1)^m}+\frac{1}{(s+2)^m}+\frac{1}{(s-2)^m}+\ldots=$$

$$m\pi^m\,\mathrm{S}\left\{\frac{1}{p+q+r+\ldots}\,\frac{1.2.3\ldots(p+q+r+\ldots)}{(1.2.3\ldots p)(1.2.3\ldots q)(1.2.3\ldots r)\ldots}\left(\frac{\cot\pi s}{1}\right)^p\left(\frac{1}{1.2}\right)^q\left(-\frac{\cot\pi s}{1.2.3}\right)^r\ldots\right\},$$

le signe S devant être étendu à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de p, q, r,... qui vérifient l'équation (24). Si, pour fixer les idées, on réduit le nombre m à l'unité, la formule (37) donnera

$$(38)\quad \frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}+\ldots=\pi\cot\pi s.$$

Si, dans cette dernière, on remplace s par $s\sqrt{-1}$, on trouvera

$$(39)\quad \frac{1}{s}+\frac{1}{s+\sqrt{-1}}+\frac{1}{s-\sqrt{-1}}+\frac{1}{s+2\sqrt{-1}}+\frac{1}{s-2\sqrt{-1}}+\ldots=\pi\,\frac{e^{\pi s}+e^{-\pi s}}{e^{\pi s}-e^{-\pi s}}.$$

Les formules (38) et (39) coïncident avec les équations connues

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-s^2}+\dfrac{1}{4-s^2}+\dfrac{1}{9-s^2}+\ldots=\dfrac{1}{2s^2}-\dfrac{\pi}{2s}\cot\pi s, \\[2ex] \dfrac{1}{1+s^2}+\dfrac{1}{4+s^2}+\dfrac{1}{9+s^2}+\ldots=\dfrac{\pi}{2s}\,\dfrac{e^{\pi s}+e^{-\pi s}}{e^{\pi s}-e^{-\pi s}}-\dfrac{1}{2s^2}. \end{cases}$$

Concevons à présent que, $f(z)$ désignant une fraction rationnelle dans laquelle le

degré du dénominateur surpasse le degré du numérateur, et a, b deux constantes positives dont la première soit la plus petite, on prenne successivement pour $f(z)$ les fonctions

$$(41)\qquad \frac{e^{az}+e^{-az}}{e^{bz}+e^{-bz}}f(z),\quad \frac{e^{az}+e^{-az}}{e^{bz}-e^{-bz}}f(z),\quad \frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{bz}+e^{-bz}}f(z),\quad \frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{bz}-e^{-bz}}f(z).$$

Alors les équations (15) et (16) serviront à transformer les séries comprises dans leurs premiers membres. Ainsi, par exemple, si l'on prend

$$f(z)=\frac{e^{az}+e^{-az}}{e^{bz}-e^{-bz}}f(z),$$

on tirera de la formule (16)

$$(42)\qquad \frac{e^{a}+e^{-a}}{e^{b}-e^{-b}}[f(1)-f(-1)]+\frac{e^{2a}+e^{-2a}}{e^{2b}-e^{-2b}}[f(2)-f(-2)]+\dots=$$

$$\frac{\pi}{b}\left\{\frac{e^{\frac{\pi^2}{b}}+e^{-\frac{\pi^2}{b}}}{e^{\frac{\pi^2}{b}}-e^{-\frac{\pi^2}{b}}}\,\frac{f\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{b}\right)-f\left(-\frac{\pi\sqrt{-1}}{b}\right)}{\sqrt{-1}}\cos\frac{a\pi}{b}-\frac{e^{\frac{2\pi^2}{b}}+e^{-\frac{2\pi^2}{b}}}{e^{\frac{2\pi^2}{b}}-e^{-\frac{2\pi^2}{b}}}\,\frac{f\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{b}\right)-f\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{b}\right)}{\sqrt{-1}}\cos\frac{2a\pi}{b}+\dots\right\}$$

$$-\pi\,\mathcal{E}\,\frac{z^2\cos\pi z}{\sin\pi z}\,\frac{e^{az}+e^{-az}}{e^{bz}-e^{-bz}}\left(\left(\frac{f(z)}{z^2}\right)\right).$$

Si l'on suppose en particulier $f(z)=\frac{1}{z}$, on trouvera

$$(43)\qquad \frac{e^{a}+e^{-a}}{e^{b}-e^{-b}}+\frac{1}{2}\,\frac{e^{2a}+e^{-2a}}{e^{2b}-e^{-2b}}+\frac{1}{3}\,\frac{e^{3a}+e^{-3a}}{e^{3b}-e^{-3b}}+\dots=\frac{2\pi^2-3a^2+b^2}{12b}$$

$$-\left\{\frac{e^{\frac{\pi^2}{b}}+e^{-\frac{\pi^2}{b}}}{e^{\frac{\pi^2}{b}}-e^{-\frac{\pi^2}{b}}}\cos\frac{a\pi}{b}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{2\pi^2}{b}}+e^{-\frac{2\pi^2}{b}}}{e^{\frac{2\pi^2}{b}}-e^{-\frac{2\pi^2}{b}}}\cos\frac{2a\pi}{b}+\frac{1}{3}\,\frac{e^{\frac{3\pi^2}{b}}+e^{-\frac{3\pi^2}{b}}}{e^{\frac{3\pi^2}{b}}-e^{-\frac{3\pi^2}{b}}}\cos\frac{3a\pi}{b}+\dots\right\}.$$

Si les produits (11) et (12) ne remplissent, ni l'un ni l'autre, les conditions que nous avons indiquées, on ne pourra plus se servir des formules (15) et (16) pour sommer ou transformer la série (1) ou (3); mais on parviendra souvent au même but à l'aide des nouvelles formules que nous allons établir.

Si, dans la formule (7), on remplace successivement $f(z)$ par les deux produits

$$f(z)\cos az, \qquad f(z)\sin az,$$

a désignant une quantité positive, on obtiendra les équations

(44) $$[f(1)+f(-1)]\cos a+[f(2)+f(-2)]\cos 2a+\ldots = \mathcal{E}\frac{f(z)}{z}\left(\left(\frac{\pi z\cos az.\cos\pi z}{\sin\pi z}\right)\right).$$

(45) $$[f(1)-f(-1)]\sin a+[f(2)-f(-2)]\sin 2a+\ldots = \mathcal{E}f(z)\left(\left(\frac{\pi\sin az\cos\pi z}{\sin\pi z}\right)\right).$$

Soit d'ailleurs $2k\pi$ celui des multiples de la circonférence 2π, qui diffère le moins de la somme $a+\pi$, en sorte qu'on ait

(46) $$a+\pi = 2k\pi+\alpha,$$

k désignant un nombre entier, et α une quantité positive ou négative, mais comprise entre les limites $-\pi$, $+\pi$. On aura évidemment, pour toutes les valeurs entières, positives ou négatives, de la variable z,

(47) $$\begin{cases} \cos az\cos\pi z = \cos(a+\pi)z = \cos(2k\pi z+\alpha z) = \cos\alpha z, \\ \sin az\cos\pi z = \sin(a+\pi)z = \sin(2k\pi z+\alpha z) = \sin\alpha z. \end{cases}$$

Par suite, les formules (44) et (45) pourront s'écrire comme il suit :

(48) $$[f(1)+f(-1)]\cos a+[f(2)+f(-2)]\cos 2a+\ldots = \mathcal{E}\frac{f(z)}{z}\left(\left(\frac{\pi z\cos\alpha z}{\sin\pi z}\right)\right),$$

(49) $$[f(1)-f(-1)]\sin a+[f(2)-f(-2)]\sin 2a+\ldots = \mathcal{E}f(z)\left(\left(\frac{\pi\sin\alpha z}{\sin\pi z}\right)\right).$$

Supposons maintenant que l'un des produits (11), (12) remplisse les conditions précédemment indiquées. Il en sera de même, à plus forte raison, de l'un des produits

(50) $$zf(z)\frac{\cos\alpha z}{\sin\pi z},$$ (51) $$z\frac{f(z)+f(-z)}{2}\,\frac{\cos\alpha z}{\sin\pi z},$$

et le théorème 2 de la page 258 ou le théorème 4 de la page 276 donnera

(52) $$\mathcal{E}\left(\left(f(z)\,\frac{\pi\cos\alpha z}{\sin\pi z}\right)\right) = 0.$$

En combinant cette dernière formule avec l'équation (48), on en tirera

$$(53)\qquad [f(1)+f(-1)]\cos\alpha+[f(2)+f(-2)]\cos 2\alpha+\ldots=-\mathcal{E}\,\frac{\pi z\cos\alpha z}{\sin\pi z}\left(\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right).$$

Il est bon d'observer que les formules (52) et (53) subsistent dans le cas même où aucun des produits (11), (12) ne satisfait aux conditions énoncées, pourvu que ces conditions soient remplies par l'une des expressions (50) et (51).

Si l'on supposait la fonction $f(z)$ telle que, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module r de la variable z, l'un des produits

$$(11)\qquad z f(z), \qquad\qquad (54)\qquad z\,\frac{f(z)-f(-z)}{2}$$

restât toujours fini ou infiniment petit, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{z}{r}$, on pourrait en général affirmer que les mêmes conditions seraient remplies par l'un des produits

$$(55)\qquad z f(z)\frac{\sin\alpha z}{\sin\pi z}, \qquad\qquad (56)\qquad z\,\frac{f(z)-f(-z)}{2}\,\frac{\sin\alpha z}{\sin\pi z},$$

et le théorème 2 de la page 258 ou le théorème 4 de la page 276 donnerait

$$(57)\qquad \mathcal{E}\left(\left(f(z)\frac{\pi\sin\alpha z}{\sin\pi z}\right)\right)=0.$$

En combinant cette dernière formule avec l'équation (49), on en tirera

$$(58)\quad [f(1)-f(-1)]\sin\alpha+[f(2)-f(-2)]\sin 2\alpha+\ldots=-\mathcal{E}\,\frac{\pi\sin\alpha z}{\sin\pi z}((f(z))).$$

Les formules (57) et (58) continuent de subsister, dans le cas même où aucun des produits (11), (54) ne satisfait aux conditions énoncées, pourvu que ces conditions soient remplies par l'une des expressions (55), (56).

Lorsqu'on substitue, dans les formules (53) et (58), la valeur de α tirée de l'équation (46), on en conclut

$$(59)\quad [f(1)+f(-1)]\cos\alpha-[f(2)+f(-2)]\cos 2\alpha+\ldots=\mathcal{E}\,\frac{\pi z\cos\alpha z}{\sin\pi z}\left(\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right),$$

$$(60)\quad [f(1)-f(-1)]\sin\alpha-[f(2)-f(-2)]\sin 2\alpha+\ldots=\mathcal{E}\,\frac{\pi\sin\alpha z}{\sin\pi z}\,((f(z))).$$

Pour montrer l'utilité de ces diverses formules, concevons d'abord que $f(z)$ désigne une fraction rationnelle. Si, dans cette fraction, la différence entre le degré du dénominateur et le degré du numérateur surpasse l'unité, ou bien encore, si, cette différence étant réduite à l'unité, la constante α n'est pas précisément égale à π, les expressions (50), (55) rempliront les conditions prescrites, et par suite les équations (53), (58) feront connaître les sommes des séries renfermées dans leurs premiers membres. Ces séries ne diffèrent pas de celles que nous avons considérées dans le Mémoire présenté à l'Institut en 1814 [voyez les Mémoires présentés par divers savants et publiés en 1827, page 783]. Si, pour fixer les idées, on pose

$$f(z)=\frac{1}{s+z},$$

s désignant une quantité réelle ou une expression imaginaire, on tirera de l'équation (53)

$$(61)\quad \left(\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}\right)\cos a+\left(\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-2}\right)\cos 2a+\left(\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s-3}\right)\cos 3a+\ldots=\pi\frac{\cos\alpha s}{\sin\pi s}-\frac{1}{s},$$

et de l'équation (58)

$$(62)\quad \left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right)\sin a+\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-2}\right)\sin 2a+\left(\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s-3}\right)\sin 3a+\ldots=-\frac{\pi\sin\alpha s}{\sin\pi s}.$$

Les formules (61) et (62) coïncident avec deux équations données par Euler, dans le tome II des Opuscules analytiques, et peuvent s'écrire comme il suit :

$$(63)\qquad \frac{\cos a}{1-s^2}+\frac{\cos 2a}{4-s^2}+\frac{\cos 3a}{9-s^2}+\ldots=\frac{1}{2s^2}-\frac{\pi}{2s}\,\frac{\cos\alpha s}{\sin\pi s},$$

$$(64)\qquad \frac{\sin a}{1-s^2}+\frac{2\sin 2a}{4-s^2}+\frac{3\sin 3a}{9-s^2}+\ldots=-\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\alpha s}{\sin\pi s}.$$

Si l'on y remplace s par $s\sqrt{-1}$, on en conclura

$$(65)\qquad \frac{\cos a}{1+s^2}+\frac{\cos 2a}{4+s^2}+\frac{\cos 3a}{9+s^2}+\ldots=\frac{\pi}{2s}\,\frac{e^{\alpha s}+e^{-\alpha s}}{e^{\pi s}-e^{-\pi s}}-\frac{1}{2s^2},$$

$$(66)\qquad \frac{\sin a}{1+s^2}+\frac{2\sin 2a}{4+s^2}+\frac{3\sin 3a}{9+s^2}+\ldots=-\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\alpha s}-e^{-\alpha s}}{e^{\pi s}-e^{-\pi s}}.$$

Lorsque, dans les quatre formules précédentes, on substitue la valeur de α tirée de l'équation (46), on trouve

(67) $$\frac{\cos\alpha}{1-s^2}-\frac{\cos 2\alpha}{4-s^2}+\frac{\cos 3\alpha}{9-s^2}-\ldots=\frac{\pi}{2s}\frac{\cos\alpha s}{\sin\pi s}-\frac{1}{2s^2},$$

(68) $$\frac{\sin\alpha}{1-s^2}-\frac{2\sin 2\alpha}{4-s^2}+\frac{3\sin 3\alpha}{9-s^2}-\ldots=\frac{\pi}{2}\frac{\sin\alpha s}{\sin\pi s},$$

(69) $$\frac{\cos\alpha}{1+s^2}-\frac{\cos 2\alpha}{4+s^2}+\frac{\cos 3\alpha}{9+s^2}-\ldots=-\frac{\pi}{2s}\frac{e^{\alpha s}+e^{-\alpha s}}{e^{\pi s}-e^{-\pi s}}+\frac{1}{2s^2},$$

(70) $$\frac{\sin\alpha}{1+s^2}-\frac{2\sin 2\alpha}{4+s^2}+\frac{3\sin 3\alpha}{9+s^2}-\ldots=\frac{\pi}{2}\frac{e^{\alpha s}-e^{-\alpha s}}{e^{\pi s}-e^{-\pi s}}.$$

Ces dernières supposent que la constante α demeure comprise entre les limites $-\pi$, $+\pi$.

Lorsqu'après avoir développé, suivant les puissances ascendantes de s, les deux membres de l'équation (67) ou (68), on égale entre eux les coefficients des puissances semblables, on en tire

(71) $$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha-\frac{\cos 2\alpha}{2^2}+\frac{\cos 3\alpha}{3^2}-\frac{\cos 4\alpha}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1.2},\\ \cos\alpha-\frac{\cos 2\alpha}{2^4}+\frac{\cos 3\alpha}{3^4}-\frac{\cos 4\alpha}{4^4}+\ldots=\frac{7\pi^4}{720}-\frac{\pi^2}{12}\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{1.2.3.4},\\ \text{etc.....},\end{array}\right.$$

et

(72) $$\left\{\begin{array}{l}\sin\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{2}+\frac{\sin 3\alpha}{3}-\frac{\sin 4\alpha}{4}+\ldots=\frac{1}{2}\frac{\alpha}{1},\\ \sin\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{2^3}+\frac{\sin 3\alpha}{3^3}-\frac{\sin 4\alpha}{4^3}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}\frac{\alpha}{1}-\frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{1.2.3},\\ \text{etc.....}\end{array}\right.$$

Les formules précédentes supposent encore que la valeur numérique de la constante α est inférieure à π. On peut, au reste, les déduire immédiatement des équations (59) et (60). En effet, si l'on pose, dans l'équation (59),

$$f(z) = \frac{1}{z^{2m}},$$

et dans l'équation (60)

$$f(z) = \frac{1}{z^{2m+1}},$$

on trouvera, quel que soit le nombre entier m,

$$(73) \qquad \cos\alpha - \frac{\cos 2\alpha}{2^{2m}} + \frac{\cos 3\alpha}{3^{2m}} - \frac{\cos 4\alpha}{4^{2m}} + \ldots = \mathcal{E}\frac{\pi\cos\alpha z}{2\sin\pi z}\left(\left(\frac{1}{z^{2m}}\right)\right),$$

et

$$(74) \qquad \sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2^{2m+1}} + \frac{\sin 3\alpha}{3^{2m+1}} - \frac{\sin 4\alpha}{4^{2m+1}} + \ldots = \mathcal{E}\frac{\pi\sin\alpha z}{2\sin\pi z}\left(\left(\frac{1}{z^{2m+1}}\right)\right).$$

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que le second membre de la formule (73) ou (74) équivaut à la somme qu'on obtient quand on ajoute les uns aux autres les $m+1$ premiers termes de la série

$$1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\ldots = \cos\alpha,$$

ou

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\ldots = \sin\alpha,$$

après les avoir respectivement multipliés par les $m+1$ premiers termes de la suite

$$(75) \qquad \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi^2}{12}, \quad \frac{7\pi^4}{720}, \quad \frac{31\pi^6}{30240}, \quad \text{etc.}\ldots,$$

pris dans un ordre inverse. Or, dans la série (75), le deuxième terme et les suivants sont précisément les quantités qui forment les seconds membres des équations (14) de la page 280.

Lorsque, $f(z)$ désignant une fraction rationnelle, dans laquelle le degré de dénominateur surpasse d'une unité le degré du numérateur, la constante α devient précisément égale à π, les produits (12) et (51) remplissent les conditions ci-dessus indiquées; mais on ne peut plus en dire autant des produits (11) et (55), ni même des produits (54) et (56), qui, pour des valeurs infinies de z, se réduisent généralement à une constante déterminée $\mathcal{J}$. Donc alors les formules (52), (53), et par suite les équations (61), (63), (65), (67), (69) continuent de subsister, mais les formules (57), (58), (62), (64), (66), (68), (70) deviennent inexactes. Toutefois il est aisé de voir comment ces dernières formules doivent être modifiées dans le cas dont il s'agit.

Alors en effet, pour déterminer le résidu intégral compris dans le premier membre de l'équation (57), il faudra recourir, non plus au théorème 4 de la page 276, mais au théorème 3 de la page 274, et l'on aura en conséquence

$$\mathcal{E}\left(\left(f(z)\frac{\pi\sin\alpha z}{\sin\pi z}\right)\right)=\pi\,\mathcal{E}((f(z)))=\pi\mathcal{F}.$$

Il en résulte qu'on devra au second membre de la formule (58) ajouter le produit $\pi\mathcal{F}$, et au second membre de la formule (62) le nombre π; ce qui suffira pour rendre ces seconds membres égaux aux deux premiers, c'est-à-dire, à zéro. De même, à la place des formules (68) et (70), on obtiendra deux équations identiques. Quant aux formules (67) et (69), si l'on y pose $\alpha=\pi$, on retrouvera les équations (40).

Si l'on prenait pour $f(z)$, non plus une fraction rationnelle, mais l'une des expressions (41), les formules (59) et (60) serviraient à la transformation des séries que renferment leurs premiers membres. Ainsi, par exemple, si l'on prend

$$f(z)=\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{bz}-e^{-bz}}f(z),$$

$f(z)$ désignant une fonction rationnelle, et a, b deux constantes positives dont la première soit la plus petite, la formule (60) donnera

$$(76)\qquad \frac{e^{a}-e^{-a}}{e^{b}-e^{-b}}[f(1)-f(-1)]\sin\alpha-\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{e^{2b}-e^{-2b}}[f(2)-f(-2)]\sin 2\alpha+\dots=$$

$$\frac{\pi}{b}\left\{\frac{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}{e^{\frac{\pi^2}{b}}-e^{-\frac{\pi^2}{b}}}\frac{f\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{b}\right)-f\left(-\frac{\pi\sqrt{-1}}{b}\right)}{\sqrt{-1}}\sin\frac{a\pi}{b}-\frac{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}{e^{\frac{2\pi^2}{b}}-e^{-\frac{2\pi^2}{b}}}\frac{f\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{b}\right)-f\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{b}\right)}{\sqrt{-1}}\sin\frac{2a\pi}{b}+\dots\right\}$$

$$+\pi\,\mathcal{E}\frac{\sin\alpha z}{\sin\pi z}\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{bz}-e^{-bz}}((f(z))).$$

Si l'on suppose en particulier $f(z)=\frac{1}{z}$, on trouvera

$$(77)\qquad \frac{e^{a}-e^{-a}}{e^{b}-e^{-b}}\sin\alpha-\frac{1}{2}\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{e^{2b}-e^{-2b}}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\frac{e^{3a}-e^{-3a}}{e^{3b}-e^{-3b}}\sin 3\alpha-\dots\dots\dots=\frac{\alpha a}{2b}$$

$$-\left\{\frac{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}{e^{\frac{\pi^2}{b}}-e^{-\frac{\pi^2}{b}}}\sin\frac{a\pi}{b}-\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}{e^{\frac{2\pi^2}{b}}-e^{-\frac{2\pi^2}{b}}}\sin\frac{2a\pi}{b}+\frac{1}{3}\frac{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}{e^{\frac{3\pi^2}{b}}-e^{-\frac{3\pi^2}{b}}}\sin\frac{3a\pi}{b}+\dots\right\}$$

Dans les formules (76) et (77), on ne doit plus regarder les constantes α et a comme liées entre elles par l'équation (46).

Il arrive souvent que les séries, comprises dans les équations (16), (59) et (60), sont transformées par ces équations en d'autres séries, dont les différents termes sont équivalents, au signe près, à ceux des premières. Alors les sommes des séries que l'on considère peuvent être évidemment déduites des équations elles-mêmes. C'est ce qui arrivera en particulier si, dans la formule (16), on pose

$$f(z) = \frac{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\, z f(z^4),$$

$f(z)$ désignant une fonction rationnelle de z, qui s'évanouisse avec $\frac{1}{z}$. Dans ce cas, on se trouvera immédiatement ramené à l'équation (115) de la page 273. De même, si l'on pose, dans la formule (59),

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}+e^{-\alpha z}}{e^{\pi z}-e^{-\alpha z}}\, z f(z^4),$$

et dans la formule (60),

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}-e^{-\alpha z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\, \frac{f(z^4)}{z},$$

$f(z)$ désignant une fonction rationnelle quelconque de la variable z, et α une quantité comprise entre les limites $-\pi$, $+\pi$, on en conclura

$$(78)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} f(1)\cos\alpha - 2\,\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}} f(2^4)\cos 2\alpha + 3\,\frac{e^{3\alpha}+e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} f(3^4)\cos 3\alpha - \dots \\ &\qquad = \frac{\pi}{4}\,\mathcal{E}\,\frac{z^2(e^{\alpha z}+e^{-\alpha z})\cos\alpha z}{(e^{\pi z}-e^{-\pi z})\sin\pi z}\left(\left(\frac{f(z^4)}{z}\right)\right), \end{aligned} \right.$$

et

$$(79)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} f(1)\sin\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}} f(2^4)\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\,\frac{e^{3\alpha}-e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} f(3^4)\sin 3\alpha - \dots \\ &\qquad = \frac{\pi}{4}\,\mathcal{E}\,\frac{(e^{\alpha z}-e^{-\alpha z})\sin\alpha z}{(e^{\pi z}-e^{-\pi z})\sin\pi z}\left(\left(\frac{f(z^4)}{z}\right)\right). \end{aligned} \right.$$

Si, pour fixer les idées, on prend

$$f(z^4) = \frac{1}{z^{4m}},$$

m étant un nombre entier, on trouvera

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cos\alpha-\frac{1}{2^{4m-1}}\,\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\cos 2\alpha+\frac{1}{3^{4m-1}}\,\frac{e^{3\alpha}+e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\cos 3\alpha-\ldots \\ &\qquad=\frac{\pi}{4}\,\mathcal{E}\,\frac{(e^{\alpha z}+e^{-\alpha z})\cos\alpha z}{(e^{\pi z}-e^{-\pi z})\sin\pi z}\left(\!\left(\frac{1}{z^{4m-1}}\right)\!\right),\end{aligned}\right.$$

et

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\sin\alpha-\frac{1}{2^{4m+1}}\,\frac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\sin 2\alpha+\frac{1}{3^{4m+1}}\,\frac{e^{3\alpha}-e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\sin 3\alpha-\ldots \\ &\qquad=\frac{\pi}{4}\,\mathcal{E}\,\frac{(e^{\alpha z}-e^{-\alpha z})\sin\alpha z}{(e^{\pi z}-e^{-\pi z})\sin\pi z}\left(\!\left(\frac{1}{z^{4m+1}}\right)\!\right).\end{aligned}\right.$$

Si l'on prend au contraire

$$f(z^4)=\frac{1}{s^4+z^4},$$

on aura

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,\frac{\cos\alpha}{1+s^4}-\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\,\frac{2\cos 2\alpha}{2^4+s^4}+\frac{e^{3\alpha}+e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\,\frac{3\cos 3\alpha}{3^4+s^4}-\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad=\frac{\pi}{4s^2}\left\{\frac{1}{\pi^2 s^2}-\frac{e^{\alpha s\sqrt{2}}+2\cos(\alpha s\sqrt{2})+e^{-\alpha s\sqrt{2}}}{e^{\pi s\sqrt{2}}-2\cos(\alpha s\sqrt{2})+e^{-\pi s\sqrt{2}}}\right\},\end{aligned}\right.$$

et

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,\frac{\sin\alpha}{1+s^4}-\frac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\,\frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{2^4+s^4}+\frac{e^{3\alpha}-e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\,\frac{\frac{1}{3}\sin 3\alpha}{3^4+s^4}-\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad=\frac{\pi}{4s^4}\left\{\frac{\alpha^2}{\pi^2}-\frac{e^{\alpha s\sqrt{2}}-2\cos(\alpha s\sqrt{2})+e^{-\alpha s\sqrt{2}}}{e^{\pi s\sqrt{2}}-2\cos(\pi s\sqrt{2})+e^{-\pi s\sqrt{2}}}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Lorsque, dans les formules (80) et (81), on pose successivement $m=0$, $m=1$, etc..., on en conclut

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cos\alpha-\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\,2\cos 2\alpha+\frac{e^{3\alpha}+e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\,3\cos 3\alpha-\ldots=\frac{1}{4\pi}, \\ &\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,\frac{\cos\alpha}{1^3}-\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\,\frac{\cos 2\alpha}{2^3}+\frac{e^{3\alpha}+e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\,\frac{\cos 3\alpha}{3^3}-\ldots=\frac{\pi^4-15\alpha^4}{360.\pi}, \\ &\text{etc...},\end{aligned}\right.$$

et

$$(85)\quad \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,\dfrac{\sin\alpha}{1}-\dfrac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\,\dfrac{\sin 2\alpha}{2}+\dfrac{e^{3\alpha}-e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\,\dfrac{\sin 3\alpha}{3}-\ldots=\dfrac{\alpha^{2}}{4\pi}, \\[2ex] \dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,\dfrac{\sin\alpha}{1^{5}}-\dfrac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\,\dfrac{\sin 2\alpha}{2^{5}}+\dfrac{e^{3\alpha}-e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\,\dfrac{\sin 3\alpha}{3^{5}}-\ldots=\dfrac{\alpha^{2}(\pi^{4}-\alpha^{4})}{360.\pi}, \\[2ex] \text{etc.....} \end{cases}$$

Si, dans les mêmes formules, on remplaçait m par $-m$, on en tirerait, pour des valeurs de m positives et différentes de zéro,

$$(86)\quad \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cos\alpha-2^{4m+1}\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\cos 2\alpha+3^{4m+1}\frac{e^{3\alpha}+e^{-3\alpha}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\cos 3\alpha-\ldots=0,$$

$$(87)\quad \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\sin\alpha-2^{4m-1}\frac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\sin 2\alpha+3^{4m-1}\frac{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\sin 3\alpha-\ldots=0.$$

Les formules (78), (79) et suivantes comprennent, comme cas particuliers, les équations (93), (94), (95), (96), (97), (98), (99), (100), (101), (102), (115), (118), (119) et (120) de l'avant-dernier article.

Si la constante α, que l'on suppose renfermée entre les limites $-\pi$, $+\pi$, devenait précisément égale à l'une de ces limites, les formules (78), (79) ne pourraient plus subsister qu'autant que la fonction $f(z)$ s'évanouirait avec $\frac{1}{z}$, et alors la seconde de ces formules deviendrait identique, tandis que la première coïnciderait avec l'équation (115) de la page 273.

SUR UN MÉMOIRE D'EULER

QUI A POUR TITRE

NOVA METHODUS FRACTIONES QUASCUMQUE RATIONALES IN FRACTIONES SIMPLICES RESOLVENDI.

On trouve, dans les *Acta Academiæ Petropolitanæ* pour l'année 1780, un Mémoire d'Euler qui a pour titre *Nova Methodus fractiones quascumque rationales in fractiones simplices resolvendi.* Ce Mémoire, dont je n'avais pas connaissance à l'époque où j'établissais les bases du calcul des résidus, a des rapports assez directs avec ce même calcul pour qu'il soit convenable de les signaler. Le procédé que l'auteur emploie pour déduire d'une fraction rationnelle $f(z) = \frac{P}{Q}$, dans laquelle P, Q désignent deux fonctions entières de la variable z, les fractions simples correspondantes à un diviseur linéaire $z - a$ de la fonction Q, consiste à faire croître la valeur a de z d'une quantité infiniment petite ω, puis à développer la fraction $\frac{P}{Q}$ suivant les puissances ascendantes de ω, en posant $z = a + \omega$, et enfin à chercher, dans le développement obtenu, les termes qui deviennent infinis pour $\omega = 0$, c'est-à-dire, ceux qui renferment des puissances négatives de $z - a$. Il en résulte que, dans le cas particulier où la fonction Q est une seule fois divisible par le facteur $z - a$, la fraction simple qui se rapporte à ce facteur, et se présente sous la forme $\frac{\alpha}{z-a}$, a pour numérateur le coefficient de $\frac{1}{\omega}$ dans le développement de $f(a+\omega)$, ou ce que j'ai nommé le *résidu* de $f(z)$ relatif à $z = a$. Il serait aisé d'en conclure que la fraction simple $\frac{\alpha}{z-a}$, c'est-à-dire, la partie de $f(z)$ correspondante au facteur $z - a$ est précisément le résidu de $\frac{f(u)}{z-u}$ relatif à la valeur a de la variable u, ou ce qui revient au même, le coefficient de $\frac{1}{\omega}$ dans le développement du rapport

$$\frac{f(a+\omega)}{z-a-\omega}$$

suivant les puissances ascendantes de ω. Mais Euler n'a point énoncé cette proposition, comprise dans la formule (5) de la page 279, et qui, s'étendant au cas même où la fonction Q devient divisible par une puissance entière quelconque de $z-a$, fournit, pour la décomposition de $\frac{P}{Q}$ en fractions simples, une règle uniforme, également applicable, quelle que soit la nature des racines, réelles ou imaginaires, égales ou inégales de l'équation $Q=0$.

L'illustre géomètre que je viens de citer observe encore que le procédé dont il a fait usage peut être employé à la décomposition des fonctions transcendantes en fractions rationnelles. Mais les huit dernières pages du Mémoire, qui sont relatives à cet objet, offrent seulement un exemple de cette décomposition, et n'indiquent pas les conditions auxquelles les fonctions transcendantes doivent satisfaire pour que le procédé dont il s'agit leur soit applicable. Au reste, on concevra facilement comment il a pu arriver qu'Euler, dans son Mémoire, n'ait rien dit à ce sujet. Car la recherche des conditions dont nous venons de parler, et des propositions fondamentales qui s'y rattachent dans le calcul des résidus, exige la connaissance des relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies. Par conséquent elle suppose [voyez le 1.er volume des Exercices, pages 95 et suiv.] la détermination de la différence entre les deux valeurs que peut prendre une intégrale double suivant l'ordre dans lequel on effectue les intégrations. Or cette différence a été signalée et calculée pour la première fois, à l'aide de la théorie des intégrales définies singulières, dans le Mémoire que j'ai présenté à l'Institut le 22 août 1814, et que l'on trouve inséré, avec le rapport approbatif de MM. Lacroix et Legendre, dans le recueil des Mémoires des savants étrangers pour l'année 1827. Quoiqu'il en soit, la fonction qu'Euler a choisie pour exemple, étant une de celles qui remplissent les conditions énoncées dans le 4.e théorème de la page 289, vérifie l'équation (36) de la page 290; et en effet les calculs effectués dans la dernière partie du Mémoire que je viens de rappeler conduisent définitivement l'auteur à une formule qui n'est que le développement de la suivante

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tang} x-\cos x}=\mathcal{E}\,\frac{1}{x-z}\left(\left(\frac{\sin z}{\operatorname{tang} z-\cos z}\right)\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\mathcal{E}\,\frac{1}{x-z}\,\frac{\cos z}{((2\sin z+1+\sqrt{5}))}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\mathcal{E}\,\frac{1}{x-z}\,\frac{\cos z}{((2\sin z+1-\sqrt{5}))}.$$

MÉTHODE POUR DÉVELOPPER

DES FONCTIONS D'UNE OU DE PLUSIEURS VARIABLES

EN SÉRIES COMPOSÉES DE FONCTIONS DE MÊME ESPÈCE.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, \ldots r)$$

une fonction qui renferme, avec les variables indépendantes $x, y \ldots$ une autre variable à laquelle on attribue successivement, 1.° une certaine valeur représentée par s, 2.° d'autres valeurs r_1, r_2, r_3, etc.... respectivement égales aux diverses racines d'une équation transcendante. On pourra, dans un grand nombre de cas, développer la fonction de $x, y, \ldots$ désignée par

$$(2) \qquad f(x, y, \ldots s)$$

en une série dont les différents termes soient respectivement proportionnels aux fonctions de même espèce désignées par

$$(3) \qquad f(x, y, \ldots r_1), \quad f(x, y, \ldots r_2), \quad f(x, y, \ldots r_3), \quad \text{etc...};$$

c'est-à-dire que l'on pourra choisir les coefficients R_1, R_2, R_3, etc.... de manière à vérifier l'équation

$$(4) \qquad f(x, y, \ldots s) = R_1 f(x, y, \ldots r_1) + R_2 f(x, y, \ldots r_2) + \text{etc....}$$

Souvent en effet l'on y parviendra, en suivant la méthode que nous allons indiquer.

Supposons qu'aucune des fonctions (3) ne devienne infinie, et soit

$$(5) \qquad F(r) = 0,$$

l'équation transcendante à laquelle appartiennent les racines r_1, r_2, ... Si cette

équation n'a pas de racines égales, il suffira, pour déterminer convenablement les coefficients R_1, R_2, etc... de trouver une nouvelle fonction $\varphi(r)$, qui reste finie quand on attribue à la variable r l'une des valeurs r_1, r_2, etc..., et qui satisfasse à la formule

(6) $$f(x, y, \ldots s) = \mathcal{E} \frac{\varphi(r) \cdot f(x, y, \ldots r)}{((F(r)))},$$

En effet, cette fonction étant trouvée, la formule (6) donnera

(7) $$f(x, y, \ldots s) = \frac{\varphi(r_1)}{F'(r_1)} f(x, y, \ldots r_1) + \frac{\varphi(r_2)}{F'(r_2)} f(x, y, \ldots r_2) + \text{etc}\ldots,$$

et par conséquent on vérifiera l'équation (5) en prenant

(8) $$R_1 = \frac{\varphi(r_1)}{F'(r_1)}, \qquad R_2 = \frac{\varphi(r_2)}{F'(r_2)}, \qquad R_3 = \frac{\varphi(r_3)}{F'(r_3)}, \quad \text{etc}\ldots.$$

D'ailleurs, comme on a identiquement

(9) $$f(x, y, \ldots s) = \mathcal{E} \frac{f(x, y, \ldots r)}{((r - s))},$$

la formule (6) pourra être réduite à

(10) $$\mathcal{E} \frac{f(x, y, \ldots r)}{((r - s))} = \mathcal{E} \frac{\varphi(r) f(x, y, \ldots r)}{((F(r)))},$$

et l'on tirera de cette dernière, en admettant que $\varphi(r)$ conserve une valeur finie pour $r = s$,

(11) $$\mathcal{E} \frac{F(r) - (r - s)\varphi(r)}{(((r - s) F(r)))} f(x, y, \ldots r) = 0.$$

Posons maintenant

(12) $$F(r) - (r - s)\varphi(r) = \chi(r);$$

on en conclura

(13) $$\varphi(r) = \frac{F(r) - \chi(r)}{r - s}.$$

Or, pour que la valeur précédente de $\varphi(r)$ ne devienne pas infinie en vertu de la supposition $r = s$, il faudra que l'on ait

$$(14)\qquad F(s)=\chi(s).$$

On trouvera par suite

$$(15)\qquad \varphi(r)=\frac{F(r)-F(s)}{r-s}-\frac{\chi(r)-\chi(s)}{r-s};$$

puis, en faisant, pour abréger,

$$\frac{\chi(r)-\chi(s)}{r-s}=\psi(r),$$

on obtiendra la formule

$$(16)\qquad \varphi(r)=\frac{F(r)-F(s)}{r-s}-\psi(r),$$

dans laquelle $\psi(r)$ désignera une fonction qui devra, ainsi que $\varphi(r)$, conserver une valeur finie, non-seulement pour $r=s$, mais encore pour chacune des valeurs de r représentées par r_1, r_2, etc....

Concevons à présent que l'on substitue dans la formule (11) la valeur de $\varphi(r)$ donnée par l'équation (16). La formule (11) deviendra

$$(17)\qquad \mathcal{E}\frac{F(s)+(r-s)\psi(r)}{(((r-s)F(r)))}f(x,y,\ldots r)=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18)\qquad F(s)\,\mathcal{E}\frac{f(x,y,\ldots r)}{(((r-s)F(r)))}+\mathcal{E}\frac{\psi(r)f(x,y,\ldots r)}{((F(r)))}=0;$$

et il ne restera plus qu'à choisir la fonction $\psi(r)$ de manière à vérifier l'équation (17) ou (18). Or, dans le premier membre de l'équation (18), le second terme disparaîtra évidemment si l'on suppose

$$(19)\qquad \psi(r)=0.$$

De plus, si la fonction $f(x,y,\ldots r)$ conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies de r, on aura identiquement

$$(20)\qquad \mathcal{E}\frac{f(x,y,\ldots r)}{(((r-s)F(r)))}=\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(x,y,\ldots r)}{(r-s)F(r)}\right)\right).$$

Enfin, si l'on représente par ρ le module de la variable r, et, si l'on suppose que le rapport

(21) $$\frac{f(x,y,\ldots r)}{F(r)}$$

devienne généralement nul, pour des valeurs infinies de ρ, convenablement choisies, on pourra en dire autant du produit

(22) $$r\frac{f(x,y,\ldots r)}{(r-s)F(r)} = \frac{1}{1-\frac{s}{r}}\frac{f(x,y,\ldots r)}{F(r)},$$

et l'on conclura du 2.e théorème de la page 258 que la valeur principale du résidu intégral

(23) $$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(x,y,\ldots r)}{(r-s)F(r)}\right)\right)$$

s'évanouit. Ajoutons que cette valeur principale s'évanouira encore en vertu du théorême cité, si, pour des valeurs infinies de ρ convenablement choisies, le rapport (21) est toujours fini ou infiniment petit, quel que soit le quotient $\frac{r}{\rho}$, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières de l'angle τ déterminé par l'équation

(24) $$r = \rho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau).$$

Donc, si ces conditions sont remplies, le premier terme de la formule (18) sera égal à zéro, et l'on vérifiera l'équation (6) en prenant

(25) $$\varphi(r) = \frac{F(r)-F(s)}{r-s}.$$

D'ailleurs la valeur de r, désignée par s, est entièrement arbitraire, et peut être considérée comme une nouvelle variable. On peut donc énoncer la proposition suivante.

1.er Théorême. *Soit*

(1) $$f(x,y,\ldots r)$$

une fonction des variables indépendantes $x, y, \ldots r$, *qui demeure finie pour toutes les valeurs finies de* r, *et* s *une autre variable indépendante de* r. *Si, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module* ρ *de la variable* r, *le rapport*

(21) $$\frac{f(x,y,\ldots r)}{F(r)}$$

reste toujours fini ou infiniment petit, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{r}{\rho}$, *on aura*

$$\mathrm{f}(x, y, \ldots s) = \mathcal{E} \, \frac{\mathrm{F}(r) - \mathrm{F}(s)}{r - s} \, \frac{\mathrm{f}(x, y, \ldots r)}{((\mathrm{F}(r)))}, \tag{26}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{f}(x, y, \ldots s) = \mathcal{E} \, \frac{1}{s - r} \, \frac{\mathrm{f}(x, y, \ldots r)}{((\mathrm{F}(r)))}, \tag{27}$$

pourvu que l'on réduise le résidu intégral, compris dans le second membre de l'équation (26) *ou* (27), *à sa valeur principale.*

Corollaire 1.er Il est important d'observer que le théorème précédent ne doit pas être restreint au cas où les racines de l'équation (5) sont inégales. Ajoutons que l'on peut déduire immédiatement l'équation (27) de la formule (5) de la page 279, en substituant, dans cette formule, la lettre s à la lettre x, et posant d'ailleurs

$$f(s) = \frac{\mathrm{f}(x, y, \ldots s)}{\mathrm{F}(s)}.$$

Corollaire 2. Souvent, pour que les conditions énoncées dans le théorème 1.er puissent être remplies, il est nécessaire de supposer les variables $x, y, \ldots\ldots$ comprises entre certaines limites. Alors on n'est en droit de considérer la formule (26) comme exacte, qu'autant que l'on attribue aux variables $x, y, \ldots$ des valeurs renfermées entre les limites dont il s'agit.

Corollaire 3. Comme on a identiquement

$$\frac{\mathrm{F}(r) - \mathrm{F}(s)}{r - s} = \int_0^1 \mathrm{F}'[r + \lambda(s - r)] \, d\lambda, \tag{28}$$

il est clair que l'équation (26) peut être présentée sous la forme

$$\mathrm{f}(x, y, \ldots s) = \mathcal{E} \, \frac{\mathrm{f}(x, y, \ldots r) \int_0^1 \mathrm{F}'[r + \lambda(s - r)] \, d\lambda}{((\mathrm{F}(r)))}. \tag{29}$$

Si, dans l'équation (26), on remplace successivement $\mathrm{f}(x, y, \ldots r)$ par les trois fonctions

$$e^{rx}, \quad \cos rx, \quad \sin rx,$$

on obtiendra, au lieu du premier théorème, ceux que nous allons énoncer.

2.° Théorème. *Soient r, s; x trois variables indépendantes; et $F(r)$ une fonction donnée de r. Si, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module ρ de la variable r, le rapport*

$$\frac{e^{rx}}{F(r)} \tag{30}$$

reste toujours fini ou infiniment petit, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{r}{\rho}$, on aura

$$e^{sx} = \mathcal{E}\, \frac{F(r)-F(s)}{r-s}\, \frac{e^{rx}}{((F(r)))}, \tag{31}$$

ou, ce qui revient au même,

$$e^{sx} = F(s)\, \mathcal{E}\, \frac{1}{s-r}\, \frac{e^{rx}}{((F(r)))}, \tag{32}$$

pourvu que l'on réduise le résidu intégral, compris dans le second membre de l'équation (31) ou (32), à sa valeur principale.

Corollaire. En combinant l'équation (31) avec la formule (28), on en conclut

$$e^{sx} = \mathcal{E}\, \frac{e^{rx}\int_0^1 F'[r+\lambda(s-r)]\,d\lambda}{((F(r)))}. \tag{33}$$

Exemples. Supposons

$$F(r) = e^{ar} - 1, \tag{34}$$

a désignant une constante positive. Alors, l'équation (5) étant réduite à

$$e^{ar} - 1 = 0, \tag{35}$$

les racines de cette équation seront respectivement

$$0, \quad \pm\frac{2\pi}{a}\sqrt{-1}, \quad \pm\frac{4\pi}{a}\sqrt{-1}, \quad \pm\frac{6\pi}{a}\sqrt{-1}, \quad \text{etc...}, \tag{36}$$

et elles auront pour modules les différents termes de la série

$$0, \quad \frac{2\pi}{a}, \quad \frac{4\pi}{a}, \quad \frac{6\pi}{a}, \quad \text{etc...}, \tag{37}$$

Cela posé, si l'on attribue au module ρ de la variable r une valeur infiniment grande, prise dans la série

(38) $$\frac{\pi}{a},\quad \frac{3\pi}{a},\quad \frac{5\pi}{a},\quad \frac{7\pi}{a},\quad \text{etc.}\ldots,$$

et à la variable x une valeur positive, renfermée entre les limites 0, a, le rapport (30), réduit à la forme

(39) $$\frac{e^{rx}}{e^{ar}-1},$$

sera toujours fini ou infiniment petit, et ne cessera d'être infiniment petit, en conservant une valeur finie, que dans le cas où le quotient $\frac{r}{\rho}$ différera très-peu de $\pm\sqrt{-1}$. On aura donc, en vertu de l'équation (32), pour des valeurs de x renfermées entre les limites $x=0$, $x=a$,

(40) $$e^{sx}=(e^{as}-1)\,\mathcal{E}\,\frac{1}{s-r}\,\frac{e^{rx}}{((e^{ar}-1))}$$

$$=\frac{e^{as}-1}{a}\left\{\frac{1}{s}+\left(\frac{e^{\frac{2\pi x}{a}\sqrt{-1}}}{s-\frac{2\pi}{a}\sqrt{-1}}+\frac{e^{-\frac{2\pi x}{a}\sqrt{-1}}}{s-\frac{2\pi}{a}\sqrt{-1}}\right)+\left(\frac{e^{\frac{4\pi x}{a}\sqrt{-1}}}{s+\frac{4\pi}{a}\sqrt{-1}}+\frac{e^{-\frac{4\pi x}{a}\sqrt{-1}}}{s+\frac{4\pi}{a}\sqrt{-1}}\right)+\ldots\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

(41) $$e^{sx}=2(e^{as}-1)\left\{\frac{1}{2as}+\frac{as\cos\frac{2\pi x}{a}-2\pi\sin\frac{2\pi x}{a}}{4\pi^2+a^2s^2}+\frac{as\cos\frac{4\pi x}{a}-4\pi\sin\frac{4\pi x}{a}}{16\pi^2+a^2s^2}+\ldots\right\}$$

L'équation (41) pourrait être aisément déduite des formules (65) et (66) de la page 308.

Supposons encore

(42) $$F(r)=e^{ar}-2\cos br+e^{-ar},$$

a, b désignant deux constantes positives, et faisons, pour plus de commodité,

(43) $$c=\sqrt{a^2+b^2},\qquad \theta=\operatorname{arctang}\frac{b}{a}.$$

L'équation (5) deviendra

(44) $$e^{ar} - 2\cos br + e^{-ar} = 0,$$

puis on en tirera, en désignant par n un nombre entier quelconque,

(45) $$r = \pm \frac{2n\pi\sqrt{-1}}{a \pm b\sqrt{-1}} = \pm \frac{2n\pi}{c}(\cos\theta \mp \sqrt{-1}\sin\theta)\sqrt{-1}.$$

Donc les racines de l'équation (44) auront pour modules les différents termes de la série

(46) $$0, \quad \frac{2\pi}{c}, \quad \frac{4\pi}{c}, \quad \frac{6\pi}{c}, \quad \text{etc....}$$

Cela posé, il est facile de reconnaître que, si l'on attribue au module ρ de la variable r une valeur infiniment grande prise dans la série

(47) $$\frac{\pi}{c}, \quad \frac{3\pi}{c}, \quad \frac{5\pi}{c}, \quad \frac{7\pi}{c}, \quad \text{etc...},$$

et à la variable x une valeur positive renfermée entre les limites 0, a, le rapport

(48) $$\frac{e^{rx}}{F(r)} = \frac{e^{rx}}{e^{ar} - 2\cos br + e^{-ar}}$$

restera infiniment petit, quel que soit d'ailleurs le quotient $\frac{r}{\rho}$. Donc, en vertu de l'équation (32), on aura, pour des valeurs de x renfermées entre les limites $x = 0$, $x = a$,

(49) $$e^{sx} = (e^{as} - 2\cos bs + e^{-as}) \mathcal{E} \frac{1}{s-r} \frac{e^{rx}}{((e^{ar} - 2\cos br + e^{-ar}))},$$

ou, ce qui revient au même,

(50) $$\frac{e^{sx}}{e^{as} - 2\cos bs + e^{-as}} = \frac{1+sx}{(a^2+b^2)s^2}$$

$$- \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}} \frac{1}{2\sin\frac{2n\pi b}{b-a\sqrt{-1}}} \left\{ \frac{e^{\frac{2n\pi x}{b-a\sqrt{-1}}}}{2n\pi - (b - a\sqrt{-1})s} + \frac{e^{-\frac{2n\pi x}{b-a\sqrt{-1}}}}{2n\pi + (b - a\sqrt{-1})s} \right\}$$

$$- \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}} \frac{1}{2\sin\frac{2n\pi b}{b+a\sqrt{-1}}} \left\{ \frac{e^{\frac{2n\pi x}{b+a\sqrt{-1}}}}{2n\pi - (b + a\sqrt{-1})s} + \frac{e^{-\frac{2n\pi x}{b+a\sqrt{-1}}}}{2n\pi + (b + a\sqrt{-1})s} \right\},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de n.

Si l'on fait maintenant $b=a$, on trouvera, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites b et a,

$$(51)\qquad \frac{e^{sx}}{e^{as}-2\cos as+e^{-as}}=\frac{1+sx}{2a^2s^2}$$

$$-\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\frac{(-1)^n e^{\frac{n\pi x}{a}}}{(e^{n\pi}-e^{-n\pi})\sqrt{-1}}\left\{\frac{e^{\frac{n\pi x}{a}\sqrt{-1}}}{2n\pi-(1-\sqrt{-1})as}-\frac{e^{-\frac{n\pi x}{a}\sqrt{-1}}}{2n\pi-(1+\sqrt{-1})as}\right\}$$

$$+\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\frac{(-1)^n e^{-\frac{n\pi x}{a}}}{(e^{n\pi}-e^{-n\pi})\sqrt{-1}}\left\{\frac{e^{\frac{n\pi x}{a}\sqrt{-1}}}{2n\pi+(1+\sqrt{-1})as}-\frac{e^{-\frac{n\pi x}{a}\sqrt{-1}}}{2n\pi+(1-\sqrt{-1})as}\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(52)\qquad \frac{e^{sx}}{e^{as}-2\cos as+e^{-as}}=\frac{1+sx}{2a^2s^2}$$

$$-\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\left\{\frac{\frac{as}{2}\cos\frac{\pi x}{a}-\left(\pi-\frac{as}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}}{\pi^2-\pi as+\frac{1}{2}a^2s^2}\,e^{\frac{\pi x}{a}}-\frac{\frac{as}{2}\cos\frac{\pi x}{a}-\left(\pi+\frac{as}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}}{\pi^2+\pi as+\frac{1}{2}a^2s^2}\,e^{-\frac{\pi x}{a}}\right\}$$

$$+\frac{1}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\left\{\frac{\frac{as}{2}\cos\frac{2\pi x}{a}-\left(2\pi-\frac{as}{2}\right)\sin\frac{2\pi x}{a}}{2^2\pi^2-2\pi as+\frac{1}{2}a^2s^2}\,e^{\frac{2\pi x}{a}}-\frac{\frac{as}{2}\cos\frac{2\pi x}{a}-\left(2\pi+\frac{as}{2}\right)\sin\frac{2\pi x}{a}}{2^2\pi^2+2\pi as+\frac{1}{2}a^2s^2}\,e^{-\frac{2\pi x}{a}}\right\}.$$

— etc.....

Si l'on prenait, au contraire, $b=\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, on trouverait $b=\frac{a}{\sqrt{3}}$,

$$(53)\qquad \frac{e^{sx}}{e^{as}-2\cos\frac{as}{\sqrt{3}}+e^{-as}}=\frac{3}{4}\,\frac{1+sx}{a^2s^2}$$

$$-\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\frac{1}{2\sin\frac{(1+3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})n\pi}{2}}\left\{\frac{e^{\frac{n\pi x\sqrt{3}}{2a}}\,e^{\frac{3n\pi x}{2a}\sqrt{-1}}}{2n\pi-\frac{as}{\sqrt{3}}+as\sqrt{-1}}+\frac{e^{-\frac{n\pi x\sqrt{3}}{2a}}\,e^{-\frac{3n\pi x}{2a}\sqrt{-1}}}{2n\pi+\frac{as}{\sqrt{3}}-as\sqrt{-1}}\right\}$$

$$-\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\frac{1}{2\sin\frac{(1-3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})n\pi}{2}}\left\{\frac{e^{\frac{n\pi x\sqrt{3}}{2a}}\,e^{-\frac{3n\pi x}{2a}\sqrt{-1}}}{2n\pi-\frac{as}{\sqrt{3}}-as\sqrt{-1}}+\frac{e^{-\frac{n\pi x\sqrt{3}}{2a}}\,e^{\frac{3n\pi x}{2a}\sqrt{-1}}}{2n\pi+\frac{as}{\sqrt{3}}+as\sqrt{-1}}\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

(54) $$\frac{e^{sx}}{e^{as}-2\cos\frac{as}{\sqrt{3}}+e^{-as}}=\frac{3}{4}\,\frac{1+sx}{a^2s^2}$$

$$-\frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}\left\{\frac{\left(\pi-\frac{as}{2\sqrt{3}}\right)\cos\frac{3\pi x}{2a}+\frac{as}{2}\sin\frac{3\pi x}{2a}}{\pi^2-\pi\frac{as}{\sqrt{3}}+\frac{a^2s^2}{3}}e^{\frac{\pi x\sqrt{3}}{2a}}+\frac{\left(\pi+\frac{as}{2\sqrt{3}}\right)\cos\frac{3\pi x}{2a}+\frac{as}{2}\sin\frac{3\pi x}{2a}}{\pi^2+\pi\frac{as}{\sqrt{3}}+\frac{a^2s^2}{3}}e^{-\frac{\pi x\sqrt{3}}{2a}}\right\}$$

$$+\frac{1}{e^{\pi\sqrt{3}}-e^{-\pi\sqrt{3}}}\left\{\frac{\left(2\pi-\frac{as}{2\sqrt{3}}\right)\sin\frac{3\pi x}{a}-\frac{as}{2}\cos\frac{3\pi x}{a}}{2^2\pi^2-2\pi\frac{as}{\sqrt{3}}+\frac{a^2s^2}{3}}e^{\frac{\pi x\sqrt{3}}{a}}-\frac{\left(2\pi+\frac{as}{2\sqrt{3}}\right)\sin\frac{3\pi x}{a}-\frac{as}{2}\cos\frac{3\pi x}{a}}{2^2\pi^2+2\pi\frac{as}{\sqrt{3}}+\frac{a^2s^2}{3}}e^{-\frac{\pi x\sqrt{3}}{a}}\right\}$$

+ etc.....

En développant les deux membres de chacune des équations qui précèdent suivant les puissances ascendantes de x, et comparant ensuite les coefficients des puissances semblables, on obtiendrait de nouvelles équations dignes de remarque, parmi lesquelles se trouvent comprises les formules (37), (38), (39) des pages 290 et 291.

Supposons enfin

(55) $$F(r)=e^{ar^2}-2\cos br^2+e^{-ar^2},$$

a, b désignant toujours deux constantes positives. L'équation (5) deviendra

(56) $$e^{ar^2}-2\cos br^2+e^{-ar^2}=0;$$

puis l'on en tirera, en adoptant les notations (43), et désignant par n un nombre entier quelconque,

(57) $$r^2=\frac{\pm 2n\pi\sqrt{-1}}{a\pm b\sqrt{-1}}=\pm\frac{2n\pi}{c}(\cos\theta\mp\sqrt{-1}\sin\theta)\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

(58) $$r^2=\frac{2n\pi}{c}\left\{\cos\left(\theta\mp\frac{\pi}{2}\right)\mp\sqrt{-1}\sin\left(\theta\mp\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

On trouvera par suite

(59) $$r=\pm\left(\frac{2n\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}\mp\frac{\pi}{4}\right)\mp\sqrt{-1}\sin\left(\frac{\theta}{2}\mp\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Donc les racines de l'équation (56) auront pour modules les différents termes de la série

(60) $$0, \quad \left(\frac{2\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{4\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{6\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{etc.}\ldots$$

Cela posé, il est facile de reconnaître que, si l'on attribue au module ρ de la variable r une valeur infiniment grande prise dans la série

(61) $$\left(\frac{\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{3\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{5\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{7\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{etc.}\ldots,$$

le rapport

(62) $$\frac{e^{rx}}{F(r)} = \frac{e^{rx}}{e^{ar^2} - 2\cos br^2 + e^{-ar^2}}$$

sera toujours infiniment petit, quelles que soient les valeurs du quotient $\frac{r}{\rho}$ et de la variable x. Donc, en vertu de la formule (32), on aura, pour toutes les valeurs possibles de x,

(63) $$e^{sx} = (e^{as^2} - 2\cos bs^2 + e^{-as^2}) \mathcal{E} \frac{1}{s-r} \frac{e^{rx}}{((e^{ar^2} - 2\cos br^2 + e^{-ar^2}))}.$$

Si maintenant on effectue les opérations indiquées par le signe $\mathcal{E}$, l'équation (63) offrira le développement de l'exponentielle e^{sx} en une série d'exponentielles de même forme, dans lesquelles la variable x aura pour coefficients non plus la quantité s, mais les diverses racines de l'équation (56). Si l'on fait en particulier $b = a$, l'équation (56) se trouvera réduite à

(64) $$e^{ar^2} - 2\cos ar^2 + e^{-ar^2} = 0,$$

puis en posant, pour abréger,

(65) $$N = \left(\frac{n\pi\sqrt{2}}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

on tirera de la formule (63)

(66)
$$\frac{e^{sx}}{e^{as^2}-2\cos as^2+e^{-as^2}}=\frac{1}{2a^2s^4}\left(1+\frac{sx}{1}+\frac{s^2x^2}{1.2}+\frac{s^3x^3}{1.2.3}\right)$$
$$+\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\frac{(-1)^nN}{4n\pi(e^{n\pi}-e^{-n\pi})}\left\{\begin{aligned}&\frac{e^{Nx\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{8}\right)}}{\left(se^{-\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}-N\right)\sqrt{-1}}-\frac{e^{Nx\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{8}\right)}}{\left(se^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}-N\right)\sqrt{-1}}\\&-\frac{e^{-Nx\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{8}\right)}}{\left(se^{-\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}+N\right)\sqrt{-1}}+\frac{e^{-Nx\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{8}\right)}}{\left(se^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}+N\right)\sqrt{-1}}\\&+\frac{e^{-Nx\left(\sin\frac{\pi}{8}-\sqrt{-1}\cos\frac{\pi}{8}\right)}}{se^{-\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}-N\sqrt{-1}}+\frac{e^{-Nx\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sqrt{-1}\cos\frac{\pi}{8}\right)}}{se^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}+N\sqrt{-1}}\\&-\frac{e^{Nx\left(\sin\frac{\pi}{8}-\sqrt{-1}\cos\frac{\pi}{8}\right)}}{se^{-\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}+N\sqrt{-1}}-\frac{e^{Nx\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sqrt{-1}\cos\frac{\pi}{8}\right)}}{se^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}-N\sqrt{-1}}\end{aligned}\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

(67)
$$\frac{e^{sx}}{e^{as^2}-2\cos as^2+e^{-as^2}}=\frac{1}{2a^2s^4}\left(1+\frac{sx}{1}+\frac{s^2x^2}{1.2}+\frac{s^3x^3}{1.2.3}\right)$$
$$+\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\frac{(-1)^nN}{2n\pi(e^{n\pi}-e^{-n\pi})}\left\{\begin{aligned}&\frac{s\sin\left(\frac{\pi}{8}+Nx\sin\frac{\pi}{8}\right)-N\sin\left(Nx\sin\frac{\pi}{8}\right)}{s^2-2sN\cos\frac{\pi}{8}+N^2}e^{Nx\cos\frac{\pi}{8}}\\&-\frac{s\sin\left(\frac{\pi}{8}-Nx\sin\frac{\pi}{8}\right)-N\sin\left(Nx\sin\frac{\pi}{8}\right)}{s^2+2sN\cos\frac{\pi}{8}+N^2}e^{-Nx\cos\frac{\pi}{8}}\\&+\frac{s\cos\left(\frac{\pi}{8}+Nx\cos\frac{\pi}{8}\right)-N\sin\left(Nx\cos\frac{\pi}{8}\right)}{s^2+2sN\sin\frac{\pi}{8}+N^2}e^{-Nx\sin\frac{\pi}{8}}\\&-\frac{s\cos\left(\frac{\pi}{8}-Nx\cos\frac{\pi}{8}\right)-N\sin\left(Nx\cos\frac{\pi}{8}\right)}{s^2-2sN\sin\frac{\pi}{8}+N^2}e^{Nx\sin\frac{\pi}{8}}\end{aligned}\right\}.$$

Il importe d'observer qu'il n'est pas permis d'attribuer aux constantes a et b, dans la formule (63), des valeurs nulles, mais seulement des valeurs très-petites. Si l'une de ces constantes s'évanouissait, si l'on supposait, par exemple, $b = 0$, le résidu intégral, compris dans la formule dont il s'agit, aurait une valeur principale indéterminée, et la série des résidus partiels qui le composent deviendrait divergente. Alors aussi les conditions énoncées dans le 2.e théorême ne pourraient plus être remplies; et le rapport (62) deviendrait infini, lorsqu'on attribuerait au module ρ de la variable r une valeur infiniment grande, et à l'angle τ, déterminé par l'équation (24), l'une des deux valeurs $-\frac{\pi}{4}$, $+\frac{\pi}{4}$, ou l'une des deux valeurs $-\frac{3\pi}{4}$, $+\frac{3\pi}{4}$.

3.e Théorême. *Soient r, s, x trois variables indépendantes, et $F(r)$ une fonction donnée de r. Si, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module ρ de la variable r, le rapport*

(68) $$\frac{\cos rx}{F(r)}$$

reste toujours fini ou infiniment petit, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{r}{\rho}$, on aura

(69) $$\cos sx = \mathcal{E}\,\frac{F(r)-F(s)}{r-s}\,\frac{\cos sx}{((F(r)))},$$

ou, ce qui revient au même,

(70) $$\cos sx = F(s)\,\mathcal{E}\,\frac{1}{s-r}\,\frac{\cos rx}{((F(r)))},$$

pourvu que l'on réduise le résidu intégral compris dans le second membre de l'équation (69) ou (70) à sa valeur principale.

Corollaire. En combinant l'équation (69) avec la formule (28), on en conclut

(71) $$\cos sx = \mathcal{E}\,\frac{\cos rx \int_0^1 F'[r+\lambda(s-r)]\,d\lambda}{((F(r)))}.$$

Exemples. Supposons d'abord

(72) $$F(r) = \sin \pi r,$$

a désignant une quantité positive. Alors, si l'on attribue au module ρ de la variable r une valeur infiniment grande, prise dans la série

(73) $$\frac{\pi}{2a}, \quad \frac{3\pi}{2a}, \quad \frac{5\pi}{2a}, \quad \frac{7\pi}{2a}, \quad \text{etc...},$$

et à la variable x une valeur réelle renfermée entre les limites $-a$, $+a$, le rapport (68), réduit à la forme

(74) $$\frac{\cos rx}{\sin ar}$$

sera toujours fini ou infiniment petit, et ne cessera d'être infiniment petit, en demeurant fini, que dans le cas où le quotient $\frac{r}{\rho}$ différera très-peu de ± 1. On aura donc, en vertu de l'équation (70), pour des valeurs de x renfermées entre les limites $x=-a$, $x=a$,

(75) $$\cos sx = \cos as \,\mathcal{E}\, \frac{1}{s-r}\, \frac{\cos rx}{((\sin ar))},$$

ou, ce qui revient au même,

(76) $$\cos sx = 2as \sin as \left\{ \frac{1}{2a^2s^2} + \frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\pi^2 - a^2s^2} - \frac{\cos\frac{2\pi x}{a}}{4\pi^2 - a^2s^2} + \frac{\cos\frac{3\pi x}{a}}{9\pi^2 - a^2s^2} - \ldots \right\}.$$

Si l'on prenait, au contraire,

(77) $$F(r) = \cos ar,$$

on trouverait, entre les limites $x=0$, $x=a$,

(78) $$\cos sx = \cos as \,\mathcal{E}\, \frac{1}{s-r}\, \frac{\cos rx}{((\cos ar))},$$

ou, ce qui revient au même,

(79) $$\cos sx = 4\pi \cos as \left\{ \frac{\cos\frac{\pi x}{2a}}{\pi^2 - 4a^2s^2} - \frac{3\cos\frac{3\pi x}{2a}}{9\pi^2 - 4a^2s^2} + \frac{5\cos\frac{3\pi x}{2a}}{25\pi^2 - 4a^2s^2} - \ldots \right\}.$$

Supposons encore

(80) $$F(r) = \sin ar + r\cos ar,$$

a désignant toujours une constante positive. Alors, si l'on attribue au module ρ de

la variable r une valeur infiniment grande, mais sensiblement distincte de celle que fournit l'équation

$$\sin ar + r\cos ar = 0, \tag{81}$$

et à la variable x une valeur réelle renfermée entre les limites $-a$, $+a$, le rapport (68) réduit à

$$\frac{\cos rx}{\sin ar + r\cos ar} \tag{82}$$

sera toujours fini ou infiniment petit, et ne cessera d'être infiniment petit, en demeurant fini, que dans le cas où le quotient $\frac{r}{\rho}$ différera très-peu de ± 1. On aura donc, en vertu de la formule (70), pour des valeurs de x comprises entre les limites $x = -a$, $x = a$,

$$\cos sx = (\sin as + s\cos as)\, \mathcal{E}\, \frac{1}{s-r}\, \frac{\cos rx}{((\sin ar + r\cos ar))}, \tag{83}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos sx = (\sin as + s\cos as)\, \mathrm{S}\, \frac{\cos rx}{(s-r)[(a+r)\cos ar - ar\sin ar]}. \tag{84}$$

Dans la formule (84), le signe S, placé devant le terme

$$\frac{\cos rx}{(s-r)[(a+r)\cos ar - ar\sin ar]}$$

indique la somme des valeurs que prend ce terme, quand on y substitue successivement, au lieu de r, les diverses racines de l'équation (81). Il est bon d'observer que cette équation peut s'écrire comme il suit

$$\tan g\, ar = -r, \tag{85}$$

et qu'elle a toutes ses racines réelles [voyez le 1.er volume, page 301].

Supposons enfin

$$\mathrm{F}(r) = e^{ar^2} - 2\cos br^2 + e^{-ar^2},$$

a et b désignant deux constantes positives. Alors, si l'on attribue au module ρ de la variable r une valeur infiniment grande prise dans la série (61), le rapport (68) restera infiniment petit, quelles que soient les valeurs du quotient $\frac{r}{\rho}$ et de la variable

x. Donc, en vertu de l'équation (70), on aura, pour toutes les valeurs possibles de x,

$$(86)\qquad \cos sx = (e^{as^2} - 2\cos bs^2 + e^{-as^2})\,\mathcal{E}\,\frac{1}{s-r}\,\frac{\cos rx}{((e^{ar^2} - 2\cos br^2 + e^{-ar^2}))}.$$

Dans cette dernière formule, comme dans l'équation (65), les constantes a et b peuvent être aussi petites que l'on voudra; mais il n'est pas permis de supposer que l'une d'elles s'évanouisse.

Si l'on fait en particulier $b = a$, on tirera de la formule (86)

$$(87)\qquad \frac{\cos sx}{e^{as^2} - 2\cos as^2 + e^{-as^2}} = \frac{1}{2a^2s^4}\left(1 - \frac{s^2x^2}{1.2}\right)$$

$$+ \mathrm{S}\,\frac{(-1)^n}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\left\{Nx\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{8}\right)\right\}}{as^2 - (2n\pi - as^2)\sqrt{-1}} + \dfrac{\cos\left\{Nx\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{8}\right)\right\}}{as^2 + (2n\pi - as^2)\sqrt{-1}} \\ - \dfrac{\cos\left\{Nx\left(\sin\frac{\pi}{8} - \sqrt{-1}\cos\frac{\pi}{8}\right)\right\}}{as^2 + (2n\pi + as^2)\sqrt{-1}} - \dfrac{\cos\left\{Nx\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sqrt{-1}\cos\frac{\pi}{8}\right)\right\}}{as^2 - (2n\pi + as^2)\sqrt{-1}} \end{array}\right\}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(88)\qquad \frac{\cos sx}{e^{as^2} - 2\cos as^2 + e^{-as^2}} = \frac{1}{2a^2s^4}\left(1 - \frac{s^2x^2}{1.2}\right)$$

$$+ \mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\frac{1}{2}as^2\left\{e^{Nx\sin\frac{\pi}{8}} + e^{-Nx\sin\frac{\pi}{8}}\right\}\cos\left(Nx\cos\frac{\pi}{8}\right)}{2n^2\pi^2 - 2n\pi as^2 + a^2s^4} \\ + \dfrac{\left(n\pi - \frac{1}{2}as^2\right)\left\{e^{Nx\sin\frac{\pi}{8}} - e^{-Nx\sin\frac{\pi}{8}}\right\}\sin\left(Nx\cos\frac{\pi}{8}\right)}{2n^2\pi^2 - 2n\pi as^2 + a^2s^4} \\ - \dfrac{\frac{1}{2}as^2\left\{e^{Nx\cos\frac{\pi}{8}} + e^{-Nx\cos\frac{\pi}{8}}\right\}\cos\left(Nx\sin\frac{\pi}{8}\right)}{2n^2\pi^2 + 2n\pi as^2 + a^2s^4} \\ - \dfrac{\left(n\pi + \frac{1}{2}as^2\right)\left\{e^{Nx\cos\frac{\pi}{8}} - e^{-Nx\cos\frac{\pi}{8}}\right\}\sin\left(Nx\sin\frac{\pi}{8}\right)}{2n^2\pi^2 + 2n\pi as^2 + a^2s^4} \end{array}\right.,$$

la valeur de N étant toujours déterminée par l'équation (65). Lorsque, dans la formule (88), on pose $as^2 = 2\pi$, on en conclut

(89)
$$\cos sx = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\right)^2\left(1-\frac{s^2x^2}{1.2}\right)$$

$$+\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}{2\pi}\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\frac{(-1)^n}{e^{n\pi}-e^{-n\pi}}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{(n-1)^2+1}\left(e^{Nx\sin\frac{\pi}{8}}+e^{-Nx\sin\frac{\pi}{8}}\right)\cos\left(Nx\cos\frac{\pi}{8}\right)\\&+\frac{n-1}{(n-1)^2+1}\left(e^{Nx\sin\frac{\pi}{8}}-e^{-Nx\sin\frac{\pi}{8}}\right)\sin\left(Nx\cos\frac{\pi}{8}\right)\\&-\frac{1}{(n+1)^2+1}\left(e^{Nx\cos\frac{\pi}{8}}+e^{-Nx\cos\frac{\pi}{8}}\right)\cos\left(Nx\sin\frac{\pi}{8}\right)\\&-\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\left(e^{Nx\cos\frac{\pi}{8}}-e^{-Nx\cos\frac{\pi}{8}}\right)\sin\left(Nx\sin\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}\right.;$$

la valeur de N étant déterminée par l'équation

(90)
$$N = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} s\sqrt{\pi}.$$

4.° Théorème. *Soient* r, s, x *trois variables indépendantes, et* $\mathrm{F}(r)$ *une fonction donnée de* r. *Si, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module* ρ *de la variable* r, *le rapport*

(91)
$$\frac{\sin rx}{\mathrm{F}(r)}$$

reste toujours fini ou infiniment petit, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du rapport $\frac{r}{\rho}$, *on aura*

(92)
$$\sin sx = \mathcal{E}\,\frac{\mathrm{F}(r)-\mathrm{F}(s)}{r-s}\,\frac{\sin rx}{((\mathrm{F}(r)))},$$

ou, ce qui revient au même,

(93) $$\sin sx = F(s) \mathcal{E} \frac{1}{s-r} \frac{\sin rx}{((F(r)))},$$

pourvu que l'on réduise le résidu intégral, compris dans le second membre de l'équation (92) *ou* (93), *à sa valeur principale.*

Corollaire. En combinant l'équation (92) avec la formule (28), on en conclut

(94) $$\sin sx = \mathcal{E} \frac{\sin rx \int_0^1 F'[r+\lambda(s-r)]\,d\lambda}{((F(r)))}.$$

Exemples. Supposons d'abord

$$F(r) = \sin ar,$$

a désignant une constante positive. On tirera de la formule (93), pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $x = 0$, $x = a$,

(95) $$\sin sx = \sin as \mathcal{E} \frac{1}{s-r} \frac{\sin rx}{((\sin ar))},$$

ou, ce qui revient au même,

(96) $$\sin sx = 2\pi \sin as \left\{ \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\pi^2 - a^2 s^2} - \frac{2 \sin \frac{2\pi x}{a}}{4\pi^2 - a^2 s^2} + \frac{3 \sin \frac{3\pi x}{a}}{9\pi^2 - a^2 s^2} - \text{etc.} \right\}.$$

Si l'on prenait au contraire

$$F(r) = \cos ar,$$

on trouverait, entre les limites $x = 0$, $x = a$,

(97) $$\sin sx = \sin as \mathcal{E} \frac{1}{s-r} \frac{\sin rx}{((\cos ar))},$$

ou, ce qui revient au même,

(98) $$\sin sx = 8as \cos as \left\{ \frac{\sin \frac{\pi x}{2a}}{\pi^2 - 4a^2 s^2} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{2a}}{9\pi^2 - 4a^2 s^2} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{2a}}{25\pi^2 - 4a^2 s^2} - \text{etc.} \right\}.$$

Il est bon d'observer qu'on pourrait déduire l'équation (96) de la formule (76) et l'équation (98) de la formule (79), à l'aide d'une différenciation et d'une intégration relatives à la variable x.

Supposons encore

$$F(r) = \sin ar + r \cos ar.$$

On trouvera entre les limites $x = -a$, $x = a$,

(99) $$\sin sx = (\sin as + s \cos as) \mathcal{E} \frac{1}{s-r} \frac{\sin rx}{((\sin ar + r \cos ar))},$$

ou, ce qui revient au même;

(100) $$\sin sx = (\sin as + s \cos as) \mathrm{S} \frac{\sin rx}{(s-r)[(a+r)\cos ar - ar \sin ar]},$$

la somme que le signe S indique devant être étendue à toutes les valeurs de r qui vérifient l'équation (81).

Supposons enfin

$$F(r) = e^{ar^2} - 2\cos br^2 + e^{-ar^2},$$

a et b désignant deux constantes positives, qui soient l'une et l'autre différentes de zéro. On trouvera, pour toutes les valeurs possibles de la variable x,

(101) $$\sin sx = (e^{as^2} - 2\cos bs^2 + e^{-as^2}) \mathcal{E} \frac{1}{s-r} \frac{\sin sx}{((e^{ar^2} - 2\cos br^2 + e^{-ar^2}))}.$$

Si l'on fait en particulier $b = a$, on tirera de la formule (101)

(102) $$\frac{\sin sx}{e^{as^2} - 2\cos as^2 + e^{-as^2}} = \frac{x}{2a^2 s^3}\left(1 - \frac{s^2 x^2}{2.3}\right)$$

$$+ \mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n N a s\sqrt{2}}{2n\pi(e^{n\pi} - e^{-n\pi})} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{e^{-\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}} \sin\left[Nx\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]}{as^2 - (2n\pi - as^2)\sqrt{-1}} + \dfrac{e^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}} \sin\left[Nx\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]}{as^2 + (2n\pi - as^2)\sqrt{-1}} \\ - \dfrac{e^{-\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}} \sin\left[Nx\left(\sin\frac{\pi}{8} - \sqrt{-1}\cos\frac{\pi}{8}\right)\right]}{2n\pi + as^2 - as^2\sqrt{-1}} - \dfrac{e^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}} \sin\left[Nx\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sqrt{-1}\cos\frac{\pi}{8}\right)\right]}{2n\pi + as^2 + as^2\sqrt{-1}} \end{array} \right.$$

la valeur de N étant déterminée par l'équation (65). Lorsque, dans la formule (102), on pose $as^2 = 2\pi$, on en conclut

$$(103)\qquad \frac{\sin sx}{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}=\frac{sx}{8\pi^2}\left(1-\frac{s^2x^2}{2.3}\right)$$

$$+\mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n N\sqrt{2}}{2n\pi s(e^{n\pi}-e^{-n\pi})}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{-\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}\sin\left[Nx\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]}{1-(n-1)\sqrt{-1}}+\dfrac{e^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}\sin\left[Nx\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]}{1+(n-1)\sqrt{-1}}\\[2ex]-\dfrac{e^{-\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}\sin\left[Nx\left(\sin\frac{\pi}{8}-\sqrt{-1}\cos\frac{\pi}{8}\right)\right]}{n+1-\sqrt{-1}}-\dfrac{e^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}\sin\left[Nx\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sqrt{-1}\cos\frac{\pi}{8}\right)\right]}{n+1+\sqrt{-1}}\end{array}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(104)\qquad \frac{\pi s\sqrt{2}}{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}\sin sx=\frac{s^2\sqrt{2}}{8\pi}\left(1-\frac{s^2x^2}{2.3}\right)$$

$$+\mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n N}{n(e^{n\pi}-e^{-n\pi})}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+(n-1)\sin\frac{\pi}{8}}{(n-1)^2+1}\left(e^{Nx\sin\frac{\pi}{8}}+e^{-Nx\sin\frac{\pi}{8}}\right)\sin\left(Nx\cos\frac{\pi}{8}\right)\\[2ex]+\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}-(n-1)\cos\frac{\pi}{8}}{(n-1)^2+1}\left(e^{Nx\sin\frac{\pi}{8}}-e^{-Nx\sin\frac{\pi}{8}}\right)\cos\left(Nx\cos\frac{\pi}{8}\right)\\[2ex]-\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}+(n+1)\cos\frac{\pi}{8}}{(n+1)^2+1}\left(e^{Nx\cos\frac{\pi}{8}}+e^{-Nx\cos\frac{\pi}{8}}\right)\sin\left(Nx\sin\frac{\pi}{8}\right)\\[2ex]-\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}-(n+1)\sin\frac{\pi}{8}}{(n+1)^2+1}\left(e^{Nx\cos\frac{\pi}{8}}-e^{-Nx\cos\frac{\pi}{8}}\right)\cos\left(Nx\sin\frac{\pi}{8}\right),\end{array}\right.$$

la valeur de N étant déterminée par l'équation (90).

Dans les applications que nous venons de faire de la formule (29), $f(x, y, \ldots r)$ a été remplacée par des fonctions des seules variables x et r. Mais il serait facile d'assigner aux expressions $f(x, y, \ldots r)$, $F(r)$ une multitude de valeurs propres à remplir, du moins entre certaines limites, les conditions énoncées dans le théorême 1.er, et tellement choisies que $f(x, y, \ldots r)$ renfermât, avec x et r, d'autres variables y, z...... Ainsi, par exemple, on conclura sans peine du théorême dont il s'agit que l'équation

$$(105)\qquad (e^{s^2x}+e^{-s^2x})\cos sy=(e^{as^2}-2\cos bs^2+e^{-as^2})\,\mathcal{E}\frac{1}{s-r}\,\frac{(e^{r^2x}+e^{-r^2x})\cos ry}{((e^{ar^2}-2\cos br^2+e^{-ar^2}))},$$

dans laquelle a, b désignent deux constantes positives, mais différentes de zéro, subsiste pour toutes les valeurs réelles de x comprises entre les limites $x = -a$, $x = +a$, et pour des valeurs quelconques de y.

Lorsqu'à l'aide de l'équation (26) ou (27) on a développé la fonction $f(x, y, \ldots s)$ en une série composée de fonctions de même espèce, il est souvent facile de trouver une infinité d'autres séries semblables à la première, et que l'on puisse encore considérer comme des développements de la fonction $f(x, y, \ldots s)$. En effet, pour y parvenir, il suffira de substituer, dans la formule (6), non plus la valeur de $\varphi(r)$ que détermine l'équation (25), mais celle que fournit l'équation (16), et de prendre pour $\psi(r)$ une fonction propre à vérifier la condition

(106) $$\mathcal{E} \frac{\psi(r) f(x, y, \ldots r)}{((F(r)))} = 0.$$

Or cette condition sera remplie, si l'on suppose 1.° que la fonction $\psi(r)$ conserve une valeur finie, pour toutes les valeurs finies de r, 2.° que, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module ρ de la variable r, le produit

(107) $$r \frac{\psi(r) f(x, y, \ldots r)}{F(r)}$$

reste toujours fini ou infiniment petit, quel que soit le quotient $\frac{r}{\rho}$, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du même quotient. Alors on n'altèrera pas l'équation (26) ou (27), en ajoutant au second membre le terme

(108) $$\mathcal{E} \frac{\psi(r) f(x, y, \ldots r)}{((F(r)))}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

2.° Théorème. *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème 1.er, si la fonction $\psi(r)$, conservant une valeur finie pour toutes les valeurs finies de la variable r, est telle que, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module ρ de cette variable, le produit (107) reste toujours fini ou infiniment petit, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{r}{\rho}$, on aura*

(109) $$f(x, y, \ldots s) = \mathcal{E} \frac{F(r) - F(s)}{r - r} \frac{f(x, y, \ldots r)}{((F(r)))} + \mathcal{E} \frac{\psi(r) f(x, y, \ldots r)}{((F(r)))},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(110)\qquad f(x,y,\ldots s)=F(s)\,\mathcal{E}\,\frac{1}{s-r}\,\frac{f(x,y,\ldots r)}{((F(r)))}+\mathcal{E}\,\frac{\psi(r)\,f(x,y,\ldots r)}{((F(r)))},$$

pourvu que l'on réduise chaque résidu intégral à sa valeur principale.

Corollaire. Rien n'empêche de supposer que la fonction $\psi(r)$, comprise dans la formule (109) ou (110), renferme avec la variable r la quantité s. Il en résulte que, dans le cas où la formule (110) subsiste, on n'altère pas cette formule, en y remplaçant $\psi(r)$ par le produit $F(s)\psi(r)$, en sorte qu'on a encore

$$(111)\qquad f(x,y,\ldots s)=F(s)\,\mathcal{E}\left(\frac{1}{s-r}+\psi(r)\right)\frac{f(x,y,\ldots r)}{((F(r)))},$$

Exemples. Concevons d'abord que l'on réduise $f(x,y,\ldots r)$ à l'une des fonctions $\cos rx$, $\sin rx$. Alors, en désignant par a une constante positive, par b une autre constante choisie arbitrairement, et posant de plus

$$F(r)=\sin ar+r\cos ar,\qquad \psi(r)=b,$$

on tirera de la formule (106), pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $x=-a$, $x=a$,

$$(112)\qquad \mathcal{E}\,\frac{b\cos rx}{((\sin ar+r\cos ar))}=0,\qquad (113)\qquad \mathcal{E}\,\frac{b\sin rx}{((\sin ar+r\cos ar))}=0,$$

et par conséquent on pourra aux équations (83) et (99) substituer les deux suivantes

$$(114)\qquad \cos sx=(\sin as+s\cos as)\,\mathcal{E}\left(\frac{1}{s-r}+b\right)\frac{\cos rx}{((\sin ar+r\cos ar))},$$

$$(115)\qquad \sin sx=(\sin as+s\cos as)\,\mathcal{E}\left(\frac{1}{s-r}+b\right)\frac{\sin rx}{((\sin ar+r\cos ar))},$$

ou, ce qui revient au même, les formules

$$(116)\qquad \cos sx=(\sin as+s\cos as)\,\mathrm{S}\left\{\left(\frac{1}{s-r}+b\right)\frac{\cos rx}{(a+r)\cos ar+ar\sin ar}\right\},$$

$$(117)\qquad \sin sx=(\sin as+s\cos as)\,\mathrm{S}\left\{\left(\frac{1}{s-r}+b\right)\frac{\sin rx}{(a+r)\cos ar-ar\sin ar}\right\},$$

dans lesquelles les sommes indiquées par le signe S doivent être étendues à toutes les racines de l'équation (81). Si l'on posait, au contraire,

$$F(r)=e^{ar^2}-2\cos ar^2+e^{-ar^2},$$

alors, en désignant par α, β des constantes quelconques, et prenant pour $\psi(r)$ une fonction entière des monomes

$$r, \quad \cos \alpha r, \quad \cos \beta r, \quad \text{etc...},$$

on tirerait de la formule (106), pour des valeurs quelconques de x,

$$(118) \quad \mathcal{E} \frac{\psi(r) \cos r x}{((e^{ar^2} - 2 \cos a r^2 + e^{-ar^2}))} = 0, \qquad (119) \quad \mathcal{E} \frac{\psi(r) \sin r x}{((e^{ar^2} - 2 \cos a r^2 + e^{-ar^2}))} = 0;$$

et par conséquent on pourrait, sans altérer les équations (88) et (102), ajouter à leurs seconds membres les résidus compris dans les formules (118) et (119). Si, pour fixer les idées, on suppose $\psi(r) = r$, la formule (118) donnera

$$(120) \quad \frac{x^2}{4\epsilon} = \mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\cos\left\{ N x \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sqrt{-1} \sin\frac{\pi}{8} \right) \right\}}{1 + \sqrt{-1}} + \dfrac{\cos\left\{ N x \left(\cos\frac{\pi}{8} - \sqrt{-1} \sin\frac{\pi}{8} \right) \right\}}{1 - \sqrt{-1}} \\[2ex] \dfrac{\cos\left\{ N x \left(\sin\frac{\pi}{8} - \sqrt{-1} \cos\frac{\pi}{8} \right) \right\}}{1 + \sqrt{-1}} - \dfrac{\cos\left\{ N x \left(\sin\frac{\pi}{8} + \sqrt{-1} \cos\frac{\pi}{8} \right) \right\}}{1 - \sqrt{-1}} \end{array} \right.$$

la valeur de N étant déterminée par l'équation (90).

Prenons enfin

$$f(x, y, \ldots r) = (e^{r^2 x} + e^{-r^2 x}) \cos r y, \quad \text{et} \quad F(r) = e^{ar^2} - 2 \cos b r^2 + e^{-ar^2},$$

a, b désignant deux constantes positives. Alors, en supposant toujours que $\psi(r)$ représente une fonction entière des monomes

$$r, \quad \cos \alpha r, \quad \cos \beta r, \quad \text{etc...},$$

on tirera de la formule (106), pour toutes les valeurs réelles de x comprises entre les limites $-a$, $+a$, et pour des valeurs quelconques de y,

$$(121) \qquad \mathcal{E} \frac{\psi(r)(e^{r^2 x} + e^{-r^2 x}) \cos r y}{((e^{ar^2} - 2 \cos b r^2 + e^{-ar^2}))} = 0.$$

Par conséquent l'équation (105) pourra être remplacée par la formule

$$(122) \qquad (e^{s^2 x} + e^{-s^2 x}) \cos s y =$$

$$(e^{as^2} - 2 \cos b s^2 + e^{-as^2}) \, \mathcal{E} \left(\frac{1}{s - r} + \psi(r) \right) \frac{(e^{r^2 x} + e^{-r^2 x}) \cos r y}{((e^{ar^2} - 2 \cos b r^2 + e^{-ar^2}))},$$

En terminant cet article, nous ferons remarquer que, dans le cas où plusieurs des racines r_1, r_2, r_3, ... de l'équation (5) deviennent égales entre elles, le développement de la fonction

$$f(x, y, \dots s),$$

déduit de la formule (26), (27), (109), ou (110), renferme non-seulement les fonctions de même espèce

$$f(x, y, \dots r_1), \qquad f(x, y, \dots r_2), \qquad f(x, y, \dots r_3), \qquad \text{etc.}\dots,$$

mais encore les valeurs que prennent quelques-unes des fonctions dérivées

$$(123) \qquad \frac{df(x, y, \dots r)}{dr}, \qquad \frac{d^2 f(x, y, \dots r)}{dr^2}, \qquad \text{etc.}\dots,$$

quand on y substitue les valeurs de r qui représentent des racines égales de l'équation (5). Telle est la raison pour laquelle les développements des fonctions

$$e^{sx}, \qquad \cos sx, \qquad \sin sx,$$

fournis par les équations (50), (51), (53), (66), (87), (102), (103), renferment non-seulement des fonctions de même espèce, c'est-à-dire, des exponentielles, des cosinus, ou des sinus de la forme

$$e^{rx}, \qquad \cos rx, \qquad \sin rx,$$

mais encore des termes proportionnels à quelques-unes des puissances entières de la variable x. En effet, ces puissances représentent, au signe près, ce que deviennent quelques-unes des dérivees de e^{rx}, de $\cos rx$, ou de $\sin rx$, quand on y pose $r = 0$.

Au reste, lorsque l'équation (5) a des racines égales, et qu'en vertu de cette égalité, certains termes du développement de $f(x, y, \dots s)$ prennent des formes particulières, on peut aisément les ramener à la forme générale, en faisant entrer dans leur composition des quantités infiniment petites. En effet, les valeurs des fonctions (123) correspondantes à une valeur donnée r_1 de la variable r peuvent être remplacées par les polynomes

$$\frac{1}{\varepsilon} f(x, y, \dots r_1 + \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} f(x, y, \dots r_1)$$

$$\frac{1}{2\varepsilon^2} f(x, y, \dots r_1 + 2\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^2} f(x, y, \dots r_1 + \varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon^2} f(x, y, \dots r_1),$$

etc...,

dans lesquels ε désigne un nombre infiniment petit, et chacun des termes contenus dans ces polynomes est simplement proportionnel à une certaine valeur de la fonction

$$f(x, y, \dots r).$$

Dans d'autres articles, nous ferons voir comment, à l'aide des principes ci-dessus établis, on peut développer une fonction quelconque en séries d'exponentielles, de sinus, de cosinus, etc....

SUR LES RÉSIDUS DES FONCTIONS

EXPRIMÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Le résidu intégral d'une fonction $f(r)$ de la variable r peut être facilement déterminé, dans un grand nombre de cas, à l'aide du théorème 3 de la page 274, c'est-à-dire à l'aide de l'équation

$$(1) \qquad \mathcal{E}((f(r))) = \mathcal{J},$$

dans laquelle $\mathcal{J}$ désigne la valeur du produit

$$(2) \qquad r\,\frac{f(r)-f(-r)}{2},$$

correspondante à des valeurs infinies réelles ou imaginaires de cette variable. De plus, comme l'expression (2) n'est pas altérée, quand on y remplace r par $-r$, les valeurs infinies dont il est ici question, pourront être choisies de telle manière que leurs parties réelles soient positives. Donc, si l'on suppose

$$(3) \qquad r = \rho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

ρ désignant le module de r, et τ un arc réel, il suffira, pour trouver $\mathcal{J}$, d'attribuer au module ρ des valeurs infinies, et à l'arc τ des valeurs comprises entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$.

Concevons maintenant que $f(r)$ renferme, avec la variable r, d'autres variables indépendantes, $x, y, \ldots$, et se présente sous la forme

$$(4) \qquad f(r) = \frac{\varphi(r)\,\mathrm{f}(x,r)}{F(r)},$$

ou

$$(5) \qquad f(r) = \frac{\varphi(r)\,\mathrm{f}(x,y,\ldots r)}{F(r)},$$

$\varphi(r)$, $\mathrm{f}(x,r)$, $\mathrm{f}(x,y,\ldots r)$ désignant des fonctions qui restent finies pour toutes les valeurs finies de r. $\mathcal{G}$ se changera en une certaine fonction $\mathcal{F}(x)$, ou $\mathcal{F}(x,y,\ldots)$ des variables x, y,...; et l'équation (1) donnera

$$(6) \qquad \mathcal{E}\frac{\varphi(r)\,\mathrm{f}(x,r)}{((\mathrm{F}(r)))} = \mathcal{F}(x),$$

ou

$$(7) \qquad \mathcal{E}\frac{\varphi(r)\,\mathrm{f}(x,y,\ldots r)}{((\mathrm{F}(r)))} = \mathcal{F}(x,y,\ldots).$$

Or, parmi les applications que l'on peut faire des deux formules qui précèdent, on doit principalement remarquer celles que nous allons obtenir, en remplaçant les fonctions $\mathrm{f}(x,r)$, $\mathrm{f}(x,y,\ldots r)$ par des intégrales définies.

Supposons d'abord que l'on attribue à la variable x une valeur réelle qui surpasse une quantité désignée par x_0, en sorte qu'on ait

$$(8) \qquad x > x_0;$$

et prenons d'ailleurs

$$(9) \qquad \mathrm{f}(x,r) = \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu,$$

$f(\mu)$ désignant une fonction qui reste finie entre les limites de l'intégration. On tirera de la formule (4)

$$(10) \qquad f(r) = \frac{\varphi(r)}{\mathrm{F}(r)} \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu,$$

et par suite l'expression (2) deviendra

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\frac{\varphi(r)}{\mathrm{F}(r)}\, r \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu - \frac{1}{2}\frac{\varphi(-r)}{\mathrm{F}(-r)}\, r \int_{x_0}^{x} e^{-r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu.$$

Concevons à présent que, pour des valeurs infinies de r dont la partie réelle soit positive, le produit

$$(12) \qquad \frac{\varphi(r)}{\mathrm{F}(r)}\, r \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu$$

se réduise à zéro, et le rapport

$$(13) \qquad \frac{\varphi(-r)}{\mathrm{F}(-r)}$$

à la constante c. Il est clair que ces mêmes valeurs réduiront la différence (11) au produit

(14) $$-\frac{1}{2}cf(x).$$

Effectivement, pour démontrer cette assertion, il suffit d'observer que, si, dans l'intégrale

(15) $$r\int_{x_0}^{\infty}e^{-r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu,$$

on substitue la valeur de r tirée de l'équation (3), en attribuant au module ρ une valeur très-considérable, puis à l'arc τ une valeur comprise entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, et faisant de plus

(16) $$x-\mu=\epsilon z,$$

on trouvera sensiblement

$$r\int_{x_0}^{\infty}e^{-r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu=(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)f(x)\int_{0}^{\rho(x-x_0)}e^{-z(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)}dz$$

$$=(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)f(x)\int_{0}^{\infty}e^{-z(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)}dz,$$

ou, ce qui revient au même,

(17) $$r\int_{x_0}^{\infty}e^{-r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu=f(x).$$

Cela posé, on aura

(18) $$\mathcal{f}(x)=-\frac{1}{2}cf(x),$$

et la formule (6) donnera

(19) $$\mathcal{E}\frac{\varphi(r)\int_{x_0}^{\infty}e^{-r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((F(r)))}=-\frac{1}{2}cf(x).$$

Ajoutons qu'en vertu du théorème 3 de la page 274, l'équation (19) continuera de subsister, si, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module ρ de la variable r, et pour des valeurs positives de $\cos\tau$, l'expression (12) et la différence

(20) $$\frac{\varphi(-r)}{F(-r)}-\partial,$$

restent toujours finies ou infiniment petites, mais finies seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{r}{\rho}$. Remarquons enfin que, si l'on désigne par ξ_1, ξ_2 deux quantités comprises entre les limites x_0, x, on pourra disposer de ces quantités de manière à vérifier les équations

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{\rho(x-\mu)\cos\tau}\cos[\rho(x-\mu)\sin\tau]f(\mu)\,d\mu = f(\xi_1)\int_{x_0}^{\infty} e^{\rho(x-\mu)\cos\tau}\cos[\rho(x-\mu)\sin\tau]\,d\mu$$

$$=\frac{e^{\rho(x-x_0)\cos\tau}\cos[\rho(x-x_0)\sin\tau-\tau]-\cos\tau}{\rho}f(\xi_1),$$

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{\rho(x-\mu)\cos\tau}\sin[\mu(x-\mu)\sin\tau]f(\mu)\,d\mu = f(\xi_2)\int_{x_0}^{\infty} e^{\rho(x-\mu)\cos\tau}\sin[\rho(x-\mu)\sin\tau)\,d\mu$$

$$=\frac{e^{\rho(x-x_0)\cos\tau}\sin[\rho(x-x_0)\sin\tau-\tau]+\sin\tau}{\rho}f(\xi_2),$$

et par conséquent de manière à vérifier la formule

(21) $$\int_{x_0}^{\infty} e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu = \int_{x_0}^{\infty} e^{\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu =$$

$$\frac{e^{\rho(x-x_0)\cos\tau}\cos[\rho(x-x_0)\sin\tau-\tau]-\cos\tau}{\rho}f(\xi_1)+\sqrt{-1}\,\frac{e^{\rho(x-x_0)\cos\tau}\sin[\rho(x-x_0)\sin\tau-\tau]+\sin\tau}{\rho}f(\xi_2);$$

d'où il est aisé de conclure que, pour des valeurs positives de $\cos\tau$, l'expression (12) sera finie ou infiniment petite, lorsque le produit

(22) $$\frac{\varphi(r)}{F(r)}e^{r(x-x_0)}$$

sera lui-même fini ou infiniment petit. On peut donc énoncer la proposition suivante.

1.er Théorème. *Soient* $\varphi(r)$ *et* $f(\mu)$ *des fonctions de* r *et de* μ, *qui demeurent finies, la première pour toutes les valeurs finies de* r, *et la seconde pour les valeurs de* μ *comprises entre les limites*

$$\mu = x_0, \qquad \mu = x > x_0.$$

Soient de plus c *une constante déterminée,* $F(r)$ *une fonction quelconque de la variable* r, *et* ρ *le module de cette variable, en sorte qu'on ait*

$$r = \rho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau).$$

Si, pour des valeurs de ρ *infiniment grandes, mais convenablement choisies, et pour des valeurs positives de* $\cos\tau$, *les expressions*

$$(20) \qquad \frac{\varphi(-r)}{F(-r)} - c, \qquad\qquad (22) \qquad \frac{\varphi(r)}{F(r)} e^{r(x-x_0)}$$

restent toujours finies ou infiniment petites, et finies seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières de $\cos\tau$, *on aura*

$$(19) \qquad \mathcal{E}\frac{\varphi(r)\int_{x_0}^{\infty} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((F(r)))} = -\frac{1}{2} c f(x),$$

pourvu que l'on réduise le résidu intégral

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(r)\int_{x_0}^{\infty} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((F(r)))}$$

à sa valeur principale.

Nota. Si l'on supposait précisément $x = x_0$, le premier membre de la formule (19) s'évanouirait, et par conséquent, cette formule deviendrait inexacte. Ajoutons que, si les conditions énoncées dans le 1.er théorème sont remplies seulement pour des valeurs de x renfermées entre certaines limites, la formule (19) ne devra pas être étendue hors de ces limites.

Exemples. Soient

$$F(r) = e^{ar} - 1, \qquad \text{et} \qquad \varphi(r) = 1,$$

a désignant une quantité positive. Le rapport

$$\frac{\varphi(-r)}{F(-r)} = -\frac{1}{1 - e^{-ar}}$$

se réduira généralement à la quantité -1 pour les valeurs infinies de r dont la

partie réelle sera positive; et, si l'on pose en conséquence $c = -1$, les expressions (20) et (22) deviendront respectivement

$$(23)\qquad 1 - \frac{1}{1-e^{-ar}} = -\frac{1}{e^{ar}-1}, \qquad\qquad (24)\qquad \frac{e^{r(x-x_0)}}{e^{ar}-1}.$$

Or, il est facile de reconnaître que, si l'on attribue au module ρ de la variable r une valeur infiniment grande prise dans la série

$$(25)\qquad \frac{\pi}{a},\quad \frac{3\pi}{a},\quad \frac{5\pi}{a},\quad \frac{7\pi}{a},\quad \text{etc...},$$

et à $\cos\tau$ une valeur positive, en supposant d'ailleurs la variable x renfermée entre les limites x_0, x_0+a, chacune des expressions (23), (24) sera toujours finie ou infiniment petite, et finie seulement dans le voisinage des valeurs de τ déterminées par la formule $\cos\tau = 0$. Donc, en vertu de l'équation (19), on aura, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x_0, x_0+a,

$$(26)\qquad \mathcal{E}\frac{\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-1))} = \frac{1}{2} f(x),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(27)\qquad \frac{1}{2} f(x) =$$

$$\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(\mu)\,d\mu + \frac{2}{a}\int_{x_0}^{x} \cos\frac{2\pi(x-\mu)}{a} f(\mu)\,d\mu + \frac{2}{a}\int_{x_0}^{x} \cos\frac{4\pi(x-\mu)}{a} f(\mu)\,d\mu + \ldots;$$

puis, en faisant, pour plus de commodité,

$$\frac{2\pi(x-\mu)}{a} = \nu,$$

on trouvera

$$(28)\qquad \frac{\pi}{2} f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi(x-x_0)}{a}} f\left(x - \frac{a\nu}{2\pi}\right) d\nu$$

$$+ \int_0^{\frac{2\pi(x-x_0)}{a}} \cos\nu . f\left(x - \frac{a\nu}{2\pi}\right) d\nu + \int_0^{\frac{2\pi(x-x_0)}{a}} \cos 2\nu . f\left(x - \frac{a\nu}{2\pi}\right) d\nu + \text{etc...}$$

Si, dans l'équation (27), on pose $x_0 = 0$, $a = 2\pi$, on aura simplement

(29) $$\frac{\pi}{2} f(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} f(x - v)\, dv$$

$$+ \int_0^x \cos v . f(x-v)\, dv + \int_0^x \cos 2v . f(x-v)\, dv + \int_0^x \cos 3v . f(x-v)\, dv + \text{etc} \ldots ;$$

puis, en prenant $f(x) = 1$, on obtiendra l'équation connue

(30) $$\frac{\pi}{2} = \frac{x}{2} + \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \text{etc.} \ldots$$

Si l'on posait, au contraire,

$$f(x) = \cos x, \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \sin x,$$

on trouverait successivement

(31) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{2} \cos x &= \frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{4} \sin x + \frac{2}{1.3} \sin 2x + \frac{3}{2.4} \sin 3x + \frac{4}{3.5} \sin 4x + \text{etc} \ldots, \\ \frac{\pi}{2} \sin x &= \frac{x}{2} \sin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{1.3} \cos 2x - \frac{1}{2.4} \cos 3x - \frac{1}{3.5} \cos 4x - \ldots \end{aligned} \right.$$

Les formules (29), (30) et (31), dont la seconde entraîne les deux dernières, exigent que la variable x reste comprise entre les limites 0 et 2π. Elles deviendraient inexactes, si l'on supposait précisément $x = 0$.

Soient encore

$$F(r) = e^{ar} - r, \qquad \varphi(r) = r,$$

a désignant une quantité positive. Si l'on attribue à la variable r des valeurs infinies qui offrent une partie réelle positive, et restent sensiblement distinctes des racines de l'équation

(32) $$e^{ar} = r,$$

puis à la variable x une valeur réelle comprise entre les limites x_0, $x_0 + a$; le rapport

$$\frac{\varphi(-r)}{F(-r)} = -\frac{1}{1 + \frac{1}{r} e^{-ar}}$$

se réduira généralement à la constante $c = -1$, tandis que les expressions (20) et (22), savoir,

(33) $$1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{r} e^{-ar}} = \frac{1}{e^{ar} + r},$$ (34) $$\frac{r e^{r(x-x_0)}}{e^{ar} - r},$$

seront toujours finies ou infiniment petites, et finies seulement dans le voisinage des valeurs de r qui correspondront aux racines de l'équation (32). Donc, en vertu de l'équation (19), on aura, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $x = x_0$, $x = x_0 + a$,

(35) $$\frac{r \int_{x_0}^{\infty} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar} - r))} = \frac{1}{2} f(x),$$

ou, ce qui revient au même,

(36) $$\frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} \mathrm{S} \left\{ \frac{r}{r-1} \int_{x_0}^{\infty} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \right\},$$

le signe S devant être étendu à toutes les racines de l'équation (32).

Si l'on prenait

$$F(r) = e^{ar} - r, \qquad \varphi(r) = b + r,$$

b désignant une nouvelle constante, les conditions énoncées dans le théorème 1.er seraient toujours remplies, et l'on tirerait de la formule (19), pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites x_0, $x + a$,

(37) $$\mathcal{E} \frac{(b+r) \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar} - r))} = \frac{1}{2} f(x).$$

Il suit de l'équation (37) que l'expression

(38) $$\mathcal{E} \frac{(b+r) \int_{x_0}^{\infty} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar} - r))}$$

a une valeur indépendante de la constante b, ce qui tient à ce qu'on a généralement

(39) $$\mathcal{E} \frac{\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar} - r))} = 0.$$

Soient enfin

$$F(r)=e^{ar}-2br+e^{-ar}, \qquad \varphi(r)=e^{-ar},$$

a, b désignant deux constantes positives. Alors le théorême 1.er donnera, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=x_0$, $x=x_0+2a$,

$$(40) \qquad \mathcal{E}\frac{e^{-ar}\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-2br+e^{-ar}))}=-\frac{1}{2}f(x).$$

Au contraire, si, en supposant

$$F(r)=e^{ar}-2br+e^{-ar},$$

on prenait

$$\varphi(r)=e^{-ar}-2br,$$

ou plus généralement

$$\varphi(r)=e^{-ar}+\alpha+\beta r,$$

α, β désignant deux nouvelles constantes; l'équation (19), réduite à l'une des formes

$$(41) \qquad \mathcal{E}\frac{(e^{-ar}-2br)\int_{x_0}^{\infty} e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-2br+e^{-ar}))}=-\frac{1}{2}f(x),$$

$$(42) \qquad \mathcal{E}\frac{[e^{-ar}+\alpha+\beta r]\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-2br+e^{-ar}))}=-\frac{1}{2}f(x)$$

ne subsisterait plus que pour des valeurs de x renfermées entre les limites $x=x_0$, $x=x_0+a$.

Concevons maintenant que l'on attribue à la variable x une valeur particulière qui soit inférieure à une certaine quantité X, en sorte qu'on ait

$$(43) \qquad x<X.$$

Alors, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage pour démontrer le théorême 1.er, on établira sans difficulté la proposition suivante.

2.e Théorême. *Soient* $\varphi(r)$, *et* $f(\mu)$ *des fonctions de* r *et de* μ, *qui de-*

meurent finies, la première pour toutes les valeurs finies de r, *et la seconde pour les valeurs de* μ *comprises entre les limites*

$$\mu = x, \quad \mu = X > x,$$

Soit de plus C *une constante déterminée,* $F(r)$ *une fonction quelconque de la variable* r, *et* ρ *le module de cette variable, en sorte qu'on ait*

$$r = \rho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau).$$

Si, pour des valeurs de ρ *infiniment grandes, mais convenablement choisies, et pour des valeurs positives de* $\cos\tau$, *les expressions*

$$(44) \qquad \frac{\varphi(r)}{F(r)} - C, \qquad\qquad (45) \qquad \frac{\varphi(-r)}{F(-r)} e^{r(X-x)}$$

restent toujours finies ou infiniment petites, et finies seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières de $\cos\tau$, *on aura*

$$(46) \qquad \mathcal{E}\frac{\varphi(r)\int_x^X e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((F(r)))} = \frac{1}{2}Cf(x),$$

pourvu que l'on réduise le résidu intégral

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(r)\int_\infty^X e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((F(r)))}$$

à sa valeur principale.

Si l'on supposait précisément $x = X$, le premier membre de la formule (43) se réduirait à zéro, et par conséquent cette formule deviendrait inexacte. Ajoutons que, si les conditions énoncées dans le 2.e théorème sont remplies seulement pour des valeurs de x renfermées entre certaines limites, la formule (46) ne devra pas être étendue hors de ces limites.

Exemples. Si l'on prend

$$F(r) = e^{ar} - 1, \qquad \varphi(r) = 1,$$

a désignant une quantité positive, alors, en attribuant à r de très-grandes valeurs dont la partie réelle soit positive, on trouvera sensiblement

$$\frac{\varphi(r)}{\mathrm{F}(r)} = \frac{e^{ar}}{e^{ar}-1} = \frac{1}{1-e^{-ar}} = 1,$$

Par suite on pourra prendre $C=1$, et l'on tirera du théorême 2, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=X-a$, $x=X$,

$$(47)\qquad \mathcal{E}\,\frac{e^{ar}\int_x^X e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-1))} = \frac{1}{2}f(x),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(48)\qquad \frac{1}{2}f(x) =$$

$$\frac{1}{a}\int_x^X f(\mu)\,d\mu + \frac{2}{a}\int_x^X \cos\frac{2\pi(x-\mu)}{a}f(\mu)\,d\mu + \frac{2}{a}\int_x^X \cos\frac{4\pi(x-\mu)}{a}f(\mu)\,d\mu + \text{etc.},$$

puis, en faisant, pour plus de commodité,

$$\frac{2\pi(\mu-x)}{a} = v,$$

on trouvera

$$(49)\qquad \frac{\pi}{2}f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi(X-x)}{a}} f\left(x+\frac{av}{2\pi}\right)dv$$

$$+\int_0^{\frac{2\pi(X-x)}{a}} \cos v . f\left(x+\frac{av}{2\pi}\right)dv + \int_0^{\frac{2\pi(X-x)}{a}} \cos 2v . f\left(x+\frac{av}{2\pi}\right)dv + \text{etc.}\ldots$$

Soit encore

$$\mathrm{F}(r) = e^{ar} - r,$$

a désignant une constante positive. Alors, si l'on prend

$$\varphi(r) = e^{ar},$$

on tirera de la formule (46), pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $x=X-a$, $x=X$,

$$\mathcal{E}\,\frac{e^{ar}\int_x^X e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-r))} = \frac{1}{2}\,f(x). \tag{50}$$

Soit enfin

$$F(r) = e^{ar} - 2br + e^{-ar}.$$

Alors en prenant

$$\varphi(r) = e^{ar},$$

on trouvera, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $x = X - 2a$, $x = X$,

$$\mathcal{E}\,\frac{e^{ar}\int_x^X e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-2br+e^{-ar}))} = \frac{1}{2}\,f(x). \tag{51}$$

Si l'on prend au contraire

$$\varphi(r) = e^{ar} - 2br,$$

ou plus généralement

$$\varphi(r) = e^{ar} + \alpha + \beta r,$$

$f(r)$ désignant une fonction entière de r, on obtiendra, au lieu de l'équation (51), les deux formules

$$\mathcal{E}\,\frac{(e^{ar}-2br)\int_x^X e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-2br+e^{-ar}))} = \frac{1}{2}\,f(x), \tag{52}$$

$$\mathcal{E}\,\frac{[e^{ar}+\alpha+\beta r]\int_x^X e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-2br+e^{-ar}))} = \frac{1}{2}\,f(x), \tag{53}$$

dont chacune ne subsistera plus que pour des valeurs de x renfermées entre les limites $x = X - a$, $x = X$.

On peut encore déduire des théorêmes 1 et 2 une proposition qui mérite d'être remarquée, et que nous allons faire connaître.

3.ᵉ Théorême. *Soient* $F(r)$ *et* $f(x)$ *deux fonctions de* r *et de* x *qui demeurent finies, la première pour toutes les valeurs finies du module* ρ *de la variable* r, *la seconde pour toutes les valeurs réelles de* x *renfermées entre les limites*

$x = x_0$, $x = X > x_0$. *Concevons en outre que la fonction* $F(r)$ *puisse être partagée en deux autres* $\varphi(r)$, $\chi(r)$, *qui demeurent finies elles-mêmes avec la variable* r, *de telle sorte que, pour des valeurs de* r *infiniment grandes, mais dont les modules soient convenablement choisis, et dont les parties réelles soient positives, chacun des rapports*

$$(54) \qquad \frac{\varphi(-r)}{F(-r)}, \qquad\qquad (55) \qquad \frac{\chi(r)}{F(r)}$$

reste toujours fini ou infiniment petit, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{r}{\rho}$. *Enfin supposons chacune des quantités* x_0, X, *ou plutôt la différence* $X - x_0$ *choisie de manière que les conditions ci-dessus énoncées ne cessent pas d'être remplies, quand aux rapports* (54) *et* (55) *on substitue les produits de ces rapports par l'exponentielle*

$$e^{r(X-x_0)},$$

c'est-à-dire, les deux expressions

$$(56) \qquad \frac{\varphi(-r)}{F(-r)} e^{r(X-x_0)}, \qquad\qquad (57) \qquad \frac{\chi(r)}{F(r)} e^{r(X-x_0)}.$$

Alors on trouvera, pour toutes les valeurs de x *comprises entre les limites* x_0, X,

$$(58) \qquad f(x) = \mathcal{E} \frac{\varphi(r) \int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((F(r)))},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(59) \qquad f(x) = -\mathcal{E} \frac{\chi(r) \int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((F(r)))},$$

pourvu que l'on réduise le résidu intégral renfermé dans l'équation (58) *ou* (59) *à sa valeur principale.*

Démonstration. Si les conditions énoncées dans le 3.e théorême se trouvent remplies, et que l'on attribue à la variable r des valeurs infiniment grandes, mais dont les

modules soient convenablement choisis, et dont les parties réelles soient positives, non-seulement les expressions (56), (57), et, à plus forte raison, les deux produits

(60) $$\frac{\varphi(-r)}{\mathrm{F}(-r)}e^{r(X-x)},$$ (61) $$\frac{\chi(r)}{\mathrm{F}(r)}e^{r(x-x_0)},$$

seront toujours finis ou infiniment petits, et finis seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{r}{\rho}$; mais on pourra encore en dire autant des différences

(62) $$\frac{\varphi(r)}{\mathrm{F}(r)}-1,$$ (63) $$\frac{\chi(-r)}{\mathrm{F}(-r)}-1,$$

puisqu'en vertu de l'équation identique

(64) $$\varphi(r)+\chi(r)=\mathrm{F}(r),$$

ces différences sont équivalentes, au signe près, la première à la fraction (55), la seconde à la fraction (54). Par suite, le théorème 1.er fournira l'équation

(65) $$\mathcal{E}\frac{\chi(r)\int_{x_0}^{x}e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((\mathrm{F}(r)))}=-\frac{1}{2}f(x),$$

tandis que le théorème 2 donnera

(66) $$\mathcal{E}\frac{\varphi(r)\int_{x}^{X}e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((\mathrm{F}(r)))}=\frac{1}{2}f(x).$$

De plus, comme la formule (64) permet de remplacer, dans les équations (65) et (66), $\chi(r)$ par $\mathrm{F}(r)-\varphi(r)$, ou plus simplement par $-\varphi(r)$, et $\varphi(r)$ par $\mathrm{F}(r)-\chi(r)$, ou plus simplement par $-\chi(r)$, on trouvera encore

(67) $$\mathcal{E}\frac{\varphi(r)\int_{x_0}^{x}e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((\mathrm{F}(r)))}=\frac{1}{2}f(x),$$

et

(68) $$\mathcal{E}\frac{\chi(r)\int_{x}^{X}e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((\mathrm{F}(r)))}=-\frac{1}{2}f(x):$$

Si maintenant on combine entre elles, par voie d'addition, 1.° les formules (66) et (67), 2.° les formules (65) et (68), on obtiendra précisément les équations (58) et (59).

Nota. Il est bon d'observer qu'en égalant à zéro les rapports (54) et (55), on obtiendra les deux formules

$$\frac{1}{1+\frac{\chi(-r)}{\varphi(-r)}}=0, \qquad \frac{1}{1+\frac{\varphi(r)}{\chi(r)}}=0,$$

desquelles on tirera $\frac{\chi(-r)}{\varphi(-r)}=\frac{1}{0}$, ou, ce qui revient au même,

(69) $$\frac{\varphi(-r)}{\chi(-r)}=0,$$

et

(70) $$\frac{\varphi(r)}{\chi(r)}=\frac{1}{0}.$$

De même, en égalant à zéro les rapports (56) et (57), on obtiendra les équations

$$\frac{e^{r(X-x_0)}}{1+\frac{\chi(-r)}{\varphi(-r)}}=0, \qquad \frac{e^{r(X-x_0)}}{1+\frac{\varphi(r)}{\chi(r)}}=0,$$

que l'on pourra présenter sous les formes

$$\frac{\chi(-r)}{\varphi(-r)}e^{-r(X-x_0)}+e^{-r(X-x_0)}=\frac{1}{0}, \qquad \frac{\varphi(r)}{\chi(r)}e^{-r(X-x_0)}+e^{-r(X-x_0)}=\frac{1}{0},$$

et desquelles on tirera, en attribuant à r des valeurs dont les parties réelles restent positives,

$$\frac{\chi(-r)}{\varphi(-r)}e^{-r(X-x_0)}=\frac{1}{0},$$

ou, ce qui revient au même,

(71) $$\frac{\varphi(-r)}{\chi(-r)}e^{-r(X-x_0)}=0,$$

et

(72) $$\frac{\varphi(r)}{\chi(r)}e^{-r(X-x_0)}=\frac{1}{0}.$$

Cela posé, pour satisfaire aux conditions énoncées dans le 3.ᵉ théorème, il faudra évidemment décomposer $f(r)$ en deux fonctions telles que le rapport de la première à la seconde, savoir,

$$(73) \qquad \frac{\varphi(r)}{\chi(r)}$$

devienne généralement, pour des valeurs infinies de la variable r, infiniment grand ou infiniment petit, suivant que la partie réelle de cette variable sera positive ou négative, et choisir ensuite la différence $X - x_0$, de manière que l'expression

$$(74) \qquad \frac{\varphi(r)}{\chi(r)} e^{-r(X-x_0)},$$

c'est-à-dire, le rapport (73) multiplié par l'exponentielle $e^{-r(X-x_0)}$ jouisse encore de la même propriété.

Exemples. Soit d'abord

$$F(r) = e^{ar} - 1,$$

a désignant une constante positive. Si l'on prend, dans ce cas,

$$\varphi(r) = e^{ar}, \qquad \chi(r) = -1,$$

le rapport

$$\frac{\varphi(r)}{\chi(r)} = -e^{ar}$$

deviendra, pour des valeurs infinies de la variable r, infiniment grand, ou infiniment petit, suivant que la partie réelle de r sera positive ou négative; et, pour que le produit

$$\frac{\varphi(r)}{\chi(r)} e^{-r(X-x_0)} = -e^{r(a-X+x_0)}$$

jouisse encore de la même propriété, il sera évidemment nécessaire que la différence $X - x_0$ reste inférieure à la constante a, c'est-à-dire, que la quantité X, supérieure à x_0, reste inférieure à la limite $x_0 + a$. D'ailleurs il est facile de s'assurer que, si l'on prend $F(r) = e^{ar} - 1$, $\varphi(r) = e^{ar}$, $\chi(r) = -1$, $X > x_0$ et $< x_0 + a$, les conditions énoncées dans le 3.ᵉ théorème seront toutes remplies. Alors en effet les expressions (54), (55), (56), (57) s'évanouiront pour des valeurs infinies de la variable r, tant que la partie réelle de cette variable, étant positive, ne de-

viendra pas sensiblement égale à zéro; et, quand cette partie réelle différera très-peu de zéro, il suffira, pour que les mêmes expressions conservent des valeurs finies, d'attribuer au module de r des valeurs infiniment grandes prises dans la série (25). Donc, en vertu du 3.e théorême et des formules (58), (59), on aura, entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + a$,

$$(75) \qquad f(x) = \mathcal{E}\frac{e^{ar}\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar}-1))},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(76) \qquad f(x) = \mathcal{E}\frac{\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar}-1))}.$$

Si l'on développe les seconds membres de ces dernières formules, on obtiendra la suivante

$$(77) \qquad f(x) =$$

$$\frac{1}{a}\int_{x_0}^{X} f(\mu)\, d\mu + \frac{2}{a}\int_{x_0}^{X} \cos\frac{2\pi(x-\mu)}{a} f(\mu)\, d\mu + \frac{2}{a}\int_{x_0}^{X} \cos\frac{4\pi(x-\mu)}{a} f(\mu)\, d\mu + \dots;$$

puis, en posant $x_0 = 0$, $X = a = 2\pi$, on retrouvera une équation que M. Fourier a donnée dans son premier Mémoire sur la théorie de la chaleur, savoir,

$$(78) \qquad \pi f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\mu)\, d\mu$$

$$+ \int_0^{2\pi} \cos(x-\mu) . f(\mu)\, d\mu + \int_0^{2\pi} \cos 2(x-\mu) . f(\mu)\, d\mu + \int_0^{2\pi} \cos 3(x-\mu) . f(\mu)\, d\mu + \dots.$$

Soit encore

$$F(r) = e^{ar} + 1.$$

Alors, en prenant $\varphi(r) = e^{ar}$, $\chi(r) = 1$, on tirera des formules (58) et (59), pour les valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + a$,

$$(79) \qquad f(x) = \mathcal{E}\frac{e^{ar}\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar}+1))} = -\mathcal{E}\frac{\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar}+1))},$$

ou, ce qui revient au même,

(80) $$f(x) =$$

$$\frac{2}{a}\left\{\int_{x_0}^{X} \cos\frac{\pi(x-\mu)}{a} f(\mu)\,d\mu + \int_{x_0}^{X} \cos\frac{3\pi(x-\mu)}{a} f(\mu)\,d\mu + \int_{x_0}^{X} \cos\frac{5\pi(x-\mu)}{a} f(\mu)\,d\mu + \ldots\right\};$$

puis, en posant $x_0 = 0$, $X = a = \pi$, ou bien $x_0 = 0$, $X = a = 2\pi$, on obtiendra les deux équations

(81) $$\frac{\pi}{2} f(x) =$$

$$\int_0^{\pi} \cos(x-\mu).f(\mu)\,d\mu + \int_0^{\pi} \cos 3(x-\mu).f(\mu)\,d\mu + \int_0^{\pi} \cos 5(x-\mu).f(\mu)\,d\mu + \text{etc.}\ldots,$$

(82) $$\pi f(x) =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\frac{x-\mu}{2} f(\mu)\,d\mu + \int_0^{2\pi} \cos\frac{3(x-\mu)}{2} f(\mu)\,d\mu + \int_0^{2\pi} \cos\frac{5(x-\mu)}{2} f(\mu)\,d\mu + \text{etc.}\ldots$$

De même, si l'on supposait

$$F(r) = e^{ar} - e^{a\alpha},$$

α désignant une constante réelle, alors, en prenant $\varphi(r) = e^{ar}$, $\chi(r) = e^{a\alpha}$, on trouverait, pour les valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + a$,

(83) $$f(x) = \mathcal{E}\,\frac{e^{ar}\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar} - e^{a\alpha}))},$$

ou, ce qui revient au même,

(84) $$\frac{a}{2} f(x) = \int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu$$

$$+ \int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\mu)} \cos\frac{2\pi(x-\mu)}{a} f(\mu)\,d\mu + \int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\mu)} \cos\frac{4\pi(x-\mu)}{a} f(\mu)\,d\mu + \text{etc.}\ldots$$

Cette dernière formule continue de subsister, dans le cas où l'on remplace la constante réelle α par une constante imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α, β désignant deux quantités réelles, et se divise alors en deux équations, savoir,

(85) $$\frac{a}{2}f(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\mu)}\cos\beta(x-\mu).f(\mu)\,d\mu +$$

$$\int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\mu)}\cos\beta(x-\mu).\cos\frac{2\pi(x-\mu)}{a}f(\mu)\,d\mu + \int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\mu)}\cos\beta(x-\mu).\cos\frac{4\pi(x-\mu)}{a}f(\mu)\,d\mu + \ldots,$$

et

(86) $$o = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\mu)}\sin\beta(x-\mu).f(\mu)\,d\mu +$$

$$\int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\mu)}\sin\beta(x-\mu).\cos\frac{2\pi(x-\mu)}{a}f(\mu)\,d\mu + \int_{x_0}^{X} e^{\alpha(x-\mu)}\sin\beta(x-\mu).\cos\frac{4\pi(x-\mu)}{a}f(\mu)\,d\mu + \ldots$$

Soit maintenant

$$F(r) = e^{ar} - 1.$$

Alors, si l'on prend $\varphi(r) = e^{ar}$, $\chi(r) = -r$, le rapport

$$\frac{\varphi(r)}{\chi(r)} = -\frac{1}{2}e^{ar}$$

deviendra, pour des valeurs infinies de la variable r, infiniment grand ou infiniment petit, suivant que la partie réelle de r sera positive ou négative; et, pour que le produit

$$\frac{\varphi(r)}{\chi(r)}e^{-r(x-x_0)} = -\frac{1}{r}e^{r(a-X+x_0)}$$

jouisse encore de la même propriété, il sera nécessaire que la quantité X, supérieure à x_0, reste inférieure à $x_0 + a$. D'ailleurs il est aisé d'assurer que, si l'on suppose $\varphi(r) = e^{ar}$, $\chi(r) = -r$, $X - x_0 > 0$ et $< a$, toutes les conditions énoncées dans le 3.ᵉ théorème seront remplies. Donc, en vertu des formules (58) et (59), on aura, pour les valeurs de x renformées entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + a$,

(87) $$f(x) = \mathcal{E}\frac{e^{ar}\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-r))} = \mathcal{E}\frac{r\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-r))},$$

ou, ce qui revient au même,

(88) $$f(x) = \frac{1}{a} \mathrm{S} \left\{ \frac{r}{r-1} \int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \right\},$$

le signe S devant être étendu à toutes les racines de l'équation (32).

Supposons encore

$$\mathrm{F}(r) = e^{ar} - 2br + e^{-ar},$$

a et b désignant deux constantes positives. Alors, en prenant

$$\varphi(r) = e^{ar} - br, \qquad \chi(r) = e^{-ar} - br,$$

on tirera de la formule (58), pour des valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + a$,

(89) $$f(x) = \mathcal{E} \frac{(e^{ar} - br) \int_{x}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar} - 2br + e^{-ar}))},$$

et de la formule (59)

(90) $$f(x) = \mathcal{E} \frac{(br - e^{-ar}) \int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar} - 2br + e^{-ar}))}.$$

Si, dans la même hypothèse, on prenait

$$\varphi(r) = e^{ar} + \alpha + \beta r, \qquad \chi(r) = e^{-ar} - \alpha - (\beta + 2b) r,$$

α, β désignant deux constanses arbitraires, la formule (58) donnerait

(91) $$f(x) = \mathcal{E} \frac{(e^{ar} + \alpha + \beta r) \int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar} - 2br + e^{-ar}))},$$

la valeur de x devant toujours être renfermée entre les limites $x = x_0$, $x = X > x_0 + a$.

Aux applications que nous venons de faire des formules (58) et (59), on pourrait en ajouter un grand nombre d'autres. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par a une quantité positive, par b, A, B des constantes quelconques, et par $\mathrm{f}(r)$, $\mathrm{f}_1(r)$ des fonctions entières de r, on tirera de la formule (58), pour des valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + a$,

(92)
$$f(x) = \mathcal{E} \frac{e^{ar}\mathrm{f}(r)\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((\, e^{ar}\mathrm{f}(r) + \mathrm{f}_1(r)\,))},$$

et, pour des valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + 2a$,

(93)
$$f(x) = \mathcal{E} \frac{e^{ar}\mathrm{f}(r)\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((\, e^{ar}\mathrm{f}(r) + e^{-ar}\mathrm{f}_1(r)\,))},$$

(94)
$$f(x) = \mathcal{E} \frac{e^{ar}\mathrm{f}(r)\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} \mathrm{f}(\mu)\, d\mu}{((\, e^{ar}\mathrm{f}(r) - e^{a(b-r)}\mathrm{f}(b-r)\,))},$$

(95)
$$f(x) = \mathcal{E} \frac{(A+r)(B+r)e^{ar}\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((\, (A+r)(B+r)e^{ar} - (A-r)(B-r)e^{-ar}\,))},$$

(96)
$$f(x) = \mathcal{E} \frac{(e^{ar}\cos br - 1)\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((\, (e^{ar} + e^{-ar})\cos br - 2\,))},$$

(97)
$$f(x) = \mathcal{E} \frac{(e^{ar}\cos br + 1)\int_{x_0}^{X} e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((\, (e^{ar} + e^{-ar})\cos br + 2\,))},$$

etc.....

Ces diverses formules sont fort utiles dans la solution des problêmes de physique mathématique, surtout quand elles sont combinées avec celles qui se déduisent de la proposition suivante.

4.° Théorême. *Soit* $\varphi(x,r)$ *et* $f(\mu)$ *deux fonctions de* x, r *et* μ, *qui demeurent finies, la première pour toutes les valeurs de* x *et de* r, *la seconde pour toutes les valeurs de* μ *comprises entre les limites* $\mu = x_0$, $\mu = X > x_0$. *Soient de plus* $\mathrm{F}(r)$ *une fonction quelconque de la variable* r, *et* ρ *le module de cette variable. Si, pour des valeurs infiniment grandes, mais convenablement choisies, du module* ρ, *chacun des produits*

(98) $\dfrac{\varphi(x,r)}{\mathrm{F}(r)}\, e^{-rx_0}$, (99) $\dfrac{\varphi(x,r)}{\mathrm{F}(r)}\, e^{-rX}$,

reste toujours fini ou infiniment petit, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{r}{\rho}$, *on aura*

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(x,r)\int_{x_0}^{X}e^{-r\mu}f(\mu)\,d\mu}{((F(r)))}=0, \tag{100}$$

pourvu que l'on réduise le résidu intégral

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(x,r)\int_{x_0}^{X}e^{-r\mu}f(\mu)\,d\mu}{((F(r)))}$$

à sa valeur principale

Démonstration. La valeur générale de r pouvant être exprimée, à l'aide du module ρ et d'un arc réel τ, par une équation de la forme

$$r=\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau),$$

on trouvera, par un calcul semblable à celui dont nous nous sommes servis pour établir la formule (21),

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{x_0}^{X}e^{-r\mu}f(\mu)\,d\mu=\int_{x_0}^{X}e^{-\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)\mu}f(\mu)\,d\mu\\&=\frac{e^{-\rho x_0\cos\tau}\cos(\tau+\rho x_0\sin\tau)-e^{-\rho X\cos\tau}\cos(\tau+\rho X\sin\tau)}{\rho}f(\xi_1)\\&-\frac{e^{-\rho x_0\cos\tau}\sin(\tau+\rho x_0\sin\tau)-e^{-\rho X\cos\tau}\sin(\tau+\rho X\sin\tau)}{\rho}f(\xi_2)\cdot\sqrt{-1},\end{aligned}\right. \tag{101}$$

ξ_1, ξ_2 désignant deux quantités comprises entre les limites x_0, X; puis l'on en conclura

$$r\frac{\varphi(x,r)\int_{x_0}^{X}e^{-r\mu}f(\mu)\,d\mu}{F(r)} \tag{102}$$

$$=\frac{\varphi(x,r)}{F(r)}e^{-rx_0}[\cos(\tau+\rho x_0\sin\tau)+\sqrt{-1}\sin(\tau+\rho x_0\sin\tau)][f(\xi_1)\cos(\tau+\rho x_0\sin\tau)-\sqrt{-1}f(\xi_2)\sin(\tau+\rho x_0\sin\tau)]$$

$$-\frac{\varphi(x,r)}{F(r)}e^{-rX}[\cos(\tau+\rho X\sin\tau)+\sqrt{-1}\sin(\tau+\rho X\sin\tau)][f(\xi_1)\cos(\tau+\rho X\sin\tau)-\sqrt{-1}f(\xi_2)\sin(\tau+\rho X\sin\tau)]$$

Cela posé, il est clair que, si les conditions énoncées dans le théorème 4 sont remplies, le produit

$$(103) \qquad r\,\frac{\varphi(x,r)\displaystyle\int_{x_0}^{X} e^{-r\mu} f(\mu)\,d\mu}{\mathrm{F}(r)}$$

restera toujours fini ou infiniment petit pour de très-grandes valeurs du module ρ de la variable r, et fini seulement dans le voisinage de certaines valeurs particulières du quotient $\frac{r}{\rho}$. Par suite, le théorème 2 de la page 258 entraînera la formule (100).

Nota. Si les conditions énoncées dans le théorème 4 se trouvent remplies seulement pour les valeurs de x comprises entre certaines limites, par exemple, entre les limites $x = x_0$, $x = X$, la formule (100) ne devra pas être étendue hors de ces limites.

Exemples. Soient d'abord

$$\mathrm{F}(r) = e^{ar}\mathrm{f}(r) - e^{a(b-r)}\mathrm{f}(b-r),$$

et

$$\varphi(x,r) = e^{ar} e^{-r(x-2x_0)},$$

a désignant une quantité positive, b une constante quelconque, et $\mathrm{f}(r)$ une fonction entière de r. Alors, si l'on suppose la variable x renfermée entre les limites x_0, X, et $X - x_0 < a$, les expressions

$$\frac{\varphi(x,r)}{\mathrm{F}(r)} e^{-rx_0} = \frac{e^{ar} e^{-r(x-x_0)}\mathrm{f}(r)}{e^{ar}\mathrm{f}(r) - e^{a(b-r)}\mathrm{f}(b-r)},$$

$$\frac{\varphi(x,r)}{\mathrm{F}(r)} e^{-rX} = \frac{e^{ar} e^{-r(x+X-2x_0)} f(r)}{e^{ar}\mathrm{f}(r) - e^{a(b-r)}\mathrm{f}(b-r)}$$

rempliront évidemment les conditions énoncées dans le théorème 4. Donc, en vertu de ce théorème, on aura, entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + a$,

$$(104) \qquad \mathcal{E}\,\frac{e^{ar}\mathrm{f}(r)\displaystyle\int_{x_0}^{X} e^{-r(x+\mu-2x_0)} f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}\mathrm{f}(r) - e^{a(b-r)}\mathrm{f}(b-r)))} = 0.$$

Si l'on combine cette dernière équation avec la formule (94) par voie d'addition ou de soustraction, l'on obtiendra les deux suivantes :

(105) $$f(x) = \mathcal{E}\frac{e^{ar}[e^{r(x-x_0)}+e^{-r(x-x_0)}]\mathfrak{f}(r)\int_{x_0}^{X} e^{-r(\mu-x_0)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}\mathfrak{f}(r)-e^{a(b-r)}\mathfrak{f}(b-r)))},$$

(106) $$f(x) = \mathcal{E}\frac{e^{ar}[e^{r(x-x_0)}-e^{-r(x-x_0)}]\mathfrak{f}(r)\int_{x_0}^{X} e^{-r(\mu-x_0)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}\mathfrak{f}(r)-e^{a(b-r)}\mathfrak{f}(b-r)))}.$$

Si, pour fixer les idées, on prend

$$b=0, \qquad \mathfrak{f}(r)=1,$$

les équations (105) et (106) donneront

(107) $$f(x) = \mathcal{E}\frac{e^{ar}[e^{r(x-x_0)}+e^{-r(x-x_0)}]\int_{x_0}^{X} e^{-r(\mu-x_0)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-e^{-ar}))},$$

et

(108) $$f(x) = \mathcal{E}\frac{e^{ar}[e^{r(x-x_0)}-e^{-r(x-x_0)}]\int_{x_0}^{X} e^{-r(\mu-x_0)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}-e^{-ar}))},$$

ou, ce qui revient au même,

(109) $$f(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{X} f(\mu)\,d\mu$$

$$+\frac{2}{a}\left\{\cos\frac{\pi(x-x_0)}{a}\int_{x_0}^{X}\cos\frac{\pi(\mu-x_0)}{a}f(\mu)\,d\mu+\cos\frac{2\pi(x-x_0)}{a}\int_{x_0}^{X}\cos\frac{2\pi(\mu-x_0)}{a}f(\mu)\,d\mu+\ldots\right\},$$

et

(110) $$f(x) =$$

$$\frac{2}{a}\left\{\sin\frac{\pi(x-x_0)}{a}\int_{x_0}^{X}\sin\frac{\pi(\mu-x_0)}{a}f(\mu)\,d\mu+\sin\frac{2\pi(x-x_0)}{a}\int_{x_0}^{X}\sin\frac{2\pi(\mu-x_0)}{a}f(\mu)\,d\mu+\ldots\right\},$$

puis, en posant $x_0=0$, $X=a$, on en déduira les formules connues

(111) $$f(x) = \frac{1}{a}\mathop{\mathrm{S}}_{n=-\infty}^{n=\infty}\left\{\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a\cos\frac{n\pi\mu}{a}f(\mu)\,d\mu\right\},$$

(112) $$f(x) = \frac{1}{a}\mathop{\mathrm{S}}_{n=-\infty}^{n=\infty}\left\{\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a\sin\frac{n\pi\mu}{a}f(\mu)\,d\mu\right\}.$$

dans lesquelles le signe S s'étend à toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives de n. Ces dernières formules, qui subsistent pour les valeurs de x renfermées entre les limites $x=0$, $x=a$, peuvent être employées avec avantage, la première dans la théorie des instruments à vent et dans celle de la propagation des ondes à la surface d'un fluide que renfermerait un canal terminé par deux plans perpendiculaires à son axe, la seconde dans la théorie des cordes vibrantes. Si, dans les mêmes formules, on remplace la constante a par l'unité, on obtiendra deux équations qui pourront s'écrire comme il suit :

$$(113)\qquad f(x)=\int_0^1 f(\mu)\,d\mu+2\mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty}\left\{\cos n\pi x\int_0^1\cos n\pi\mu.f(\mu)\,d\mu\right\},$$

$$(114)\qquad f(x)=2\mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty}\left\{\sin n\pi x\int_0^1\sin n\pi\mu.f(\mu)\,d\mu\right\},$$

et dont la seconde a été donnée par Lagrange dans le tome III des anciens Mémoires de Turin. Si l'on suppose, au contraire, $a=\pi$, on trouvera, pour des valeurs de x renfermées entre les limites 0, π,

$$(115)\qquad \pi f(x)=\int_0^\pi f(\mu)\,d\mu+2\mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty}\left\{\cos nx\int_0^\pi\cos n\mu.f(\mu)\,d\mu\right\},$$

$$(116)\qquad \pi f(x)=2\mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty}\left\{\sin nx\int_0^\pi\sin n\mu.f(\mu)\,d\mu\right\}.$$

Les deux équations précédentes sont contenues dans le Mémoire déjà cité de M. Fourier, pages 308 et 311. Mais on doit observer que la première avait été donnée par Euler dans un Mémoire qui porte la date du 26 mai 1777, et qui se trouve imprimé dans les *Nova acta Academiæ Petropolitanæ* pour l'année 1793. Quant à l'équation (116), on peut la déduire immédiatement de la formule (114) donnée par Lagrange, en remplaçant, dans cette formule, la fonction $f(x)$ par $f(\pi x)$, et les variables x, μ par les rapports $\frac{x}{\pi}$, $\frac{\mu}{\pi}$. On déduirait de même les formules (111) et (112) des équations (115) et (116), en remplaçant la fonction $f(x)$ par $f\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, et les variables x, μ par les rapports $\frac{ax}{\pi}$, $\frac{a\mu}{\pi}$. Remarquons enfin 1.° que, pour obtenir l'équation (116), il suffit de substituer la fonction $f(x)$ à la fonction dérivée $f'(x)$, dans l'équation (115) différenciée par rapport à la variable x, et combinée avec la formule

$$\int \cos n\mu . f(\mu)\, d\mu = f(\mu)\, \frac{\sin n\mu}{n} - \frac{1}{n} \int \sin n\mu . f'(\mu)\, d\mu ,$$

de laquelle on tire

$$(117) \qquad \int_0^\pi \cos n\mu . f(\mu)\, d\mu = -\frac{1}{n} \int_0^\pi \sin n\mu . f'(\mu)\, d\mu ;$$

2.° que, si l'on ajoute, membre à membre, les équations (115) et (116), on obtiendra une autre équation comprise dans la formule (77).

Lorsque, dans les équations (115) et (116), on prend successivement $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, etc..., on en conclut, pour des valeurs de x renfermées entre les limites $0, \pi$,

$$(118) \quad \begin{cases} \cos x + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + \ldots = \dfrac{\pi(\pi - 2x)}{8}, \\ \cos x + \dfrac{\cos 3x}{3^4} + \dfrac{\cos 5x}{5^4} + \ldots = \dfrac{\pi(\pi - 2x)(\pi^2 + 2\pi x - 2x^2)}{96}, \\ \text{etc.....}, \end{cases}$$

et

$$(119) \quad \begin{cases} \sin x + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dfrac{\sin 5x}{5} + \ldots = \dfrac{\pi}{4}, \\ \sin x + \dfrac{\sin 3x}{3^3} + \dfrac{\sin 5x}{5^3} + \ldots = \dfrac{\pi x(\pi - x)}{8}, \\ \text{etc.....} \end{cases}$$

On pourrait arriver aux mêmes résultats, en partant des formules (73) et (74) de la page 310. En effet, si l'on pose, dans ces formules, $\alpha = x - \pi$, on en tirera, pour des valeurs de x comprises entre les limites $x = 0$, $x = 2\pi$,

$$(120) \quad \cos x + \frac{\cos 2x}{2^{2m}} + \frac{\cos 3x}{3^{2m}} + \frac{\cos 4x}{4^{2m}} + \ldots = -\mathcal{E}\, \frac{\pi \cos (x - \pi) z}{2 \sin \pi z} \left(\left(\frac{1}{z^{2m}}\right)\right),$$

et

$$(121) \quad \sin x + \frac{\sin 2x}{2^{2m+1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2m+1}} + \frac{\sin 4x}{4^{2m+1}} + \ldots = -\mathcal{E}\, \frac{\pi \sin (x - \pi) z}{2 \sin \pi z} \left(\left(\frac{1}{z^{2m+1}}\right)\right),$$

puis, en remplaçant x par $2x$, on trouvera, pour des valeurs de x renfermées entre les limites 0, π,

(122) $$\frac{\cos 2x}{2^{2m}} + \frac{\cos 4x}{4^{2m}} + \frac{\cos 6x}{6^{2m}} + \ldots = -\mathcal{E}\frac{\pi\cos(2x-\pi)z}{2^{2m+1}\sin\pi z}\left(\left(\frac{1}{z^{2m}}\right)\right),$$

et

(123) $$\frac{\sin 2x}{2^{2m+1}} + \frac{\sin 4x}{4^{2m+1}} + \frac{\sin 6x}{6^{2m+1}} + \ldots = -\mathcal{E}\frac{\pi\sin(2x-\pi)z}{2^{2m+2}\sin\pi z}\left(\left(\frac{1}{z^{2m+1}}\right)\right).$$

Si maintenant on combine la formule (120) avec la formule (122), ou la formule (121) avec la formule (123), on obtiendra les suivantes :

(124) $$\cos x + \frac{\cos 3x}{3^{2m}} + \frac{\cos 5x}{5^{2m}} + \ldots = \pi\,\mathcal{E}\frac{\cos(2x-\pi)z - 2^{2m}\cos(x-\pi)z}{2^{2m+1}\sin\pi z}\left(\left(\frac{1}{z^{2m}}\right)\right),$$

(125) $$\sin x + \frac{\sin 3x}{3^{2m+1}} + \frac{\sin 5x}{5^{2m+1}} + \ldots = \pi\,\mathcal{E}\frac{\sin(2x-\pi)z - 2^{2m+1}\sin(x-\pi)z}{2^{2m+2}\sin\pi z}\left(\left(\frac{1}{z^{2m+1}}\right)\right),$$

qui subsistent pour des valeurs de x positives, mais inférieures à π, et qui, étant développées, reproduisent les équations (118) et (119). Il est bon d'observer que la première des équations (119) cesse d'être exacte, quand la variable x devient précisément équivalente à l'une des limites 0, π. Mais, si, dans la même formule, on attribue successivement à x les deux valeurs $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, on retrouvera deux équations données par Leibnitz et par Euler, savoir,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}, \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \ldots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Lorsque, dans les équations (115) et (116), on prend $f(x) = e^{sx}$, on en conclut, pour des valeurs de x comprises entre 0 et π,

(126) $$e^{sx} = \frac{2s}{\pi}(e^{s\pi}-1)\left(\frac{1}{2s^2} + \frac{\cos 2x}{s^2+4} + \frac{\cos 4x}{s^2+16} + \ldots\right) - \frac{2s}{\pi}(e^{s\pi}+1)\left(\frac{\cos x}{s^2+1} + \frac{\cos 3x}{s^2+9} + \ldots\right),$$

et

(127) $$e^{sx} = \frac{2}{\pi}(e^{s\pi}+1)\left(\frac{\sin x}{s^2+1} + \frac{3\sin 3x}{s^2+9} + \ldots\right) - \frac{2}{\pi}(e^{s\pi}-1)\left(\frac{2\sin 2x}{s^2+4} + \frac{4\sin 4x}{s^2+16} + \ldots\right).$$

Si, après avoir développé les deux membres des formules précédentes suivant les puissances ascendantes de s, on égalait entre eux les coefficients des puissances semblables, on retrouverait les équations (118) et (119), avec celles que comprennent les formules (122) et (123).

Lorsque, dans la formule (115), on pose $\mu = 2\nu$, et $f(x) = \cos^s \frac{x}{2}$, s désignant une quantité positive quelconque, on en conclut

$$(128) \qquad \frac{\pi}{2}\cos^s\frac{x}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^s\nu \, . \, d\nu + 2 \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}} \left\{ \cos nx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2n\nu \, . \cos^s \nu \, d\nu \right\}.$$

D'ailleurs, j'ai prouvé, dans le Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires [page 40], qu'on a généralement, pour des valeurs positives de s et de t,

$$(129) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\nu \, . \cos^s\nu \, d\nu = \frac{\pi}{2^{s+1}} \, \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{s+t}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s-t}{2}+1\right)}.$$

On aura donc par suite

$$(130) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2n\nu \, . \cos^s\nu \, . \, d\nu = \frac{\pi}{2^{s+1}} \, \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+n+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-n+1\right)}$$

$$= \frac{\pi}{2^{s+1}} \, \frac{\Gamma(s+1)}{\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right]^2} \, \frac{s(s-2)\ldots(s-2n+2)}{(s+2)(s+4)\ldots(s+2n)},$$

et l'équation (128) donnera, entre les limites $x = 0$, $x = \pi$, ou même entre les limites $x = -\pi$. $x = \pi$,

$$(131) \quad \cos^s\frac{x}{2} = \frac{1}{2^{s-1}} \, \frac{\Gamma(s+1)}{\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right]^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{s}{s+2}\cos x + \frac{s(s-2)}{(s+2)(s+4)}\cos 2x + \ldots \right\};$$

puis, en remplaçant x par $2x$, on trouvera, pour des valeurs numériques de x plus petites que $\frac{\pi}{2}$,

$$(132)\quad \cos^s x = \frac{1}{2^{s-1}} \frac{\Gamma(s+1)}{\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right]^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{s}{s+2}\cos 2x + \frac{s(s-2)}{(s+2)(s+4)}\cos 4x + \ldots \right\}.$$

Si, dans la formule (132), on pose successivement $s=2m$, $s=2m-1$, m désignant un nombre entier quelconque, on obtiendra les deux équations

$$(133)\quad \cos^{2m} x = 2\,\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{m}{m+1}\cos 2x + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}\cos 4x + \ldots \right\},$$

$$(134)\quad \cos^{2m-1} x = \frac{4}{\pi}\,\frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{1.3.5\ldots(2m-1)} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2m-1}{2m+1}\cos 2x + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m+1)(2m+3)}\cos 4x + \ldots \right\},$$

qui fournissent les développements de $\cos^{2m} x$ et de $\cos^{2m-1} x$ en deux séries dont l'une s'arrête, tandis que l'autre est composée d'un nombre infini des termes. Si l'on fait, en particulier $m=1$, $m=2$, etc..., on tirera de l'équation (133)

$$(135)\quad \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \cos^4 x = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{2.1}{3.4}\cos 4x\right) = \frac{1}{8}(3+4\cos 2x + \cos 4x), \\ \text{etc......,} \end{cases}$$

et de l'équation (134)

$$(136)\quad \begin{cases} \cos x = \frac{4}{\pi}\left\{ \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} - \frac{\cos 8x}{7.9} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}, \\ \cos^3 x = \frac{24}{\pi}\left\{ \frac{1}{2.9} + \frac{\cos 2x}{1.3.5} + \frac{\cos 4x}{1.3.5.7} - \frac{\cos 6x}{3.5.7.9} + \frac{\cos 8x}{5.7.9.11} - \ldots \right\}, \\ \text{etc......} \end{cases}$$

Ajoutons que, si l'on prend $x=0$, on tirera de la formule (132)

$$(137)\quad \frac{1}{2} + \frac{s}{s+2} + \frac{s(s-2)}{(s+2)(s+4)} + \frac{s(s-2)(s-4)}{(s+2)(s+4)(s+6)} + \ldots = 2^{s-1}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right]^2}{\Gamma(s+1)},$$

et des formules (136),

(138)
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\frac{1}{7.9}+\ldots\ldots=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{1.3.5.7}-\frac{1}{3.5.7.9}+\frac{1}{5.7.9.11}-\ldots=\frac{\pi}{24}-\frac{11}{90}, \\ \text{etc.....} \end{array}\right.$$

Revenons maintenant à la formule (109). Si l'on y suppose

$$x_0=0, \quad X=\frac{\pi}{2}, \quad a=\frac{\pi}{\alpha}, \quad f(x)=\cos^s x,$$

s désignant toujours une quantité positive, on obtiendra l'équation

(139) $$\cos^s x=$$
$$\frac{\alpha}{2^s}\Gamma(s+1)\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right]^2}+\frac{\cos\alpha x}{\Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s-\alpha}{2}+1\right)}+\frac{\cos 2\alpha x}{\Gamma\left(\frac{s+2\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s-2\alpha}{2}+1\right)}+\ldots\right\},$$

qui subsiste pour les valeurs de x comprises entre les limites $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, et pour des valeurs de α positives, mais inférieures à 2. Si l'on prenait précisément $\alpha=2$, l'équation (139) coïnciderait avec la formule (132). De plus, si l'on combine l'équation (139) avec celle que l'on en déduit, quand on remplace α par 2α, on trouvera, entre les limites $\alpha=0$, $\alpha=1$; $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$,

(140) $$\cos^s x=\frac{\alpha}{2^{s-1}}\Gamma(s+1)\left\{\frac{\cos\alpha x}{\Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s-\alpha}{2}+1\right)}+\frac{\cos 3\alpha x}{\Gamma\left(\frac{s+3\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s-3\alpha}{2}+1\right)}+\ldots\right\}$$

Lorsque, dans cette dernière formule, on pose successivement $\alpha=1$, puis $s=2m$ et $s=2m-1$, m désignant un nombre entier, on en conclut :

(141) $$\cos^s x=$$
$$\frac{1}{2^{s-2}}\frac{\Gamma(s+1)}{\left[\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right]^2}\left\{\frac{1}{s+1}\cos x+\frac{s-1}{(s+1)(s+3)}\cos 3x+\frac{(s-1)(s-3)}{(s+1)(s+3)(s+5)}\cos 5x+\ldots\right\},$$

(142) $$\cos^{2m} x =$$

$$\frac{4}{\pi}\,\frac{2.4\ldots\ldots\ldots 2m}{3.5\ldots(2m+1)}\left\{\cos x + \frac{2m-1}{2m+3}\cos 3x + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m+3)(2m+5)}\cos 5x + \ldots\right\},$$

(143) $$\cos^{2m-1} x =$$

$$2\,\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots\ldots\ldots 2m}\left\{\cos x + \frac{m-1}{m+1}\cos 3x + \frac{(m-1)(m-2)}{(m+1)(m+2)}\cos 5x + \ldots\ldots\right\}.$$

On aura, par exemple, entre les limites $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$,

(144) $$\begin{cases} 1 = \frac{4}{\pi}\left\{\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 9x}{9} - \ldots\right\}, \\ \cos^2 x = \frac{8}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1.3} + \frac{\cos 3x}{1.3.5} - \frac{\cos 5x}{3.5.7} + \frac{\cos 7x}{5.7.9} - \frac{\cos 9x}{7.9.11} + \ldots\right\}, \end{cases}$$

et, pour une valeur quelconque de x,

(145) $$\begin{cases} \cos x = \cos x, \\ \cos^3 x = \frac{3}{4}\left(\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x\right) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x), \\ \text{etc.....} \end{cases}$$

Si l'on prend $x = 0$, les formules (141) et (144) donneront

(146) $$1 + \frac{s-1}{s+3} + \frac{(s-1)(s-3)}{(s+3)(s+5)} + \ldots = 2^{s-2}\,\frac{s+1}{\Gamma(s+1)}\left[\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right]^2,$$

et

(147) $$\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots\ldots\ldots = \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}, \\ \text{etc.....} \end{cases}$$

Enfin, si, dans la formule (139), on pose $\alpha = \frac{1}{2}$, alors, en ayant égard à l'équation connue

(148) $$\Gamma(2s) = 2^{2s-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right),$$

on trouvera, entre les limites $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$,

(149) $$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)} \cos^s x =$$

$$\cos\frac{x}{2} + \frac{2s+1}{2s+3}\cos\frac{3x}{2} + \frac{(2s+1)(2s-1)}{(2s+5)(2s+1)}\cos\frac{5x}{2} + \frac{(2s+1)(2s-1)(2s-3)}{(2s+7)(2s+3)(2s-1)}\cos\frac{7x}{2} + \ldots\ldots =$$

$$\cos\frac{x}{2} + \frac{2s+1}{2s+3}\cos\frac{3x}{2} + \frac{2s-1}{2s+5}\cos\frac{5x}{2} + \frac{(2s+1)(2s-3)}{(2s+7)(2s+3)}\cos\frac{7x}{2} + \frac{(2s-1)(2s-5)}{(2s+9)(2s+5)}\cos\frac{9x}{2} + \ldots$$

puis on en conclura, en prenant $s = m + \frac{1}{2}$,

(150) $$\frac{2.4\ldots(2m+2)}{1.3\ldots(2m+1)} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^{m+\frac{1}{2}} x =$$

$$\cos\frac{x}{2} + \frac{m+1}{m+2}\cos\frac{3x}{2} + \frac{m}{m+3}\cos\frac{5x}{2} + \frac{(m+1)(m-1)}{(m+2)(m+4)}\cos\frac{7x}{2} + \frac{m(m-2)}{(m+3)(m+5)}\cos\frac{9x}{2} + \ldots$$

On aura, par exemple,

(151) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} = \cos\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{5}\cos\dfrac{5x}{2} - \dfrac{1}{7}\cos\dfrac{7x}{2} + \dfrac{1}{9}\cos\dfrac{9x}{2} + \ldots; \\ \dfrac{\pi\cos x}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{1.5}\cos\dfrac{3x}{2} + \dfrac{1}{3.7}\cos\dfrac{5x}{2} - \dfrac{1}{5.9}\cos\dfrac{7x}{2} - \dfrac{1}{7.11}\cos\dfrac{9x}{2} + \ldots, \\ \text{etc.}\ldots, \end{array}\right.$$

et

$$(152)\quad\begin{cases} 2^{\frac{1}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}x = \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{3x}{2} - \frac{1}{2.4}\cos\frac{7x}{2} + \frac{1.3}{2.4.6}\cos\frac{11x}{2} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cos\frac{15x}{2} + \ldots, \\ \frac{4\sqrt{2}}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x = \cos\frac{x}{2} + \frac{2}{3}\cos\frac{3x}{2} + \frac{1}{4}\cos\frac{5x}{2} - \frac{1}{4.6}\cos\frac{9x}{2} + \frac{1.3}{4.6.8}\cos\frac{13x}{2} - \ldots, \\ \text{etc.....} \end{cases}$$

Ajoutons que, si l'on pose $x = 0$, dans la formule (149), elle donnera

$$(153)\quad 1 + \frac{2s+1}{2s+3} + \frac{2s-1}{2s+5} + \frac{(2s-3)(2s+1)}{(2s+7)(2s+3)} + \frac{(2s-5)(2s-1)}{(2s+9)(2s+5)} + \ldots = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)}.$$

Soient maintenant, dans l'équation (100),

$$F(r) = e^{ar} + 1, \qquad \varphi(x, r) = e^{ar}e^{-r(x-2x_0)},$$

a désignant toujours une constante positive. Alors, si l'on suppose la variable x renfermée entre les limites x_0, X, et $X - x_0 < \frac{a}{2}$, les expressions (98), (99) rempliront les conditions énoncées dans le théorème 4. Donc, en vertu de ce théorème, on aura, entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + \frac{a}{2}$,

$$(154)\qquad \mathcal{E}\,\frac{e^{ar}\int_{x_0}^{X} e^{-r(x+\mu-2x_0)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}+1))} = 0.$$

Si l'on combine cette dernière formule avec l'équation (79) par voie d'addition ou de soustraction, on en tirera

$$(155)\qquad f(x) = \mathcal{E}\,\frac{e^{ar}\left[e^{r(x-x_0)} + e^{-r(x-x_0)}\right]\int_{x_0}^{X} e^{-r(\mu-x_0)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}+1))},$$

et

$$(156)\qquad f(x) = \mathcal{E}\,\frac{e^{ar}\left[e^{r(x-x_0)} - e^{-r(x-x_0)}\right]\int_{x_0}^{X} e^{-r(\mu-x_0)}f(\mu)\,d\mu}{((e^{ar}+1))},$$

ou, ce qui revient au même,

(157) $$f(x) =$$

$$\frac{4}{a}\left\{\cos\frac{\pi(x-x_0)}{a}\int_{x_0}^{X}\cos\frac{\pi(\mu-x_0)}{a}f(\mu)\,d\mu+\cos\frac{3\pi(x-x_0)}{a}\int_{x_0}^{X}\cos\frac{3\pi(\mu-x_0)}{a}f(\mu)\,d\mu+\ldots\right\},$$

et

(158) $$f(x) =$$

$$\frac{4}{a}\left\{\sin\frac{\pi(x-x_0)}{a}\int_{x_0}^{X}\sin\frac{\pi(\mu-x_0)}{a}f(\mu)\,d\mu+\sin\frac{3\pi(x-x_0)}{a}\int_{x_0}^{X}\sin\frac{3\pi(\mu-x_0)}{a}f(\mu)\,d\mu+\ldots\right\};$$

puis, en prenant $x_0 = 0$, $2X = a = \pi$, on trouvera, pour des valeurs de x comprises entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$,

(159) $$f(x) = \frac{4}{\pi}\mathop{\mathrm{S}}_{n=0}^{n=\infty}\left\{\cos(2n+1)x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n+1)\mu\,.\,f(\mu)\,d\mu\right\},$$

et

(160) $$f(x) = \frac{4}{\pi}\mathop{\mathrm{S}}_{n=0}^{n=\infty}\left\{\sin(2n+1)x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n+1)\mu\,.\,f(\mu)\,d\mu\right\}.$$

Les formules (159) et (160) s'accordent avec celles que M. Poisson a données dans le 18.ᵉ cahier du Journal de l'École Polytechnique [page 425]. La première comprend comme cas particulier l'équation (140).

Les applications que nous venons de faire du théorème 4, suffisent pour montrer le parti qu'on peut en tirer. Il serait facile d'étendre indéfiniment ces applications, et de combiner ensuite les formules obtenues avec celles que fournit le théorème 3. En opérant de la sorte, et désignant par a une constante positive, par b, A, B des constantes quelconques, enfin par $\mathrm{f}(r)$ et $\mathrm{f}_1(r)$ des fonctions entières de r, on trouvera, par exemple, 1.° pour des valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + a$,

(161) $$f(x) = \mathcal{E}\frac{[\mathrm{f}(b-r)e^{r(x-x_0)}-\mathrm{f}(r)e^{(b-r)(x-x_0)}]e^{ar}\mathrm{f}_1(r)\int_{x_0}^{X}e^{-r(\mu-x_0)}f(\mu)\,d\mu}{((\mathrm{f}(b-r)\mathrm{f}_1(r)e^{ar}-\mathrm{f}(r)\mathrm{f}_1(b-r)e^{a(b-r)}))},$$

et

(162) $$f(x) = \mathcal{E}\frac{[(A+r)e^{(x-x_0)}-(A-r)e^{-r(x-x_0)}](B+r)\int_{x_0}^{X}e^{r(a+x_0-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{(((A+r)(B+r)e^{ar}-(A-r)(B-r)e^{-ar}))},$$

2.° pour des valeurs de x comprises entre les limites $x=0$, $x=a$,

$$(163)\qquad f(x)=\mathcal{E}\frac{[(A+r)e^{rx}-(A-r)e^{-rx}](B+r)\int_0^a e^{r(a-\mu)}f(\mu)\,d\mu}{((\,(A+r)(B+r)e^{ar}-(A-r)(B-r)e^{-ar}\,))},$$

$$(164)\qquad f(x)=$$

$$\mathcal{E}\frac{(1-e^{-ar}\cos ar)[e^{rx}-\cos rx-\sin rx]-e^{ar}\sin ar[e^{-rx}-\cos rx+\sin rx]}{((\,(e^{ar}+e^{-ar})\cos ar-2\,))}\int_0^a e^{-r\mu}f(\mu)\,d\mu,$$

$$(165)\qquad f(x)=$$

$$-\mathcal{E}\frac{(1+e^{-ar}\cos ar)(e^{rx}-\cos rx-\sin rx)+e^{-ar}\sin ar(e^{-rx}-\cos rx-\sin rx)}{((\,(e^{ar}+e^{-ar})\cos ar+2\,))}\int_0^a e^{-r\mu}f(\mu)\,d\mu.$$

Les formules (163), (164), (165) peuvent être employées avec succès, la première, quand on recherche les lois suivant lesquelles la chaleur se propage dans une barre métallique. et les deux dernières quand il s'agit de déterminer les vibrations d'une lame élastique très-étroite, dont les extrémités sont fixes, ou l'une fixe et l'autre mobile. On peut consulter à ce sujet le Mémoire que j'ai publié en février 1827 sur l'application du calcul des résidus aux questions de physique.

En terminant cet article, je ferai observer qu'il serait facile de généraliser les formules auxquelles nous sommes parvenus, de manière à en obtenir d'autres qui serviraient à transformer non plus une fonction $f(x)$ de la seule variable x, mais une fonction $f(x,y,\ldots)$ de plusieurs variables x, y,... Ainsi, en particulier, si l'on remplace, dans la formule (76), $f(x)$ par $f(x,y)$, on trouvera, entre les limites $x=x_0$, $x=X<x_0+a$,

$$(166)\qquad f(x,y)=\mathcal{E}\frac{\int_{x_0}^{X}e^{r(x-\mu)}f(\mu,y)\,d\mu}{((\,e^{ar}-1\,))}.$$

D'ailleurs on trouvera de même, entre les limites $y=y_0$, $y=Y<y_0+b$,

$$(167)\qquad f(\mu,y)=\mathcal{E}\frac{\int_{y_0}^{Y}e^{s(y-\nu)}f(\mu,\nu)\,d\nu}{((\,e^{bs}-1\,))},$$

b désignant une quantité positive, et le signe $\mathcal{E}$ étant relatif à la variable s. On

aura donc par suite, entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + a$; $y = y_0$, $y = Y < y_0 + b$,

$$(168) \qquad f(x,y) = \mathcal{E}\mathcal{E} \frac{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} e^{r(x-\mu)} e^{s(y-\nu)} f(\mu,\nu)\, d\mu\, d\nu}{((e^{br}-1))\,((e^{bs}-1))}.$$

Pour déduire cette dernière équation de la formule (7), il suffirait de poser

$$\mathrm{F}(r) = e^{ar} - 1, \quad \varphi(r) = 1, \quad \mathfrak{f}(x,y,r) = \mathcal{E} \frac{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} e^{r(x-\mu)} e^{s(y-\nu)} f(\mu,\nu)\, d\mu\, d\nu}{((e^{bs}-1))}.$$

Post Scriptum. Lorsque, dans la formule (77), on pose $a = 2h$, $x_0 = -h$, $X = h$, on obtient une équation donnée par M. Poisson dans le 19.ᵉ cahier du Journal de l'École Polytechnique, savoir,

$$(169) \qquad f(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(\mu)\, d\mu + \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-h}^{h} \cos\frac{n\pi(x-\mu)}{h}\, f(\mu)\, d\mu.$$

Cette équation, qui subsiste entre les limites $x = -h$, $x = h$, se déduit de la formule (78), quand on y remplace la fonction $f(x)$ par $f\left(\frac{hx}{\pi} - h\right)$, et les variables x, μ par les binomes $\frac{\pi x}{h} + \pi$, $\frac{\pi\mu}{h} + \pi$. Or, quoique la formule (77) paraisse plus générale que l'équation (169), on peut néanmoins, en profitant des remarques faites par M. Fourier dans le Mémoire que nous avons précédemment rappelé, tirer la première de la seconde. Il suffit en effet, pour y parvenir, d'admettre que les quantités x_0, X sont comprises entre les limites $-h = -\frac{1}{2}a$, $+h = \frac{1}{2}a$, puis de substituer à $f(x)$ une fonction de x qui soit constamment nulle hors des limites $x = x_0$, $x = X$, et constamment égale à $f(x)$ entre ces limites. Ainsi, la formule (77) est renfermée implicitement dans l'équation (78). On prouverait de même que les formules (109) et (110) peuvent être déduites des équations (114) et (115) données par Lagrange et par Euler. Observons enfin qu'il suffit d'ajouter, membre à membre, les formules (109) et (110), puis de remplacer a par $\frac{1}{2}a$, pour reproduire l'équation (77). Seulement, lorsqu'on opère comme on vient de le dire, la formule (77) ne se trouve établie que pour des valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X < x_0 + \frac{1}{2}a$.

TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

PAGES.	LIGNES.	FAUTES.	CORRECTIONS.
27	7	(1)	(12)
59	10	$C \cos\beta$	$D \cos\beta$
63	10	$B\cos\beta + C\cos\gamma$	$B\cos\beta + D\cos\gamma$
123	dernière	$\chi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\chi\left(p, \frac{1}{\varepsilon}\right)$
150	9	$\int_{\frac{2\pi}{a}+\delta}^{\frac{2\pi}{a}-\delta} \cdots \int_{\frac{4\pi}{a}-\delta}^{\frac{4\pi}{a}+\delta}$	$\int_{\frac{2\pi}{a}+\delta}^{\frac{4\pi}{a}-\delta} \cdots \int_{\frac{4\pi}{a}+\delta}^{\frac{6\pi}{a}-\delta}$
152	15	$\varphi(r)$	$\psi(r)$
156	2	$= \frac{1}{2} e^{-a^2}$	$\frac{1}{2} + e^{-a^2}$
163	7	$\varphi(a)\, d\alpha$	$\varphi(\alpha)\, d\alpha$
188	8	$\frac{1}{(D-\rho)^{m-1}} \cdots \frac{1}{(D-\rho)^{m}}$	$\frac{f(x)}{(D-\rho)^{m-1}} \cdots \frac{f(x)}{(D-\rho)^{m}}$
192	15	z_3	z_1
206	5	$]^{-\frac{x}{}}$	$]^{-\frac{x}{b}}$
207	dernière	$]^{\frac{x}{}-1}$	$]^{\frac{x}{b}-1}$
214	18	$(D - r_2)e^{r_2 x} = 0$,	$(D - r_2)e^{r_1 x} = 0$, ...

PAGES.	LIGNES.	FAUTES.	CORRECTIONS.
240	11	$e^{-\tau\cos\tau}$	$e^{-\pi\cos\tau}$
267	2	$\frac{\pi^5}{96}$	$\frac{\pi^5}{16.96}=\frac{\pi^5}{1536}$
277	3	FONCTIONS RATIONNELLES	FRACTIONS RATIONNELLES
332	8	$+S$	$+\underset{n=1}{\overset{n=\infty}{S}}$

MÉCANIQUE.

Mémoire sur le choc des corps élastiques, déposé à l'Académie Royale des Sciences le 19 *février* 1827, *par* M. Cauchy.

Dans un Mémoire présenté à l'Académie en 1822, j'ai donné les équations aux différences partielles qui déterminent les mouvements vibratoires des corps solides élastiques ou non élastiques. Dans le nouveau Mémoire, j'applique ces équations au choc des corps élastiques. Je me bornerai pour le moment à l'exposition des phénomènes que présente le choc de deux cylindres droits et homogènes qui viennent se frapper par leurs bases avec des vitesses égales ou inégales, dirigées suivant des droites parallèles à leurs génératrices. Alors les équations aux différences partielles qui déterminent les mouvements des deux cylindres renferment seulement chacune deux variables indépendantes, savoir, une abscisse x et le temps; et, en intégrant ces équations de manière que les variables principales satisfassent aux conditions du problème, on obtient immédiatement les résultats que je vais indiquer.

Supposons, pour fixer les idées, que les deux cylindres soient formés de même matière, mais que leurs longueurs soient différentes. Comme le centre de gravité du système se mouvra uniformément dans l'espace, on pourra toujours ramener la question au cas où ce centre a une vitesse nulle, en rapportant le mouvement du système à celui du centre dont il s'agit. Cela posé, soient a, A les longueurs respectives des deux cylindres; ω, Ω leurs vitesses initiales dirigées en sens contraires; $\frac{h}{n}$ la hauteur qu'il faudrait attribuer au second cylindre pour qu'étant suspendu à une tranche infiniment mince du premier, il produisit une dilatation mesurée par $\frac{1}{n}$; et g la force accélératrice de la pesanteur. Enfin faisons, pour abréger, $k^2 = gh$, comptons le temps t à partir de l'instant où le choc commence, et soit

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{A}{a} > 1.$$

Depuis le commencement du choc jusqu'à la fin du temps qu'on obtiendra en divisant, par la constante k, la longueur a du premier cylindre, les vitesses initiales ω et Ω disparaîtront dans deux portions contiguës du premier et du second cylindre, et ces deux portions offriront dans chaque tranche une nouvelle vitesse équivalente à la demi-différence $\frac{\omega - \Omega}{2}$, avec une compression représentée par le rapport

$$\frac{\omega + \Omega}{2}.$$

Pendant le même temps, les longueurs des portions dont il s'agit seront égales dans les deux cylindres, et croîtront comme le temps, de manière à devenir finalement équivalentes à la longueur du premier cylindre. Pendant un second temps égal au premier, ces longueurs varieront encore : mais celle qui se rapporte au premier cylindre diminuera proportionnellement au temps, de manière à devenir finalement nulle; tandis que l'autre longueur relative au second cylindre croîtra sans cesse, si la longueur du second cylindre surpasse le double

de celle du premier, et croîtra pour diminuer ensuite dans le cas contraire. Quant aux portions restantes des deux cylindres, elles offriront dans chacune de leurs tranches, pendant la période dont il est question, dans le premier cylindre, une vitesse constante égale à la vitesse initiale du second cylindre, avec une compression nulle en chaque point; et dans le second cylindre la vitesse initiale du second ou du premier cylindre, suivant que la longueur du second cylindre sera inférieure ou supérieure au double de la longueur du premier. A la fin de cette nouvelle période, le premier cylindre étant animé dans tous ses points par une vitesse équivalente à la vitesse initiale du second, se séparera de celui-ci, et le choc sera terminé. Ajoutons qu'après la séparation le premier cylindre, offrant partout des compressions nulles, ne changera plus de forme, tandis que le second cylindre, composé de deux parties dont les vitesses seront différentes, et dont une seule offrira des compressions nulles, continuera de vibrer dans l'espace. On doit seulement excepter le cas où les deux cylindres, étant de même longueur, auraient eu primitivement des vitesses égales dirigées en sens contraires.

Les conséquences qui se déduisent des principes que nous venons d'établir sont très-importantes dans la théorie de la dynamique. Ainsi, par exemple, on enseigne, dans la mécanique rationnelle, que, si deux corps parfaitement élastiques viennent à se choquer, la somme des forces vives restera la même avant le choc et après le choc. Mais il est clair qu'alors on fait abstraction du mouvement vibratoire de chaque corps après le choc (1), et l'on pourrait être curieux de connaître ce qui arrive dans le cas contraire.

Or, si l'on détermine, d'après ce qui a été dit ci-dessus, la somme des forces vives de deux cylindres avant et après le choc, on reconnaîtra 1° que la perte des forces vives est nulle dans un seul cas, savoir, lorsque les longueurs des deux cylindres sont égales, et que cette perte, bien loin d'être nulle dans les autres cas, comme on le suppose ordinairement, s'élève à la moitié de la somme des forces vives, quand la longueur de l'un des cylindres devient infiniment grande, et qu'elle peut s'élever jusqu'aux trois quarts de cette somme quand les deux cylindres offrent des longueurs doubles l'une de l'autre. Lorsqu'un cylindre vient frapper un plan solide, il se trouve à peu près dans le même cas que s'il frappait un cylindre dont la longueur fût infinie, et par conséquent il y a perte de forces vives.

Dans un second Mémoire je montrerai comment on peut étendre les mêmes principes au choc de deux cylindres composés de matières différentes, ou au choc des corps dont la forme n'est pas cylindrique.

---

(1) Dans la théorie ordinaire du choc des corps élastiques, on suppose qu'à l'instant où les deux corps se séparent, chacun d'eux est revenu à son état naturel, tandis que, dans la réalité, le contraire arrive, ainsi que le démontre évidemment le son produit par le choc de deux sphères métalliques. Frappé de cette idée, que M. Binet avait eue de son côté, M. Coriolis soupçonnait depuis long-temps qu'il y avait des différences marquées entre les résultats fournis par la théorie ordinaire du choc et ceux que l'on pourrait déduire de l'expérience ou d'une théorie plus conforme à la nature, et il m'avait engagé, pour cette raison, à traiter par le calcul cette question délicate, en donnant suite aux travaux que j'avais entrepris sur les mouvements vibratoires des corps solides. Ayant suivi ce conseil, je suis parvenu aux résultats qui font l'objet de cet article, et qui paraissent devoir mériter l'attention des géomètres.

